Vorlesungsskript

# Physik für Studierende der Biologie

Sommersemester 2024, Wintersemester 2024/25

Ruhr-Universität Bochum

# Prof. A. von Keudell

10. Juli 2024

# Vorwort

Diese Notizen sind abgeleitet aus den Unterlagen der Vorlesung "Physik I, II, III, IV für Physiker, Mechanik und Wärmelehre" im WS 2006/07, 2009/10, 2014/15, 2015/16, 2017/2018, 2019/2020, 2021/2022, 2023. Als Grundlage wurden die Bücher Halliday, Resnick, Walker *Physik*, Tipler, Mosca *Phy*sik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Demtröder Experimentalphysik *I-IV*, Dransfeld, Kienle, Vonach *Physik I*, Magnus, Müller Grundlagen der Technischen Mechanik, Reif Statistische Physik und Theorie der Wärme verwendet. Die Beispiele aus der Biologie und Medizin sind aus den Büchern Fritsche Physik für Biologen und Mediziner und Zabel Physik für Mediziner entnommen. Diese Notizen sollen und können natürlich diese Bücher nicht ersetzen und verstehen sich als Ergänzung.

Im Verlauf des Skripts sind Vertiefungen und Ergänzungen für Interessierte als kleinere Einschübe farbig hinterlegt, sie sind nicht prüfungsrelevant.

# Inhaltsverzeichnis

1	$\operatorname{Einl}$	Einleitung		
	1.1	Biologie und Physik	7	
		1.1.1 Mechanik Bewegung	7	
		1.1.2 Astgabeln $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	8	
		1.1.3 Korrelation Herzschlag zur Größe von Lebewesen	8	
		1.1.4 Kapillareffekt zum Wasserhaushalt von Bäume	8	
		1.1.5 Herzschlag	9	
		1.1.6 Nervenleitungen	9	
		1.1.7 Farben von Schmetterlingen	9	
	1.2	Was ist Physik?	9	
	1.3	Maßeinheiten der Physik	0	
		1.3.1 Längen	0	
		$1.3.2$ Zeiten $\ldots$ $10$	0	
		1.3.3 Masse	2	
	1.4	Messen physikalischer Größen	3	
		1.4.1 SI-System. Umrechnung von Einheiten	3	
		1.4.2 Messgenauigkeit und Messfehler	3	
ი	Мос	honik 10	Q	
4	2 1	Manik ing Magannunktag	<b>)</b>	
	2.1	2.1.1 Demographic cines Massenpunktes	о О	
		2.1.1 Dewegung eines massenpunktes	9 1	
		2.1.2 Kratte	1	
	0.0	2.1.3 Systeme von Massenpunkten	2	
	2.2	Arbeit und Energie	( _	
		2.2.1 Arbeit und Leistung $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 4$	7	
		2.2.2 Energiesatz der Mechanik	0	
		2.2.3 Energie- und Impulserhaltung bei Stößen $\ldots \ldots 54$	4	
	2.3	Die Kreisbewegung	8	
		2.3.1 Winkelgeschwindigkeit $\ldots \ldots \ldots$	8	
		2.3.2 Gravitation $\ldots \ldots \ldots$	2	
	2.4	Ausgedehnte starre Körper	7	

	2.4.1	Translation und Rotation 6	7
	2.4.2	Drehmoment und Drehimpuls 6	8
	2.4.3	Die kinetische Energie der Rotation 7	7
2.5	Elastis	che Körper	0
	2.5.1	Dehnung und Stauchung	0
	2.5.2	Verbiegung eines Balkens	4
2.6	Hydro	statik	7
	2.6.1	Hydrostatischer Druck	7
	2.6.2	Der Auftrieb	0
	2.6.3	Grenzflächen	2
	2.6.4	Gase	7
2.7	Hydro	dynamik	0
	2.7.1	Teilchenerhaltung, Kontinuitätsgleichung 10	0
	2.7.2	Energieerhaltung, Bernoulli-Gleichung	1
	2.7.3	Strömung mit Reibung	5
Sch	wingur	agen und Wellen 11	1
3.1	Schwir	ngungen	1
	3.1.1	Der harmonische Oszillator	1
	3.1.2	Die gedämpfte Schwingung	0
	3.1.3	Die erzwungene Schwingung	0
3.2	Wellen		4
	3.2.1	Ausbreitung von Wellen	4
	3.2.2	Energiedichte einer Welle	9
	3.2.3	Beugung, Brechung und Reflexion von Wellen 13	2
	3.2.4	Stehende Wellen	8
	3.2.5	Wellen bei bewegten Quellen	2
Flat		talahua 14	0
	Floktr	astatik 14	2 2
4.1	A 1 1	Floktrische Ledung 14	9 Q
	4.1.1	Elektrisches Fold und Potontial	2 2
	4.1.2	Leiter im elektrischen Feld Kapazität	0 0
19	4.1.5 Dor old	Sktrische Strom	0
4.2	191	Strom und Widerstand	9 0
	4.2.1	Notzworko 18	9 1
12	т.2.2 Масто	toetatik 10	т 0
4.0		Magnotismus 19	9 0
	4.J.1 4.2.0	Bawagung ainer Ladung im Magnetfold	9 0
1 1		bewegung emer Ladung in Magnetierd	0 6
4.4		Induktion 10	0 G
	4.4.1	IIIQUKUOII	υ
	<ul> <li>2.5</li> <li>2.6</li> <li>2.7</li> <li>Schv 3.1</li> <li>3.2</li> <li>Elek 4.1</li> <li>4.2</li> <li>4.3</li> <li>4.4</li> </ul>	2.4.1 2.4.2 2.4.3 2.5 Elastis 2.5.1 2.5.2 2.6 Hydros 2.6.1 2.6.2 2.6.3 2.6.4 2.7 Hydros 2.7.1 2.7.2 2.7.3 <b>Schwingur</b> 3.1 Schwir 3.1.1 3.1.2 3.1.3 3.2 Wellen 3.2.1 3.2.2 3.2.3 3.2.4 3.2.5 <b>Elektrizitä</b> 4.1 Elektro 4.1.1 4.1.2 4.1.3 4.2 Der ele 4.2.1 4.3.1 4.3.2 4.4 Zeitlich 4.4.1	2.4.1Translation und Rotation62.4.2Drehmoment und Drehimpuls62.4.3Die kinetische Energie der Rotation72.5Elastische Körper82.5.1Dehnung und Stauchung82.5.2Verbiegung eines Balkens82.5.2Verbiegung eines Balkens82.6.4Hydrostatischer Druck92.6.3Grenzflächen92.6.4Gase92.7Hydrodynamik102.7.1Teichenerhaltung, Kontinuitätsgleichung102.7.2Energieerhaltung, Bernoulli-Gleichung102.7.3Strömung mit Reibung102.7.4Sthwingungen113.1.1Der harmonische Oszillator113.1.2Die gedämpfte Schwingung123.1.3Die erzwungene Schwingung123.2.4Stehende Wellen133.2.5Wellen133.2.4Stehende Wellen133.2.5Wellen bei bewegten Quellen144.11Elektrizitätslehre144.12Elektrische Seld und Potential154.1.3Leiter im elektrischen Field, Kapazität164.2.2Netzwerke184.3.1Magnetismus184.3.2Bwegung einer Ladung im Magnetfeld194.4Zeitlich veränderliche Fielder194.4.1Induktion19

		4.4.2	RL-Stromkreise	208
5	Ont	ik	5	213
0	5 1	Licht und Materia 2		
	0.1	5.1.1	Der Brechungsindex	213
		5.1.2	Dispersion und Absorption	216
		513	Brechung und Reflexion	219
		514	Polarisation	229
	5.2	Geomet	rische Optik - Axiome	231
	5.3	Optisch	e Abbildungen. Linsen	232
	0.0	5.3.1	Abbildung einer gekrümmten Grenzfläche	233
		532	Dünne Linsen	236
		533	Kombination von Linsen	243
	5.4	Optisch	e Abbildungen Sniegel	245
	0.1	541	Ebene Spiegel	245
		5.4.2	Sphärische Spiegel	245
	5.5	Optisch	e Instrumente	248
	0.0	5.5.1	Das Auge	248
		5.5.2		251
		5.5.3	Das Mikroskop	253
		5.5.4	Das Fernrohr	254
		5.5.5	Die Kamera	256
	5.6	Beugun	g	259
		5.6.1	Beugung am Spalt	260
		5.6.2	Auflösungsvermögen optischer Instrumente	261
	5.7	Interfer	enz	265
		5.7.1	Michelson-Interferometer	265
0	• •			
6	Ato	m- und	Kernphysik	272
	6.1	Atome	·····································	274
		0.1.1	Masse eines Atoms	2/4
	<i>c</i> 0	6.1.2 T	Grobe eines Atoms	270
	0.2	Ionen u		277
		6.2.1		277
		6.2.2	Ladung eines Elektrons	278
		0.2.3	Masse eines Elektrons	280
	6 9	0.2.4		28U
	0.3 C 4	Photon	en	283
	0.4 6 5	Materie		289
	0.0	Atomm	odelle	292
		0.0.1	Limenstraniung	292

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

		6.5.2	Bohr'sches Atommodell
		6.5.3	Das Wasserstoffatom
	6.6	Anwen	dungen der Atomphysik
		6.6.1	Röntgenstrahlung
		6.6.2	Laser
	6.7	Aufba	u Atomkerne
		6.7.1	Größe Atomkern
		6.7.2	Innere Struktur
	6.8	Bindu	ngsenergie - Atomkerne
	6.9	Radioa	aktivität
		6.9.1	Allgemeines
		6.9.2	$\alpha$ -Zerfall
		6.9.3	$\beta\text{-Zerfall}$
		6.9.4	$\gamma\text{-}{\rm Zerfall}$
_	<b>T T</b> 7		222
7	Wäi	meleh	re 329
	7.1	Kinetis	sche Gastheorie
		7.1.1	Mikroskopische Definition der Temperatur
	7.0	7.1.2	Temperaturemheiten und ihre Messung
	7.2	Warm	e
		7.2.1	Warmemenge
	- 0	7.2.2	Die spezifische Wärmekapazität
	7.3	Warm	etransport
		7.3.1	Wärmeleitung
		7.3.2	Warmestrahlung
		7.3.3	Warmestrom
	7.4	Haupt	sätze der Wärmelehre
		7.4.1	Zustandsgrößen, Zustandsänderungen
		7.4.2	Der erste Hauptsatz
		7.4.3	Der zweite Hauptsatz
	7.5	Reale	Gase
		7.5.1	van der Waals Zustandsgleichung
		7.5.2	Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht
		7.5.3	Phasendiagramme

#### © A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# Kapitel 1

# Einleitung

# 1.1 Biologie und Physik

Die Naturgesetze der Physik werden in allen Phänomenen und Beobachtungen der Biologie sichtbar. Die biologischen Prozessen in Pflanzen und Tieren lassen sich auf grundlegende Wirkprinzipien zurückführen, die unsere Natur bestimmen. Durch diese Abstraktion lassen sich dann die Unterschiede zwischen verschiedenen Lebewesen verstehen oder die Mechanismen des Lebens aufklären. Ein besonderes Wesensmerkmal der Natur ist allerdings die Tatsache, dass viele Lebensformen durch die Evolution ein Optimum in Energieeffizienz erreicht haben, die sich auf der Basis der Naturgesetze nicht immer leicht vorhersagen lassen. So sind Prozesse wie die Wachstumsprozesse bei Bäumen so viel effizienter beim Vergleich von Material und erreichter Festigkeit im Vergleich zu Bauten der Architektur. Wie Naturgesetze die Biologie bestimmen soll im Folgenden an ein paar Beispielen erläutert werden.

# 1.1.1 Mechanik Bewegung

Die Fortbewegung von Tieren ist ein Wechselspiel aus Muskelkraft und Beweglichkeit des Körpers. Dieser so selbstverständliche Vorgang ist ein Zusammenspiel aus Hebelgesetzen, der Rückkopplung des Gleichgewichtsorgans mit den Muskeln und die Koordination des Gehens mit dem Sehen der Umgebung. So habe Analysen des Ganges von Tieren gezeigt, dass das Gehen weniger einem "Anheben gegen die Schwerkraft" entspricht, sondern eher dem geschickten "Abfedern gegen das Fallen". So sind die Muskeln, die diesen "Fall" abfedern, in der Regel stärker ausgebildet was ein energieeffizientes Gehen ermöglicht.

# 1.1.2 Astgabeln

Bei der Wachstumsform von Bäumen findet ein Zuwachs immer an Stellen statt, die durch die ansetzenden Kräfte einer großen Zug- oder Druckspannung ausgesetzt sind. Bereiche eines Baumes, die nicht belastet sind, zeigen hingegen weniger Dickenwachstum. Dieses Wechselspiel führt zu sehr charakteristischen Formen von z.B. Astgabeln. Die Bionik versucht dies im Computer abzubilden, um zu optimierten Bauformen für Bauteile, Gebäude oder Brücken zu kommen. Im Computer wird ein Bauteil unter Belastung gesetzt und es wird an Stellen mit hoher Druck- oder Zugspannung Material hinzugefügt und an unbelasteten Stellen entfernt. So entsteht langsam ein Bauteil mit optimierter Bauform. Diese Fähigkeit besitzt die Natur schon lange. Knochen sind z.B im Inneren hohl, weil dieser Bereich für die Tragfähigkeit und Stabilität nur eine geringe Rolle spielt.

# 1.1.3 Korrelation Herzschlag zur Größe von Lebewesen

Der Metabolismus von Lebewesen muss die biologischen Vorgänge aufrecht erhalten und zum Beispiel bei Warmblütern eine gewisse Körpertemperatur garantieren. Diese Körpertemperatur ergibt sich aus der verbrannten Nahrung im Vergleich zu dem Wärmeverlust des Körpers an die Umgebung. Letzteres hängt stark vom Oberfläche-zu-Volumen Verhältnis ab. Ein kleineres Tier hat ein großes Oberfläche-zu-Volumen Verhältnis im Vergleich zu einem großen Tier und damit einen sehr aktiven Metabolismus und große Herzschlagrate. Typischerweise kann ein Herz eine Million mal schlagen, was bei einer hohen Herzschlagrate eine kurze Lebensdauer bedingt. Eine Maus lebt deshalb nur wenige Jahre, während ein Elefant oder eine große Schildkröte sehr alt werden können.

# 1.1.4 Kapillareffekt zum Wasserhaushalt von Bäume

Versucht man mit einer Pumpe gegen die Schwerkraft von oben Wasser durch ein Rohr herauf zu pumpen, so kann man nur 10 Meter überwinden, da bei größeren Höhen die Gewichtskraft des Wasser ein Vakuum oberhalb des Wasserspiegels in dem Rohr erzeugt . Damit sollten Bäume nicht größer als 10 Meter werden. Dies wird nicht beobachtet. Hier wirkt der Kapillareffekt. Die Benetzung der Innenwand in einem Rohr, bzw. einer wasserführenden Kapillare unter der Rinde des Baums ist energetisch so günstig, dass Wasser gegen die Schwerkraft bis zu 100 Meter in die Spitzen eines Baumes gelangen kann.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 1.1.5 Herzschlag

Der Herzschlag wird von einer Reihe elektrische Impulse ausgelöst, die die Kontraktion der Muskeln antreiben. Diese elektrischen Signale wirken wie ein schwingender elektrischer Dipol, der am Körper außen abgeleitet und so sichtbar gemacht werden kann. Aus der Form dieser Ausschläge lässt sich ein gesunder Herzschlag überprüfen.

# 1.1.6 Nervenleitungen

Die Signalleitung entlang der Nervenbahnen erfolgt über elektrische Impulse. Hierbei entstehen Ladungen entlang der Zellmembranen durch eine Verschiebung von Natrium und Kaliumionen, die eine Spannung über die Zellmembran von 75 mV erzeugen. Dieser Spannungsunterschied breitet sich dann entlang der Nervenbahnen aus und erzeugt ein Signal an einem Rezeptor.

# 1.1.7 Farben von Schmetterlingen

Schmetterlingsflügel sind oftmals sehr farbenprächtig und schillern. Dies ist ein Interferenzeffekt, wie bei Seifenblasen. Sehr kleine Abstände zwischen den Lamellen der Schmetterlingsflügel erzeugen eine kohärente Überlagerung des reflektierten Lichtes der einzelnen Lamellen, die sich überlagern. Ein Farbeindruck entsteht.

# 1.2 Was ist Physik?

Physik ist die Wissenschaft, die sich mit der Erklärung der Natur beschäftigt. Durch ein Verständnis der physikalischen Zusammenhänge und Hintergründe sollen Ereignisse vorhersagbar gemacht werden, wie z.B. der Lauf der Gestirne. Auf der Basis dieser Erkenntnisse werden neue Anwendungen erschlossen, die Bestandteil moderner Technologien werden. Die Physik ist damit ein Motor des technischen Fortschritts.

Die Physik geht dabei oft von der Naturbeobachtung aus. Zunächst wird ein Vorgang durch Messen von Größen wie Länge, Zeit, Gewicht, Geschwindigkeit quantitativ erfasst. Danach versucht man diese Größen zueinander in Beziehung zu setzen um universelle Gesetzmäßigkeiten herauszufinden. Diese Naturgesetze sind allerdings nur eine formale Beschreibung der Naturbeobachtung, die fortlaufend durch weitere Experimente und Beobachtungen überprüft wird. Hierbei gilt das **Falsifizierungs-Prinzip**. Gelingt es einem Experiment ein Naturgesetz zweifelsfrei zu widerlegen, so ist dieses Naturgesetz ab diesem Zeitpunkt obsolet. So erhebt die Physik nicht den Anspruch Wahrheiten über die Natur zu produzieren, sondern bietet immer nur Theorien an, die im Rahmen ihrer Gültigkeitsgrenzen eine gute Beschreibung der Naturvorgänge darstellen.

Diese Aufklärung der Naturphänomene ist allerdings ein schwieriger Prozeß, da die Beobachtung oftmals von mehreren Naturgesetzen gleichzeitig bestimmt wird, so daß man eine einzelne Gesetzmäßigkeit nicht isoliert von anderen beobachten kann. Weiterhin erlaubt es die Entwicklung immer feinerer und genauerer Messaufbauten und Messinstrumente die Theorien der Physik immer besser überprüfen zu können. Dabei werden irgendwann Abweichungen zwischen Theorie und Experiment sichtbar, die neue Gedankengebäude erforderlich machen. Ein berühmtes Beispiel dafür ist die Entwicklung der Quantenmechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

# 1.3 Maßeinheiten der Physik

Das Messen eines Naturphänomens erfolgt immer in entsprechenden Einheiten.

# 1.3.1 Längen

Die Einheit für die Länge hatte sich in der Historie immer an natürlichen Größenskalen der menschlichen Erfahrung orientiert, wie der Elle, das Fuß etc. 1875 wurde jedoch das Meter als Einheit definiert, wobei die ursprüngliche Vorgabe war den 1/40.000.000 Teil des Erdumfangs zu nehmen. Dieser Urmeter aus einer Metalllegierung wurde danach in Paris aufbewahrt und zur Eichung entsprechender Maßstäbe herangezogen.

Ab 1983 ist allerdings die Möglichkeit Zeiten zu messen sehr weit fortgeschritten (siehe unten), so dass die Längenmessung sehr viel genauer wurde, wenn man sie auf eine Zeitmessung reduzierte. Da die **Lichtgeschwindigkeit** eine feste Naturkonstante ist, wurde die Einheit Meter auf die Strecke festgelegt, die ein Lichtblitz in 1/299792458 s durchläuft (siehe Abb. 1.3.1).

Größenskalen in der Natur reichen von  $10^{-18}$  m, einem Attometer, für die Ausdehnung eines Elektrons, bis zu  $3 \times 10^{25}$  m für die Ausdehnung des Weltalls.

# 1.3.2 Zeiten

Die Messung von Zeiten hatte historisch große Bedeutung, da es für die Navigation unerlässlich war eine genaue Zeitmessung durchführen zu können. Der Längengrad war nur dann eindeutig definiert, wenn man den Höchststand der

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 1.3.1:** Die Längenmessung wird auf eine Zeitmessung zurückgeführt bei der ein Lichtblitz eine Strecke L durchläuft.

Sonne zu Mittag mit der Zeit einer Uhr vergleicht. Reist man von Europa nach Amerika und stellt seine Uhr nicht nach, so ist der Zeitpunkt der Mittagssonne nach dieser Uhr immer später, je weiter man nach Westen fährt. Dieser Vergleich zeigt einem genau auf welchem Längengrad man sich befindet.

Nach den mechanischen Zeitmessern, waren elektronische Zeitmesser lange Zeit Standard. Hierbei wird ein Kristall in einem elektrischen Feld zu Schwingungen angeregt. Seine Eigenfrequenz gilt als Taktgeber einer Uhr. Die präzisesten Uhren sind allerdings **Atomuhren**, wie schematisch in Abb. 6.1.2 illustriert ist. Dies soll am Beispiel der Cäsiumuhr erläutert werden.

Ein Cäsiumatom besitzt ein magnetisches Moment, gleich einer Kompaßnadel. In einem inhomogenen Magnetfeld erfährt es je nach Orientierung eine anziehende bzw. abstoßende Kraft. Damit läßt sich mittels eines speziell gestalteten Magnetfeldes eine magnetische Linse erzeugen, ähnlich einer optischen Linse für Lichtstrahlen. Der Brennpunkt dieser Linse hängt von dem magnetischen Moment der Teilchen ab, die sie fokussieren soll. Dies ist analog zur Optik bei der der Brennpunkt in der Regel auch von der Wellenlänge oder Farbe des Lichts abhängt (chromatische Aberration).

In einem Ofen wird ein Atomstrahl aus Cäsiumatomen erzeugt, die eine erste magnetische Linse durchlaufen. In dem Brennpunkt der ersten Linse befindet sich ein Resonator, der bei der Einstrahlung eines elektromagnetischen Feldes passender Frequenz, das magnetische Moment dieser Cäsiumatome ändern kann (Hyperfeinstrukturaufspaltung  $F = 3 \rightarrow F = 4$ ). Damit ändert sich der Brennpunkt der zweiten magnetischen Linse und der Detektor, der in dem Brennpunkt der zweiten Linse sitzt, wird erreicht. Stimmt die Frequenz allerdings nicht, so bleibt das magnetische Moment des Cäsiumatoms konstant und die Atome werden auf einen Ort vor bzw. hinter dem Detektor fokussiert. D.h. das Detektorsignal bleibt klein. Koppelt man das Signal die-

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

ses Detektors mit dem Frequenzgenerator, der das elektromagnetische Feld im Resonator erzeugt, so erhält man ein Frequenznormal, das auf die Resonanzfrequenz 9192,631770 MHz des Übergangs im Cäsiumatom abgestimmt ist.



**Abbildung 1.3.2:** In einer Atomuhr dient ein Hyperfeinstrukturübergang in einem Cäsiumatom als Frequenznormal.

Die Einheit der Zeit ist die Sekunde entsprechend 1/9192631770 s der Schwingungsperiode der Cäsiumuhr.

## 1.3.3 Masse

Bei der Bestimmung der Masse wird der Vergleich zu einer Referenzmasse herangezogen. Die Einheit ist das Kilogramm, wobei ein **Urkilogramm** für die Eichung anderer Massen mittels Balkenwaage verwendet wird.

Es wurde auch versucht, das Kilogramm über die Masse eines einzelnen Atoms zu definieren. Hierzu muss ein Körper gefertigt werden, der eine definierte Anzahl von Atomen enthält. Der Abstand von Atomen in einem Kristall lässt sich mittels Röntgenbeugung gut bestimmen. Fertigt man einen Körper mit genau bekannter Ausdehnung, so kann man die Zahl der darin enthaltenen Atome aus dessen makroskopischer Geometrie ermitteln. Die Fertigungsmöglichkeiten für diesen Körper erreichen allerdings zur Zeit noch nicht eine Güte, die die Genauigkeit gegenwärtiger Massestandards überbietet.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 1.4 Messen physikalischer Größen

Das Messen physikalischer Größen ist ein Grundbestandteil der Physik, da nur der Vergleich zwischen einer Vorhersage und einer genauen Messung die Überprüfung von Modellen erlaubt. Je genauer eine Messung durchgeführt werden kann, desto kritischer lassen sich Hypothesen der Naturwissenschaften verifizieren oder falsifizieren.

# 1.4.1 SI-System, Umrechnung von Einheiten

Physikalische Größen werden in Einheiten gemessen. Das gültige Einheitensystem ist das **SI-System**(SI...Systeme Internationale) mit den Basiseinheiten **kg**, **m**, **s** für Massen, Längen und Zeiten.

Zehnerpotenzen können durch Wortzusätze ausgedrückt werden, um praktische abgeleitete Einheiten zu bekommen. So sind Potenzen kleiner als 1: *milli* für  $10^{-3}$ , *micro* für  $10^{-6}$ , *nano* für  $10^{-9}$  und *pico* für  $10^{-12}$ . Potenzen größer als 1 sind: *kilo* für  $10^3$ , *Mega* für  $10^6$ , *Giga* für  $10^9$  und *Tera* für  $10^{12}$ .

Das Umrechnen von Einheiten geschieht indem man die Einheiten formal mit in die Gleichung schreibt und sie dort durch den jeweiligen Umrechnungsfaktor ersetzt:

$$10\frac{\rm km}{\rm h} = 10\frac{1000\rm m}{\rm 60\rm min} = 10\frac{1000\rm m}{\rm 60\cdot 60\rm s} = \frac{10000\rm m}{\rm 3600\rm m} = 2.7\frac{\rm m}{\rm s}$$
(1.4.1)

# 1.4.2 Messgenauigkeit und Messfehler

## Messfehler

Jede Messung ist mit einem Fehler behaftet. Man unterscheidet prinzipiell zwei Sorten von Fehlern:

## • systematische Fehler

Systematische Fehler entstehen zum Beispiel durch die Verwendung eines falschen Maßstabes, d.h. ein Metermaß ist in Wahrheit nicht genau ein Meter lang. Somit ergeben alle Messungen einen Wert, der um einen konstanten Faktor von der Wahrheit abweicht. Ein weiteres Beispiel ist die Nicht-Berücksichtigung von Effekten wie Magnetfeldern, Fehlern in der Experimentkonzeption etc.

Bei systematischen Fehlern sind alle Messungen in *gleicher* Weise betroffen, und die unendliche Wiederholung einer Messung verbessert nicht die Güte der Vorhersage.

#### • statistische Fehler

Statistische Fehler entstehen durch Schwankungen in der Durchführung einer Messung. Durch häufiges Wiederholen einer Messung läßt sich der statistische Fehler reduzieren.

Bei statistischen Fehlern geht von einer Unabhängigkeit der einzelnen Messungen untereinander aus. Als Ergebnis von einer Vielzahl von Messungen, erwartet man eine so genannte Gauß'sche Normalverteilung:

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
(1.4.2)

mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$ . Die Funktion H(x) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Messwert x zu messen. Im Wertebereich  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  liegen zum Beispiel 68% der Messungen, im Wertebereich  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$  95%.

Die Behandlung statistischer Fehler sei im folgenden diskutiert. Betrachten wir zunächst N Messungen einer Größe x. Der Mittelwert  $\langle x \rangle$  (alternative Schreibweise  $\bar{x}$ ) dieser Messungen ergibt:

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.4.3}$$

Aus den Messungen läßt sich die so genannte Standardabweichung  $\sigma$  einer einzelnen Messung sowie die des Mittelwertes  $\sigma_m$  ableiten als:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}$$
(1.4.4)

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - x_i)^2}$$
(1.4.5)

Man erkennt, daß die Standardabweichung einer Einzelmessung  $\sigma$  mit der Standardabweichung des Mittelwertes  $\sigma_m$  verknüpft ist durch:

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma \tag{1.4.6}$$

D.h. falls eine einzelne Messung 5% Fehler ( $\sigma$ ) hat, so benötigt man 100 Messungen um den Fehler für den Mittelwert ( $\sigma_m$ ) auf 0.5% zu reduzieren.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

#### KAPITEL 1. EINLEITUNG

Zahl	signifikante Stellen	Nachkommastellen
1.234	4	3
0.0045	2	4
9876000	4  oder  7	0
2300.0	4	1

## Angabe von Messfehlern

Bei der Angabe von Ergebnissen von Messungen ist es wichtig nicht nur den Mittelwert einer Reihe von Messungen sondern auch den Fehler dieser Messung korrekt anzugeben. Wichtig sind hierbei die *signifikanten* Stellen. Diese besagen wie aussagekräftig das Ergebnis ist. Eine einzelne Messung kann bis zu einer bestimmten Nachkommastelle einen Wert ermitteln. Die Anzahl der Nachkommastellen hängt von der Ablesegenauigkeit und der Güte des Messinstrumentes und Messverfahrens ab. Die signifikanten Stellen sind dann zum Beispiel:

Bei der Zahl 9876000 ist die Angabe der signifikanten Stellen bei dem Betrachten der Zahl nicht eindeutig. Entweder es wurde genau 9876000 gemessen, dann sind es 7 signifikante Stellen. Oder es wurde nur 9876  $\pm 500$  gemessen, dann sind es 4 signifikante Stellen.

Wichtig werden die signifikanten Stellen bei der Addition und Subtraktion von Messwerten, wie es für die Mittelwertbildung wichtig ist. Bildet man zum Beispiel den Mittel wert von 1.3 und 1.54 so ergibt sich mathematisch 1.42, die Anzahl der signifikanten Stellen des Mittelwertes ist aber immer diejenige von dem Messwert mit der geringsten Anzahl an signifikanten Stellen, d.h. der Mittelwert muss als 1.4 angegeben werden. Mathematisch betrachten wir 1.3 als 1.30 bei der Mittelwertbildung, allerdings wissen wir nicht ob die Messung genau 1.30 ergeben hat. Dies müssen wir im Endergebnis ausdrücken. Es lassen sich zwei Faustformeln aufstellen:

- *Addition/Subtraktion:* Das Ergebnis einer Addition/Subtraktion bekommt genauso viele Nachkommastellen wie die Zahl mit den wenigsten Nachkommastellen.
- *Multiplikation/Division:* Das Ergebnis einer Multiplikation/Division bekommt genauso viele signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen.

Das Ergebnis lässt sich jetzt als absoluter oder relativer Fehler angeben:

• absoluter Fehler:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \tag{1.4.7}$$

wie z.B.  $t = 6.30 \pm 0.01s$ 

• relativer Fehler:

$$x = \langle x \rangle \left( 1 \pm \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \right) \tag{1.4.8}$$

wie z.B.  $t = 6.30 \text{ x} (1 \pm 0.02 \%)$ . Relative Fehler sind bei der Bewertung von Messungen, die sich über mehrere Größenordnungen erstrecken nicht unkritisch. Misst man zum Beispiel Geschwindigkeiten zwischen 1000 m/s und 0.1 m/s und betrachtet man einen Fehler von 10%, besagt diese Aussage, dass die Geschwindigkeit 0.1 m/s  $\pm$  0.01 m/s gemessen wurde. Diese Genauigkeit kann aber schon längst im Bereich des absoluten Fehlers der Messmethode liegen.

### Fehlerfortpflanzung

Neben den Fehlern der einzelnen Messgrößen ist es aber auch wichtig den Fehler von abgeleiteten bzw. zusammengesetzten Größen zu kennen. So lässt sich eine Geschwindigkeit aus einer Kombination einer Strecken- und einer Zeitmessung bestimmen. Diese beiden Messungen haben ihren eigenen Fehler, was ist aber der Fehler der Geschwindigkeit? Dafür gibt es einfache Regel. Die Geschwindigkeit ist zum Beispiel eine Funktion von Weg und Zeit:

$$v = \frac{x}{t} = f(x, t)$$
 (1.4.9)

Allgemein gilt für den Fehler von zusammengesetzten Größen. Bei einer Funktion  $f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_K)$  die von K Größen  $x_j$  abhängt gilt für den Fehler:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{j}^{K} \left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} \Delta x_j\right)^2} \tag{1.4.10}$$

Für das Beispiel der Geschwindigkeit bedeutet dies:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\Delta t\right)^2}$$
(1.4.11)

oder

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\Delta v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\Delta x\right)^2 + \left(-\frac{x}{t^2}\Delta t\right)^2} \tag{1.4.12}$$

# Kapitel 2

# Mechanik

Die Mechanik beschreibt die Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Das Verständnis dieser Zusammenhänge und die Vorhersage von z.B. der Flugbahn eines Körpers auf der Erde, sei es ein Ball, Pfeil oder Kanonenkugel war schon historisch von herausragender Bedeutung. Die Anfänge der Mechanik wurden von Galileo (1564-1642) gelegt, der als der erste Experimentalphysiker gelten kann, da er durch Versuche herausgefunden hat, daß alle Körper unter dem Einfluss der Schwerkraft eine Beschleunigung erfahren, die unabhängig von Form und Masse des Körpers ist. Dies war entgegen der Lehrmeinung, die auf der Idee von Aristoteles (384 - 322 v. Chr.) beruhte, der die *gleichförmige* Bewegung eines Körpers als das Ergebnis des Gleichgewichts zwischen Antrieb und Widerstand auffasste. Nach diesem Bild war erklärlich, warum z.B. ein Schiff, das schneller fahren sollte, eine Mannschaft benötigt, die stärker rudert. Mit diesem Bild konnte Aristoteles allerdings nicht den Fall eines Objektes eindeutig beschreiben, da unklar bleibt ob die beobachtete Beschleunigung durch einen größeren Antrieb oder einen geringeren Widerstand hervorgerufen wurde.

# 2.1 Mechanik eines Massenpunktes

Im folgenden sollen die Grundzüge der Mechanik zur Beschreibung sich bewegender Objekte erläutert werden. Eine typische Problemstellung ist der Wurf eines Objektes, bei dem man fragen könnte: Wie muß ich werfen, um die größte Weite zu erzielen? Macht es einen Unterschied, ob ich den Körper auf der Erde werfe oder auf dem Mond? Welches Ergebnis erhalte ich, wenn ich den Körper aus einem fahrenden Zug werfe?

# 2.1.1 Bewegung eines Massenpunktes

### Bewegung in einer Dimension

Beschränken wir uns zunächst auf Bewegungen in einer Dimension x (siehe Abb. 2.1.1).

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1.1}$$

Die Bewegung entspricht der Verschiebung des Ortes um  $\Delta x$  in einem Zeitraum  $\Delta t$ .



Abbildung 2.1.1: Ort x im Eindimensionalen.

Aus der Art dieser Verschiebung lassen sich jetzt mehrere Größen ableiten.

#### • mittlere Geschwindigkeit

Die mittlere Geschwindigkeit ist definiert als die Änderung  $\Delta x$  des Ortes pro Zeitraum  $\Delta t$ 

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.1.2}$$

Diese Geschwindigkeit kann positiv oder negativ sein, je nachdem ob  $\Delta x$  ein positives oder negatives Vorzeichen hat.

## • momentane Geschwindigkeit

Die momentane Geschwindigkeit erhält man, wenn man den Grenzfall kleiner Zeiträume  $\Delta t$  betrachtet:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$
(2.1.3)

Diese momentane Geschwindigkeit entspricht der Ableitung des Ortes nach der Zeit.



Abbildung 2.1.2: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

### • mittlere Beschleunigung

Nach demselben Muster läßt sich die mittlere Beschleunigung definieren als der Unterschied in der Geschwindigkeit pro Zeitraum  $\Delta t$ :

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.1.4}$$

## • momentane Beschleunigung

Auch hier entspricht der Grenzwert kleiner Zeiträume  $\Delta t$  der momentanen Beschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$
(2.1.5)

Der Zusammenhang zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung läßt sich auch kompakter schreiben:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$
(2.1.6)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Beschleunigung ist somit die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Ein typischer Zusammenhang zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung ist in Abb. 2.1.2 gezeigt.

Im folgenden wollen wir den Sonderfall einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung auf zwei Arten betrachten:

#### • Ableitung über mittlere Größen

Die Beschleunigung sei konstant. D.h. die Änderung der Geschwindigkeit von  $v_0$  auf v in einem Zeitraum t ( $t_0 = 0$ ) ist:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t} \tag{2.1.7}$$

Dies läßt sich auflösen zu:

$$v = v_0 + at$$
 (2.1.8)

Die mittlere Geschwindigkeit ist:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.1.9}$$

Aufgelöst nach dem Ort x ergibt sich:

$$x = x_0 + v_m t (2.1.10)$$

mit der mittleren Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{1}{2} \left( v_0 + v \right) \tag{2.1.11}$$

ergibt sich schließlich der Ausdruck:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2.1.12}$$

## • Ableitung über Integration

Als alternative Ableitung gehen wir von der allgemein gültigen Beziehung

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.1.13}$$

aus. Zunächst integrieren wir beide Seiten über die Zeit und erhalten.

$$\int_{0}^{t} a dt = \int_{0}^{t} \frac{d^2 x}{dt^2} dt$$
 (2.1.14)

$$at = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-v} + c_1 \tag{2.1.15}$$

mit der Integrationskonstanten  $c_1$ . Mit der Anfangsbedingung  $v(t = 0) = v_0$  ergibt sich  $c_1 = -v_0$ . D.h. man bekommt:

$$at = \frac{dx}{dt} - v_0 \tag{2.1.16}$$

Wir integrieren ein zweites Mal

$$\int_{0}^{t} at = \int_{0}^{t} \frac{dx}{dt} dt - \int_{0}^{t} v_{0} dt \qquad (2.1.17)$$

und bekommen

$$\frac{1}{2}at^2 = x + c_2 - v_0t \tag{2.1.18}$$

mit der Integrationskonstanten  $c_2$ . Mit der Anfangsbedingung  $x(t = 0) = x_0$  ergibt sich  $c_2 = -x_0$ . D.h. man bekommt schließlich:

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \tag{2.1.19}$$

Man erkennt, daß beide Wege zu dem identischen Ergebnis führen. Die Variation von x, v und a nach Gl. 2.1.19 erfolgt wie in Abb. 2.1.3 veranschaulicht.

Die quadratische Abhängigkeit des Ortes von der Zeit läßt sich in einem einfachen Experiment veranschaulichen, wie es schon Galilei durchgeführt hat. Man hängt vier Kugeln in quadratischem Abstand an einer Schnur. Läßt man diese Kugeln gleichzeitig zu Boden fallen, so kommen sie in *regelmäßigen* Abständen am Boden an, wie in Abb. 2.1.4 veranschaulicht ist.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.1.3: Variation von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit der Zeit.

## Einschub - Vektorrechung

Bevor wir die Bewegung m drei-dimensionalen beschreiben, wollen wir kurz die Benutzung von Vektoren im kartesischen Koordinatensystem einführen.

• Definition

Ein Vektor ist durch seine drei Komponenten x, y und z definiert.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
(2.1.20)

oder

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{2.1.21}$$

#### • Länge eines Vektors

Die Länge oder Betrag eines Vektors berechnet sich zu:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.1.22}$$

#### • Addition zweier Vektoren

Zwei Vektoren werden addiert, indem beide Vektoren aneinander gesetzt werden:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \tag{2.1.23}$$



Abbildung 2.1.4: Freier Fall. Hängt man vier Kugeln in quadratischem Abstand zum Boden auf und läßt diese dann fallen, so kommen sie in regelmäßigen Zeitabständen am Boden an.

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$
(2.1.24)

Als Beispiel für die Addition von Vektoren sei ein Flugzeug gegeben, das sich mit einer Geschwindigkeit bezüglich einer Luftströmung bewegen kann. Die resultierende Bewegungsrichtung des Flugzeugs relativ zum Boden ist die Summe der Vektoren der Windgeschwindigkeit und der Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs.

#### • Subtraktion zweier Vektoren

Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem die Spitzen aneinander gesetzt werden, gemäß:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \tag{2.1.25}$$

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$
(2.1.26)

#### • Vektor mit Zahl multiplizieren

Multipliziert man einen Vektor mit einer Zahlkso bekommt man eine Streckung des Vektors:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\vec{r} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$
(2.1.27)

#### • Skalarprodukt

Das Skalarprodukt entspricht der Projektion zweier Vektoren aufeinander. Das Ergebnis des Skalarproduktes ist eine Zahl.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \Phi \tag{2.1.28}$$

 $\operatorname{oder}$ 

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{2.1.29}$$

Das Skalarprodukt ist *kommutativ*, d.h. es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{2.1.30}$$

Ein Skalarprodukt wird immer verwendet um einen Ausdruck bezüglich einer Richtung zu erhalten. Ein Beispiel ist die Arbeit als das Skalarprodukt aus Kraft mal Weg. Erfolgt der Weg senkrecht zur wirkenden Kraft, so muß keine Arbeit geleistet werden.

#### • Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt entspricht dem Flächeninhalt des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Das Ergebnis ist ein Vektor  $\vec{c}$ , der senkrecht auf der Ebene steht die die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufspannen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \tag{2.1.31}$$

Hierbei gilt die **Rechte-Hand-Regel**, d.h. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger ergeben ein Dreibein entsprechend den Richtungen von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ .

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \Phi \tag{2.1.32}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$
(2.1.33)

Es gilt zu beachten, daß das Kreuzprodukt $\mathit{nicht}\ \mathit{kommutativ}$ ist. D.h. es muß gelten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{2.1.34}$$

Ein Beispiel für das Kreuzprodukt sei das Drehmoment als Kreuzprodukt aus Kraft und Hebelarm. Dieses Drehmoment wird maximal wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

## Bewegung in mehreren Dimension

Betrachten wir die beschleunigte Bewegung im dreidimensionalen (Abb. 2.1.6). Wir beginnen mit:



Abbildung 2.1.5: Ortsvektor  $\vec{r}$  und Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  beschreiben die Bahn eines Körpers im dreidimensionalen Raum.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} \tag{2.1.35}$$

Aufgelöst nach den einzelnen Koordinaten des Ortsvektors ist dies  $\ddot{x} = a_x$ ,  $\ddot{y} = a_y$  und  $\ddot{z} = a_z$ . Integriert man Gl. 2.1.35, so bekommt man

$$\int \ddot{\vec{r}} dt = \dot{\vec{r}} = \vec{v} \tag{2.1.36}$$

Damit wird die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \int \vec{a}dt = \vec{a}t + b$$
 (2.1.37)

b ist die Integrationskonstante, die man aus der Anfangsbedingung ableitet: die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 0. Das Integral beschreibt die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit durch die Beschleunigung a über einen Zeitraum t. Man bekommt  $b = \vec{v}_0$  und damit:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v_0} \tag{2.1.38}$$

Dieselbe Integration läßt sich nochmal durchführen

$$\vec{r} = \int \vec{v}dt = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v_0}t + c \qquad (2.1.39)$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Auch hierbei entsteht eine Integrationskonstante c, die sich aus der Anfangsbedingung, dem Ort zum Zeitpunkt t = 0 ableiten läßt. Man bekommt  $c = \vec{r_0}$  und damit:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0 \tag{2.1.40}$$

Nach Komponenten aufgelöst ergibt sich:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0,x} t + x_0 \qquad (2.1.41)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}a_yt^2 + v_{0,y}t + y_0 \qquad (2.1.42)$$

$$z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0,z} t + z_0 \qquad (2.1.43)$$

Wir wollen jetzt zwei Beispiele für eine beschleunigte Bewegung diskutieren:

#### • der freie Fall

Wir betrachten eine Kugel die in z-Richtung von einer Höhe h herunterfällt, wie in Abb. 2.1.6 illustriert. Die konstante Beschleunigung ist  $a_z = -g$  und  $a_x = 0, a_y = 0$ . Die Anfangsgeschwindigkeit sei  $v_0 = 0$ und  $x_0 = 0, y_0 = 0$  und  $z_0 = h$ . Daraus bekommt man die Gleichung:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{2.1.44}$$

Der Ball trifft auf den Boden für z = 0. D.h. man bekommt für die Fallzeit t

$$t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} \tag{2.1.45}$$

#### • der schräge Wurf

Betrachten wir den schrägen Wurf als die Trajektorie eines geworfenen Balles. Hierbei läßt sich der Abwurfwinkel und die Geschwindigkeit des Balles durch den Werfer kontrollieren. Doch bei welcher Einstellung kommt er am weitesten? Oder unter welchem Winkel muß er den Ball abwerfen, damit er bei gegebener Abwurfgeschwindigkeit ein Ziel erreicht? Das läßt sich jetzt berechnen und vorhersagen. Betrachten wir dazu die Abb. 2.1.7.



Abbildung 2.1.6: Freier Fall.

Ein Werfer habe die Höhe h und wirft einen Ball unter einem Winkel  $\phi$  zum Erdboden, mit der Geschwindigkeit  $v_0$  ab. Die Anfangs-Geschwindigkeit entlang des Erdbodens ist  $v_{0x}$  und entlang der z-Koordinate  $v_{0z}$ . Die Erdbeschleunigung wirke in z-Richtung. Sie zeigt nach unten  $a_{\text{Erdbeschleunigung}} = -g$ . Mit diesen Anfangsbedingungen läßt sich Gl. 2.1.40 für die drei Koordinaten schreiben als:

$$x = v_{0x}t$$
 (2.1.46)

$$y = 0$$
 (2.1.47)

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h (2.1.48)$$

Diese Gleichungen beschreiben jetzt, wie sich der Ort  $\vec{r} = (x, y, z)$  des Balls mit der Zeit ändert. Aus diesen Gleichungen läßt sich  $t = \frac{x}{v_{0x}}$ eliminieren und man bekommt einen Zusammenhang zwischen z und xvon:

$$z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x + h$$
(2.1.49)

Man erkennt das die Höhe der Wurfbahn proportional zum Quadrat des Ortes auf dem Erdboden ist. Man spricht deshalb von einer **Wurfparabel**. Mit dieser Gleichung lassen sich die Fragen von oben jetzt beantworten.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.1.7: Der schräge Wurf von einer Höhe h.

Unter welchem Winkel wirft man am weitesten?
Am höchsten Punkt der Wurfparabel fliegt der Körper waagerecht zum Erdboden, d.h. die Steigung der Kurve z(x) auf Gl. 2.1.52 ist
Dies entspricht mathematisch der Bedingung:

$$\frac{dz}{dx} = 0 = -\frac{g}{v_{0x}^2}x + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$$
(2.1.50)

Der Scheitelpunkt  $x_s$  der Wurfparabel ist damit:

$$x_s = \frac{v_{0x}v_{0z}}{g} = \frac{v_0^2 \cos\phi \sin\phi}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\phi \qquad (2.1.51)$$

Die größte Weite für den Scheitelpunkt erhält man wenn man den Ball unter 45° abwirft. Falls die Höhe h Null ist, erreicht man unter 45° auch die größte Weite.

- Wie weit wirft man?

Der Auftreffpunkt ist definiert für den Ort  $z(x = x_W) = 0$ . Damit ergibt sich aus Gl. 2.1.52:

$$0 = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}x_W^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x_W + h$$
(2.1.52)

Dies läßt sich nach  $x_W$  auflösen zu:

$$x_W = \frac{v_{0x}v_{0z}}{g} \pm \left[ \left( \frac{v_{0x}v_{0z}}{g} \right)^2 + \frac{2v_{0x}^2}{g} h \right]^{1/2}$$
(2.1.53)

Nur das "+"-Zeichen ergibt hier eine sinnvolle Lösung. Ersetzt man  $v_{0z}v_{0x} = \frac{1}{2}v_0^2 \sin 2\phi$  so bekommt man schließlich:

$$x_W = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\phi \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \phi} \right)^{1/2} \right]$$
(2.1.54)

Für h = 0 wird  $x_w = 2x_s$ . Für beliebige Werte von h muß man den Ausdruck 2.1.54 für eine Variation von  $\phi$  maximieren. Typische Trajektorien sind in Abb. 2.1.8 gezeigt.



Abbildung 2.1.8: Der schräge Wurf. Ist die Abwurfhöhe die selbe wie die Landehöhe, so ist der optimale Winkel 45 Grad. Wirft man von einem erhöhten Punkt ab, so ist der optimale Winkel etwas kleiner.

Der schräge Wurf läßt sich gut als Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung und einer beschleunigten Bewegung veranschaulichen. Die Bewegung nach Koordinaten aufgelöst war:

$$x = v_{0x}t$$
 (2.1.55)

$$y = 0$$
 (2.1.56)

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h \qquad (2.1.57)$$

Die Anteile in x und z mit  $v_{0x}$  und  $v_{0z}$  entsprechen der gradlinigen Bewegung. D.h. wirkt keine Beschleunigung, so erfolgt eine gradlinige Bewegung in der entsprechenden Richtung. Dem überlagert ist die Beschleunigung gemäß g.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 2.1.2 Kräfte

## Die Newton'schen Axiome

Bislang haben wir immer die Beschleunigung eines Körpers als gegeben betrachtet. Die Ursache für die Beschleunigung sind **Kräfte**. **Newton** postulierte das die Ursache für diese Kräfte die **Wechselwirkung** dieser Körper untereinander ist. So ist die Schwerkraft eine Wechselwirkung zwischen der Masse eines Körpers und der Masse der Erde. Neben dieser Gravitationskraft gibt es die elektrostatische Kraft und die starke Wechselwirkung, die die Atomkerne zusammenhält.

## Knie

Ein Beispiel für das Wirken von Kräften in der Biologie ist der Angriffspunkt von Muskeln über die Sehne an dem Bewegungsapparat. Bei einem Knie, leitet die Kniescheibe die Kraft der Oberschenkelsehne so um, dass ein effektives Heben des Beines möglich ist. Bei dem Oberarmmuskel greift der Oberarmmuskel an dem Unterarm an um ihn zu heben. Der Angriffspunkt liegt aber sehr viel näher an dem Ellenbogengelenk als die Gewichtskraft, die zum Beispiel an der Hand zieht. Hier sind Hebelgesetze notwendig.



 $\label{eq:mechanik} Mechanik \ des \ Arms \ und \ des \ Knies. \ Quellen: \ leifiphysik, \ endoprothestic.guide$ 

Auch eine Kraft wird als Vektor beschrieben, da sie die Richtung der entsprechenden Beschleunigung vorgibt. Am Beispiel der Schwerkraft soll dies erläutert werden. Die Erde läßt sich als Massenpunkt mit Masse M beschreiben, der im Zentrum eines Koordinatensystems sitzen soll. Am Ort  $\vec{r}$  befindet sich ein Körper der Masse m. Die Erde übt eine Schwerkraft entsprechend einer Gravitationskonstante G aus mit:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
(2.1.58)

D.h. in dem zentral-symmetrischen Problem des Schwerefeldes der Erde

zeigt die Schwerkraft auf einen Körper am Ort  $\vec{r}$  immer entgegen der Richtung des Ortsvektors  $\vec{r}$ . Diese Schwerkraft kann man als kugelsymmetrisches **Kraftfeld** auffassen, das die Erde umschließt und dessen Stärke quadratisch mit dem Abstand abnimmt.

Die Verknüpfung zwischen Kraft und Beschleunigung hat Newton in seinen drei Axiomen dokumentiert:

### • 1. Axiom

Solange keine Kraft wirkt, verharrt ein Körper in Ruhe oder bei seiner gleichförmigen gradlinigen Bewegung. Diese Bewegung sei durch die Größe **Impuls** beschrieben als:



Abbildung 2.1.9: Beschleunigung eines Wagens der Masse m über ein Gewicht.

#### • 2. Axiom

Die Ursache für eine Impulsänderung ist das Wirken einer Kraft. Diese Kraft wird definiert als:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \left[kg\frac{m}{s^2}\right] \tag{2.1.60}$$

Die Einheit in der Kräfte gemessen werden ist **Newton**:

$$1N = kg\frac{m}{s^2} \tag{2.1.61}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

mit der Definition des Impulses bekommen wir:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}mv = m\frac{d\vec{v}}{dt} + v\frac{d\vec{m}}{dt}$$
(2.1.62)

In den meisten Fällen ist m=const. (Gegenbeispiel Rakete), so daß gilt:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1.63}$$

Newton hatte bei der Verknüpfung von Kraft und Beschleunigung die Masse als Proportionalitätskonstante identifiziert. D.h. möchte man die gleichförmige gradlinige Bewegung eines Körpers ändern, so muß man bei größerer Masse auch eine größere Kraft aufwenden. Die Eigenschaft eines Körpers eine gleichförmige gradlinige Bewegung beizubehalten bezeichnet man auch als **Trägheit**. Die Masse kann als Grund für die Trägheit angesehen werden und man bezeichnet sie deshalb auch als **träge Masse**.

Kräfte sind vektorielle Größen für die das **Superpositionsprinzip** gilt. Bei jedem Massenpunkt, der in Ruhe ist bzw. sich gleichförmig geradlinig bewegt, muß die Summe der Vektoren der angreifenden Kräfte Null sein. Im folgenden wollen wir zwei Beispiele für das Superpositionsprinzip diskutieren:

## – Kräftedreieck

Als Beispiel, sei ein Massenpunkt betrachtet auf den drei Kräfte wirken, wie in Abb. 2.1.10 illustriert. Die drei Kräfte stehen in einem Verhältnis von 5:4:3. Nachdem der Massenpunkt in Ruhe ist, müssen sich die drei Kräfte zu Null addieren. Dies ist dann der Fall, wenn der Winkel zwischen dem Vektor der Länge 3 und dem der Länge 4 genau 90° beträgt, da  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .

#### – Ziehen eines Schlittens

In einem zweiten Beispiel betrachten wir einen Schlitten der Masse m, der unter einem Winkel  $\Theta$  mit einer Kraft F ( $F = |\vec{F}|$ ) über eine Ebene gezogen wird, wie in Abb. 2.1.11 illustriert. Wir lösen die Kräfte in die x- und y-Richtung auf.

Nachdem die Schwerkraft nur in y-Richtung wirkt haben wir in x-Richtung:

$$F\cos\Theta = ma_x \tag{2.1.64}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.1.10: Kräfte als Vektoren.



Abbildung 2.1.11: Kräfte als Vektoren, Ziehen eines Schlittens.

in y-Richtung haben wir die Gravitationskraft  $F_G$ :

$$-F_q + F_{Normal} + F\sin\Theta = 0 \qquad (2.1.65)$$

In y-Richtung soll sich der Schlitten *nicht bewegen*, d.h. die Summe der Kräfte muß Null ergeben. Dies läßt sich mit einem Kunstgriff erzielen indem man eine neue Kraft einführt, die **Normalkraft**  $F_{normal}$ . Die Normalkraft ist eine Kraft, die die Unterlage auf den Schlitten ausübt. Sie stellt sich so ein, daß die Summe der Kräfte in y-Richtung immer Null ist.

# • 3. Axiom

Falls nur zwei Körper 1 und 2 miteinander in Wechselwirkung treten, so muß die Kraft auf den einen Körper 1 entgegengesetzt der Kraft auf den anderen Körper 2 sein:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

## Gecko

Ein Gecko kann sich durch elektrostatische Kräfte an vielen Oberflächen halten. Das Geheimnis sind die sehr verformbaren Fußoberflächen, die sehr kleine Abstände auf der atomaren Skala zu einer Unterlage herstellen können. Dadurch wirken Dipol-Dipolkräfte zwischen den Oberflächen und eine Haftung erfolgt.



Gecko. Quelle: Welt der Physik

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2} \tag{2.1.66}$$

Newton entwickelte dieses Gesetz aus der Vorstellung einer **Wechselwirkung**, die alle Körper zueinander in Bezug setzt. Diese Wechselwirkung ist zunächst eine *Fernwirkung*, die ohne scheinbaren Kontakt der Körper untereinander zu einer Kraft führt. Dies war eine sehr weitreichende Vorhersage, die erst in der modernen Physik des 20ten Jahrhundert bestätigt wurde. Vier Arten von Wechselwirkung unterscheidet man in der Natur:

- Die Gravitationskraft, als die Kraft, die durch Anziehung der Massen zweier Körper entsteht.
- Die *elektrostatische Kraft*, als die Kraft, die Ladungen aufeinander ausüben.
- Die starke Kernkraft, die den Zusammenhalt von Nukleonen im Atomkern vermittelt.

- Die schwache Kraft, die bei dem <br/>  $\beta$ -Zerfall von radioaktiven Kernen sichtbar wird.

Das 3. Newton'sche Axiome bezieht sich immer auf *zwei* Körper. Es bildet sich immer ein **Kraft-Gegenkraft-Paar**. Die Normalkraft, die auf den Schlitten in obigem Beispiel wirkt, ist kein Kraft-Gegenkraft-Paar, da die Kräfte auf dasselbe Objekt wirken. Ein Kraft-Gegenkraft-Paar wäre dagegen die Anziehungskraft, die die Erde auf den Schlitten ausübt, aber auch die Anziehungskraft, die der Schlitten auf die Erde ausübt. Dies ist in Abb. 2.1.12 illustriert.



Abbildung 2.1.12: Kräfte-Gegenkraft-Paare.

Die Folgen des 3. Newton'schen Axioms lassen sich vielfach darstellen. Betrachtet man zum Beispiel zwei, durch ein Seil verbundene Körper, so führt das Ziehen an dem Seil zu einer Kraft und Gegenkraft auf beide Körper. D.h. beide bewegen sich entsprechen  $m_1a_1 = -m_2a_2$ . Dies ist in Abb. 2.1.13 illustriert.



Abbildung 2.1.13: Versuch Zugwagen.

Die Newton'schen Axiome lassen sich am Beispiel des Kettenkarussells illustrieren. Betrachten wir ein Kettenkarussell, an dem sich eine Gondel

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum
mit der Masse M befindet und das sich mit einer bestimmten Frequenz im Kreis bewegt. Nehmen wir an, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Kette versagt und die Gondel zu Boden fällt. In welche Richtung geschieht das? In Abb. 2.1.14 sind 4 mögliche Varianten illustriert, von denen nur eine zutrifft.



Abbildung 2.1.14: In welche Richtung fällt eine Gondel eines Kettenkarussells, wenn die Kette versagt?

Die Gondel bewegt sich auf ihrer Kreisbahn mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Falls diese Gondel nicht durch die Kette an das Karussell gebunden wäre, würde sie sich auf Grund ihrer Trägheit gradlinig in Richtung des momentanen Geschwindigkeitsvektors bewegen. D.h. nur die Variante 4 in Abb. 2.1.14 ist korrekt.

## Beispiel für Kräfte

Im folgenden seien einige Beispiel für Kräfte illustriert. Die **Gravitationskraft** entsteht durch die Anziehung zweier Massen, wie in Abb. 2.1.15 illustriert. Sie skaliert mit den Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und dem Abstand r wie:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \tag{2.1.67}$$

mit  $\hat{r}$  dem Einheitsvektor, der die Massen  $m_1$  und  $m_2$  verbindet. G ist die Gravitationskonstante mit  $G=6.67 \ 10^{-11} \ \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$ . Für Phänomene an der

## Kraftmikroskopie von DNA

DNA kann mittels eine Kraftmikroskop sichtbar gemacht werden. Hierbei wird eine kleine Spitze an eine Oberfläche angenähert und die abstoßende Wechselwirkung der Atome der Nadel und der Atome der DNA führen zu einer Kraftwirkung. Diese Wirkung ist sehr klein, kann aber über die Ablenkung eines reflektierten Laserstrahls an der Oberseite der Abtastnadel sichtbar gemacht wird. Das Geheimnis dieser Mikroskope ist weniger die Abbildungstechnik als die perfekt erschütterungsfreie Montage von Probe und Abtastnadel sowie das atomar genaue Verfahren der Spitze und der Probe. Letzteres gelingt über kleine Piezomotoren, bei denen ein elektrisches Feld einen Kristall, den Piezo, auf der atomaren Skala verzerrt.



Kraftmikroskopie von DNA. Quelle: Protocol.io, Cell Press

Erdoberfläche läßt sich das Gravitationsgesetz kompakter schreiben indem man für  $m_1$  die Masse der Erde und für r den Radius der Erde einsetzt. Man bekommt dann:

$$\vec{F} = m_1 \vec{g} \tag{2.1.68}$$

# mit der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ und $|\vec{g}|=9.81 \text{ ms}^{-2}$

Die **Federkraft** entsteht durch die elastischen Eigenschaften vieler Festkörper. Dehnt oder staucht man ein Material, so wirkt eine rückstellende Kraft, die in erster Näherung linear mit der Auslenkung größer wird, wie in Abb 2.1.16 illustriert ist:

$$F = -c\Delta x \tag{2.1.69}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.1.15: Die Gravitationskraft beschreibt die Anziehung zweier Massen m und M.



Abbildung 2.1.16: Die Federkraft beschreibt die rückstellende Kraft bei der Auslenkung einer Feder von der Ruhelage x = 0.

#### mit c der **Federkonstanten**.

Die **Normalkraft** ist eine Kraft, die eine Unterlage auf einen Körper ausübt, damit dieser sich nur in der Ebene dieser Unterlage bewegen kann, wie in Abb. 2.1.17 illustriert.

Bei der **Reibungskraft** kann man zwei Fälle unterscheiden: Haftreibung und Gleitreibung. Reibung entsteht durch die Verzahnung zweier Oberflächen untereinander. In erster Näherung ist die Kontaktfläche im mikroskopischen Sinn proportional zur Kraft, die die beiden Körper aneinander presst. Diese Kraft ist die Normalkraft. Bewegt man jetzt den Körper parallel zu der Unterlage, so entsteht eine bremsende Kraft, die proportional zur Normalkraft ist, aber *parallel* zur Oberfläche zeigt, während die Normalkraft *senkrecht* zur Oberfläche zeigt.

Abb. 2.1.18 zeigt die Variation dieser Bremskraft für den Fall, daß wir einen Körper mit einer kontinuierlich sich erhöhenden Kraft beginnen zu ziehen. Im Bereich der Haftreibung erhöht sich die Bremskraft im gleichem Maße wir die ziehende externe Kraft. D.h. der Körper bleibt in Ruhe. Ab



Abbildung 2.1.17: Normalkraft.



**Abbildung 2.1.18:** Wir betrachten die bremsende Reibungskraft, wenn wir an einem Schlitten mit einer kontinuierlich sich erhöhenden Kraft ziehen  $F_{Zugkraft}$ . Ab einer Kraft  $F_{max}$  geht die Haftreibung  $F_{R,Haften}$  plötzlich in Gleitreibung  $F_{R,Gleiten}$  über.

einer Kraft  $F_{max}$  kann die mikroskopische Verzahnung des Körpers auf seiner Unterlage die Zugkraft nicht mehr auffangen und der Übergang zur Gleitreibung findet statt. Die Bremskraft bei Gleitreibung ist generell kleiner als bei Haftreibung. Diese Bremskraft bei Gleitreibung ist auch unabhängig von der Zugkraft und bleibt somit zeitlich konstant.

Gleitreibung und Haftreibung sind mit der Normalkraft über die Reibungskoeffizienten  $\mu$  verknüpft:

$$F_{max} = \mu_H F_N \tag{2.1.70}$$

$$F_{Gleitreibung} = \mu_G F_N \tag{2.1.71}$$

Typische Werte für die Reibungskoeffizienten sind in Tabelle 2.1 gezeigt. Betrachten wir jetzt noch einmal das Beispiel von dem Schlitten, aber jetzt mit Haft- bzw-. Gleitreibung, wie in Abb. 2.1.19 illustriert. In y-

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.1.19: Schlitten mit Reibung.

	Haftreibung $\mu_H$	Gleitreibung $\mu_G$
Stahl auf Stahl	0.7	0.6
Glas auf Glas	0.9	0.4
Teflon auf Stahl	0.04	0.04
Gummi auf Beton	1.0	0.8

**Tabelle 2.1:** Einige Reibungskoeffizienten für Hatftreibung  $\mu_H$  und Gleitreibung  $\mu_G$ 

Richtung haben wir die Bilanz der Kräfte zu:

$$F_N + \sin \Theta F - mq = 0 \tag{2.1.72}$$

in x-Richtung ergibt sich mit der Bremskraft  $F_R$ 

$$F_R = -\mu_G F_N \tag{2.1.73}$$

der Ausdruck:

$$-\mu_G F_N + \cos \Theta F = ma \tag{2.1.74}$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich jetzt die Beschleunigung des Schlittens bei gegebener Kraft F und Zugwinkel  $\Theta$  bestimmen. Es gilt allerdings zu beachten, daß für das Losfahren zunächst die Haftreibung überwunden werden muß. D.h. wir müssen zunächst  $\mu_H$  einsetzen. Der notwendige Winkel bei konstanter Kraft ergibt sich dann aus dem Gleichgewicht mit a = 0.

Im Unterschied zur gleichmäßigen Bewegung muß hier konstant eine Kraft aufgebracht werden, um *die ganze Zeit* die Bremskraft auszugleichen.

Die Beschreibung der Reibung als Kraft, die proportional zur Normalkraft ist, impliziert automatisch, dass diese Kraft *nicht* von der Auflagefläche des Körpers abhängt. Dies läßt sich auch anschaulich verstehen, wenn man sich überlegt, dass die Reibung im mikroskopischen Sinne durch die Anziehungskräfte der Atome der beiden Körper untereinander verursacht wird. In erster Näherung ist es anscheinend unerheblich, ob bei einer kleinen Fläche, die Kraft pro Fläche zwar groß ist dafür aber die Anzahl von Atomen wegen der kleinen Fläche klein ist, oder ob bei einer großen Fläche zwar viele Atome der beiden Körper sich anziehen können, aber ihr Abstand wegen der geringeren Kraft pro Fläche größer ist.

Eine andere prominente Form von Reibung ist der Luftwiderstand. Diese Bremskraft ist der Bewegung entgegen gerichtet und skaliert quadratisch mit der Geschwindigkeit v des Körpers.

$$F = \frac{1}{2}C\rho Av^2 \tag{2.1.75}$$

Mit einer Konstanten C für das Medium (0.4..1.0),  $\rho$  der Dichte des Mediums und A der Querschnittsfläche des Objektes. Betrachten wir einen fallenden Körper, der durch die Luftreibung gebremst wird. Die Bewegungsgleichung ist:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C\rho Av^2 \tag{2.1.76}$$

Löst man diese Differentialgleichung, so erkennt man, daß für kleine Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit zunächst linear mit der Zeit ansteigt. Für große Geschwindigkeiten nähert sich die Bewegung allerdings einer Endgeschwindigkeit, die sich aus:

$$0 = mg - \frac{1}{2}C\rho A v_e^2 \tag{2.1.77}$$

zu

$$v_e = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}} \tag{2.1.78}$$

ergibt.

# 2.1.3 Systeme von Massenpunkten

Im folgenden wollen wir keinen isolierten Massenpunkt betrachten auf den eine Kraft wirkt, sondern ein System von Teilchen, das in Wechselwirkung zueinander tritt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

#### Schwerpunkt

Definieren wir zunächst den sog. **Schwerpunkt** eines Systems von Teilchen. Dazu gewichten wir die einzelnen Orte mit den jeweiligen Massen und erhalten bei zwei Teilchen den Schwerpunkt gemäß Abb. 5.1.1 bei:

$$x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d\tag{2.1.79}$$



Abbildung 2.1.20: Definition Schwerpunkt in einem Teilchensystem bestehend aus zwei Teilchen.

Im allgemeinen erhalten wir bei diskreten Massenpunkten den Ausdruck.

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + \dots}{m_1 + m_2 + m_4 + m_4 + \dots} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$
(2.1.80)

mit  $M = \sum_i m_i$ . Für eine beliebige Dichteverteilung im Ortsraum bekommen wir:

$$x_s = \frac{1}{M} \int x dm \tag{2.1.81}$$

#### Kraft und Impuls

Wie verhält sich ein System von Teilchen unter dem Einfluss von äußeren Kräften? Stellen wir uns zwei Teilchen vor, die untereinander in Wechselwirkung stehen, wie zum Beispiel bei einem Stoßprozeß harter Kugeln. Es besteht die Behauptung, daß die äußeren Kräfte  $F_{eff}$  einer Beschleunigung der *Gesamtmasse* M, bzw. des Schwerpunktes entsprechen. Betrachten wir zunächst zwei Körper. Der Ort des Schwerpunktes ist:

$$M\vec{r}_s = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \tag{2.1.82}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

(2.1.83)

Die erste Ableitung liefert die Geschwindigkeit des Schwerpunktes zu:

 $M\vec{v}_{s} = m_{1}\vec{v}_{1} + m_{2}\vec{v}_{2}$ 

$$\begin{array}{cccc} & \underbrace{v_s} & & \underbrace{v_s} \\ & & & \\ & & \\ m_1 & & m_2 & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & &$$

Abbildung 2.1.21: Beim Stoß zweier Teilchen bleibt die Schwerpunktsgeschwindigkeit gleich.

Noch eine weitere zeitliche Ableitung liefert die Beschleunigung des Schwerpunktes. Auf der rechten Seite stehen die Kräfte die auf die beiden Massenpunkte wirken.

$$M\vec{a}_s = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{2.1.84}$$

Falls es keine äußeren Kräfte gibt muß nach dem dritten Newton'schen Axiom gelten  $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$ . D.h.  $M\vec{a}_s = 0$ . D.h. in einem isolierten System (ohne äußere Kräfte) ist die Beschleunigung des Schwerpunkte gleich Null. Dies ist in Abb. 2.1.21 verdeutlicht, bei dem zwei Körper miteinander stoßen und gemäß der Impuls- und Energieerhaltung ihre Geschwindigkeiten ändern. Der Schwerpunkt selber bewegt sich allerdings *gleichförmig* weiter.

Mit einer äußeren Kraft, beobachtet man eine entsprechende Beschleunigung des Schwerpunktes unseres Teilchensystems. Als Beispiel dient hier eine Silvesterrakete. Durch die Explosion zerfällt diese in viele kleine Teile, für die allerdings alle actio=reactio gilt. Die Rakete ist ein abgeschlossenes System und die Bewegung des Schwerpunktes ändert sich *nicht* durch die Explosion!

Analog zu der äußeren Kraft betrachten wir den Impuls eines Teilchensystems. Für jedes Teilchen ist der Impuls definiert als:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1.85}$$

bzw. für zwei Teilchen:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{2.1.86}$$

mit  $M\vec{v}_s = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$  ergibt sich

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\vec{p} = M\vec{v}_s \tag{2.1.87}$$

d.h. der Gesamtimpuls ist Gesamtmasse mal Schwerpunktsgeschwindigkeit in unserem Teilchensystem. Die Änderung des Gesamtimpulses ist die äußere Kraft:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{\vec{v}_s}{dt} = M\vec{a}_s = \vec{F}_{eff}$$
(2.1.88)

Auch hier gilt, falls keine äußere Kraft wirkt, daß die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses gleich Null ist. Der Gesamtimpuls ist eine Konstante der Teilchenbewegungen. Man spricht von **Impulserhaltung**. Dies wollen wir an zwei Beispielen illustrieren:

Diese Impulserhaltung wollen wir am Beispiel einer Rakete, wie in Abb. 2.1.22 illustriert.

Eine Rakete stößt Treibstoff aus, der Gesamtimpuls bleibt allerdings erhalten. Vor dem Ausstoßen des Treibstoffs hat die Rakete eine Masse M und eine Geschwindigkeit v. Nach dem Ausstoßen eines Massenelements dM hat sich die Geschwindigkeit auf v + dv erhöht. Das ausgestoßene Massenelement selbst bewegt sich mit der Geschwindigkeit u, die etwas langsamer als v + dvist. Die Impulsbilanz vor und nach dem Ausstoßen des Treibstoffs ist:



Abbildung 2.1.22: Beispiel: Beschleunigung einer Rakete.

$$Mv = dMu + (M - dM)(v + dv)$$
(2.1.89)

Wir führen die Austoßgeschwindigkeit als die Relativgeschwindigkeit  $v_{rel}$  gegeben durch die Differenz von u und v + dv ein:

$$u - (v + dv) = v_{rel} (2.1.90)$$

Nachdem u kleiner ist als v + dv ist  $v_{rel}$  hier zunächst eine negative Zahl. Wir erhalten den Ausdruck:

$$Mv = dM (v_{rel} + v + dv) + (M - dM)(v + dv)$$
(2.1.91)

der sich vereinfacht zu:

$$0 = dMv_{rel} + Mdv \tag{2.1.92}$$

Wir teilen beide Seiten durch dt und bekommen  $F_{Rakete}$ . An dieser Stelle gilt es allerdings zu beachten, daß wir als Massenelemente dM in gleichwertiger Weise, die Änderung der Raketenmasse als auch die Änderung der ausgestoßenen Gasmasse benutzt haben. Dies ist zulässig, da  $dM_{Gas} = dM_{Rakete}$ . Allerdings ist die zeitliche Änderung unterschiedlich, da die Masse des ausgestoßenen Gases zunimmt und die der Rakete abnimmt, d.h.  $\frac{dM_{Gas}}{dt} = -\frac{dM_{Rakete}}{dt}$ . Demzufolge müssen wir bei der Division von Gl. 2.1.92 durch dtdie Vorzeichen genau beachten: falls wir als dM grundsätzlich die Masse der Rakete definieren und  $v_{rel}$  als positive Geschwindigkeit, bekommen wir für  $F_{Rakete}$ :

$$-\frac{dM}{dt}v_{rel} = M\frac{dv}{dt} = F_{Rakete}$$
(2.1.93)

Die Gleichung

$$-\frac{dM}{dt}v_{rel} = M\frac{dv}{dt} \tag{2.1.94}$$

setzt den Treibstoffverbrauch  $\frac{dM}{dt}$  mal Ausströmgeschwindigkeit in Bezug zur Beschleunigungskraft  $M\frac{dv}{dt}$ . Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Massenänderung läßt sich aus der Differentialgleichung 2.1.92

$$dv = -v_{rel}\frac{dM}{M} \tag{2.1.95}$$

lösen. Durch Integration bekommen wir

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{M_1}^{M_2} -v_{rel} \frac{dM}{M} = -v_{rel} \ln \frac{M_2}{M_1}$$
(2.1.96)

als Endergebnis:

$$v_2 - v_1 = -v_{rel} \ln \frac{M_2}{M_1} \tag{2.1.97}$$

D.h. die Endgeschwindigkeit hängt logarithmisch von dem Verhältnis aus Anfangsmasse  $M_1$  und Endmasse  $M_2$  ab (Nachdem gilt  $M_2 < M_1$  ist der Logarithmus negativ).

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 2.2 Arbeit und Energie

Mit den Newton'schen Axiomen läßt sich jetzt die Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von äußeren Kräften beschreiben. Im folgenden wollen wir zusätzlich die Begriffe Arbeit, kinetische und potentielle Energie definieren.

# 2.2.1 Arbeit und Leistung

Betrachten wir einen Körper, der einen Weg  $\Delta \vec{r}$  in einem Kraftfeld  $\vec{F}$  zurück legt. Ein Beispiel sei ein Wanderer auf dem Weg zum Berggipfel. Dazu muß **Arbeit** verrichtet werden.

$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r})\Delta\vec{r} \tag{2.2.98}$$



Abbildung 2.2.23: Arbeit als Integral Kraft mal Weg.

Die Arbeit ist positiv wenn die Energie des Massenpunktes zunimmt und negativ wenn der Körper Energie abgibt. Beispiel ist die Bewegung mit Rücken- bzw. Gegenwind. Im ersten Fall ist das Skalarprodukt aus  $\vec{F}d\vec{r}$  positiv, während es im zweiten Fall negativ wird. Bei Rückenwind nimmt der Körper Energie auf, seine Geschwindigkeit erhöht sich. Bei Gegenwind gibt der Körper Energie ab, seine Geschwindigkeit erniedrigt sich.

Die Arbeit läßt sich für beliebige Wege vom Ort $\mathbf{P}_1$ zum Ort $\mathbf{P}_2$  in der Integralform schreiben als:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$
 (2.2.99)

Hierbei bezeichnen  $P_1$  und  $P_2$  Punkte in dem Kraftfeld (siehe Abb. 2.2.24); im Beispiel den Ausgangsort und den Gipfel unserer Wanderung.



**Abbildung 2.2.24:** Wegunabhängigkeit der Arbeit in konservativen Kraftfeldern. Die Arbeit is auf den Wegen a,b und c gleich.

Auf dem Weg zwischen diesen beiden Punkten (= Integral über eine Linie zwischen  $P_1$  und  $P_2$ ) muß eine Arbeit W verrichtet werden.

Die Einheit der Arbeit ist Nm=J mit J, dem **Joule**. Die geleistete Arbeit pro Zeit bezeichnet man als **Leistung** mit der Definition:

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{2.2.100}$$

Die Einheit der Leistung ist  $Js^{-1}=W$  mit W, der Einheit **Watt**. Leistung und Kraft sind wie folgt verknüpft:

$$P = \frac{d}{dt} \int_0^r \vec{F} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F} \vec{v}$$
(2.2.101)

Für die Beschreibung der Arbeit lassen sich sog. konservativen Kraftfeldern und nicht-konservative Kraftfelder unterscheiden.

## • konservative Kraftfelder

Bei konservativen Kraftfeldern hängt die Arbeit *nicht* vom Weg ab, der zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  genommen wird; im Beispiel ist es egal welchen Weg der Wanderer nimmt, die Arbeit die er leisten muß ist immer gleich.

## • nicht-konservative Kraftfelder

Ein Kraftfeld muß nicht immer konservativ sein. Nimmt man zum Beispiel an, daß die Kraft abhängt von der Geschwindigkeit, z.B. Luftwiderstand, so ändert sich die geleistete Arbeit zwischen den Punkten  $P_1$ und  $P_2$  je nach gewählter Route.

Auf dem Weg von  $P_1$  nach  $P_2$  bewegt sich der Körper durch ein Kraftfeld. Nach den Newton'schen Axiomen ist damit eine Änderung der Geschwindigkeit verbunden gemäß:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.2.25: Wegunabhängigkeit der Arbeit in konservativen Kraftfeldern.

$$F = m \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.2.102}$$

Durch eine mathematische Umformung läßt sich das Integral über den Ortsraum in ein Integral über die Zeit und schließlich in ein Integral über die Geschwindigkeit umformen:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$
  
=  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt$   
=  $\int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt$   
=  $m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$  (2.2.103)

D.h. die Arbeit, die in dem Kraftfeld geleistet wird, ist verknüpft mit einer Änderung der Geschwindigkeit des Körpers. Wir nennen den Ausdruck

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$
 (2.2.104)

die **kinetische Energie** eines Körpers der Massem und Geschwindigkeitv.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.2.26: Die Arbeit, die in einen Körper gesteckt wird entspricht einer Zunahme der kinetischen Energie.

# 2.2.2 Energiesatz der Mechanik

Nachdem in einem konservativen Kraftfeld die geleistete Arbeit unabhängig vom Weg ist, kann sie nur noch abhängen von der Wahl des Ausgangsortes  $P_1$  und des Endortes  $P_2$ . Damit kann man diese Arbeit als Differenz einer neuen Funktion  $E_{pot}$  darstellen:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2)$$
(2.2.105)

Die Funktion  $E_{pot}$  nennt man die **potentielle Energie**. Die Arbeit, die zwischen den Orten  $P_1$  und  $P_2$  geleistet wird, ist die Differenz der potentiellen Energien. Wie der Weg verläuft ist unerheblich. Um für die Integration von Gl. 2.2.99 einen mathematisch günstigen Weg zu wählen (der ja beliebig war), nehmen wir einen Weg von Höhe 0 zu dem Berggipfel der Höhe h parallel zur Richtung der Kraft  $(\vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |F||r|$ , da  $\vec{F} ||\vec{r}|$  und dann auf gleicher Höhe hvon  $P_1$  zu  $P_2$   $(\vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = 0$ , da  $\vec{F} \perp \vec{r}$ ):

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = -\int_0^h mg dz = -mgh = E_{pot}(0) - E_{pot}(h) \qquad (2.2.106)$$

Setzt man  $E_{pot}(0) = 0$ , so bekommt man schließlich für die potentielle Energie  $E_{pot}(h) = mgh$ . Wie wird jetzt bei der Bewegung des Körpers diese Arbeit aufgebracht? Wir hatten die geleistete Arbeit auf dem Weg von  $P_1$ nach  $P_2$  jetzt auf zwei Arten abgeleitet. Beide Formulierungen nach Gleichungen 2.2.106 und 2.2.103 lassen sich zusammenfassen zu:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (2.2.107)$$

oder

$$E_{pot}(P_1) + \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{pot}(P_2) + \frac{1}{2}mv_2^2 = E$$
(2.2.108)

D.h. die Summe aus potentieller Energie und kinetischer Energie ändert sich *nicht* bei einer Bewegung von  $P_1$  nach  $P_2$ . Man bezeichnet diese Summe als **Gesamtenergie** E, die eine Konstante der Bewegung in einem konservativen Kraftfeld ist. Diese Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße. Auf dem Weg von  $P_1$  nach  $P_2$  wandelt sich nur potentielle in kinetische Energie um (bzw. umgekehrt).

Im folgenden wollen wir drei Beispiele für die potentielle Energie betrachten. Für die Berechnung der potentiellen Energie definiert man zunächst einen Punkt an dem diese gleich Null sein soll. Dann wird in geeigneter Weise bis zu dem Punkt integriert an dem die potentielle Energie zu bestimmen ist.



Abbildung 2.2.27: 3 Beispiele für potentielle Energie: Gravitation an der Erdoberfläche, gespeicherte Energie einer Feder, Gravitation allgemein.

#### • potentielle Energie der Gravitation auf der Erdoberfläche

Wir integrieren von der Erdoberfläche zu einer Höhe h:

$$E_{pot} = -\int_0^h -mgdz = mgh$$
 (2.2.109)

#### • potentielle Energie einer gespannten Feder

Wir integrieren vom Ruhepunkt x = 0 bis zu einer Auslenkung x:

$$E_{pot} = -\int_0^x -cxdx = \frac{1}{2}cx^2 \qquad (2.2.110)$$

## • potentielle Energie der Gravitation, allgemein

Für das Gravitationsgesetz verwenden wir einen Punkt im Unendlichen, an dem die Gravitation Null sein soll. Wir integrieren dann bis zu einem Abstand r:

$$E_{pot} = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{mM}{r^{2}}dr = -G\frac{mM}{r}$$
(2.2.111)

Als Beispiel für die Anwendung des Energiesatzes der Mechanik, betrachten wir einen Looping, wie er in Abb. 2.2.28 gezeigt ist. Wir stellen die Frage, bei welcher Höhe h die Kugel starten muß, damit sie den ganzen Looping durchläuft und nicht von der Bahn fällt.

Am höchsten Punkt des Loopings muß die Kugel eine Minimalgeschwindigkeit haben, die ausreicht um auf Grund der Zentrifugalkraft die Schwerkraft auszugleichen. D.h. für den höchsten Punkt muß gelten:

$$mg = m\frac{v^2}{R} \tag{2.2.112}$$

Die Geschwindigkeit an diesem höchsten Punkt läßt sich aus der Energieerhaltung ableiten. Es gilt:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg2R \tag{2.2.113}$$

Für die potentielle Energie haben wir als Nullpunkt die untersten Punkt des Loopings gewählt. Bei der Bewegung der Kugel wird fortwährend kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt, die Summe bleibt konstant. Am höchsten Punkt der Kurve, hat sich die potentielle Energie gemäß Abbildung 2.2.28 um mg(h - 2R) geändert. Diese Energie steckt jetzt in der Bewegungsenergie. Falls die Kugel in Ruhe startet ( $v_1 = 0$ ) bekommen wir mit  $v_2 = v$ :

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

(2.2.114)



Abbildung 2.2.28: Energieerhaltung am Beispiel Looping.

Vergleichen wir die Gleichungen 2.2.112 und 2.2.114, so erhalten wir schließlich als Bedingung für  $h^1$ :

$$h = \frac{5}{2}R$$
 (2.2.115)

Beispiel für die Anwendung der Energieerhaltung in Kombination mit der Impulserhaltung ist die Analyse eines ballistische Pendels wie es in Abb. 2.2.29 gezeigt ist. Hier trifft ein Geschoß der Masse m und Geschwindigkeit v auf eine schwere Masse M und bleibt dort stecken. Diese schwere Masse ist als Pendel aufgehängt. Die Bewegungsenergie des Geschosses überträgt sich nach der Impulserhaltung auf die Bewegungsenergie des schweren Körpers (Geschwindigkeit V). D.h. die Impulsbilanz lautet:

$$mv = (m+M)V$$
 (2.2.116)

Die kinetische Energie des schweren Körpers führt zu einer Auslenkung des Pendels, das gegen die Schwerkraft Arbeit verrichten kann. Die kinetische Energie des Körpers wird in potentielle Energie umgewandelt. D.h. am Umkehrpunkt des Pendels muß gelten (siehe Abb. 2.2.29):

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh \qquad (2.2.117)$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>In dem Beispiel einer rollenden Kugel gilt diese Beziehung allerdings nicht, da zusätzlich noch Energie in die Rotation der Kugel gesteckt werden muß. Das Beispiel gilt nur für ein reibungsfreies Gleiten eines Gegenstandes.

wenn h die Höhe der Pendelauslenkung im Umkehrpunkt bezeichnet. Aus dieser Impuls- und Energiebilanz läßt sich die Geschwindigkeit des Geschosses v bestimmen zu:



Abbildung 2.2.29: Ballistisches Pendel.

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh} \tag{2.2.118}$$

Bevor es explizite Möglichkeiten gab die Geschwindigkeit schneller Körper zu messen (z.B. Lichtschranken), war das ballistische Pendel eine sehr gebräuchliche Methode. Durch das Verhältnis der Massen wurde eine sehr hohe Geschwindigkeit v in eine sehr langsame Geschwindigkeit V herunter transformiert.

# 2.2.3 Energie- und Impulserhaltung bei Stößen

Betrachten wir als Illustration für die Anwendung der Erhaltungssätze das eindimensionale Beispiel von zwei Wagen, wobei der Wagen 1 (Geschwindigkeit  $v_1$ ) auf den ruhenden Wagen 2 auffährt. Wir wollen drei Fälle unterscheiden, die Stöße seien jeweils elastisch. Nach dem Stoß hat der Wagen 1 die Geschwindigkeit  $v'_1$  und der Wagen 2,  $v'_2$ . Die Größen vor und nach dem Stoß sind jeweils ungestrichen und gestrichen.

## • Beide Wagen gleich schwer

Zunächst gelten im eindimensionalen Impuls- und Energieerhaltung:

$$v_1 = v_1' + v_2' \tag{2.2.119}$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 (2.2.120)$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Aus der Impulserhaltung bekommen wir  $v'_1 = v_1 - v'_2$ . Eingesetzt in die Energieerhaltung ergibt sich:

$$v_1^2 = (v_1 - v_2')^2 + {v'}_2^2 = v_1^2 - 2v_1v'_2 + {v'}_2^2 + {v'}_2^2$$
(2.2.121)

bzw.

$$0 = -2v_1v_2' + 2v_2'^2 \tag{2.2.122}$$

Als Endergebnis bekommt man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu:

$$v_2' = v_1 \qquad v_1' = 0 \tag{2.2.123}$$

D.h. der erste Wagen bleibt stehen, während der zweite Wagen mit der Geschwindigkeit des ersten Wagens weiterläuft.

## • Wagen 2 doppelt so schwer wie Wagen 1

Zunächst gelten im eindimensionalen Impuls- und Energieerhaltung:

$$v_1 = v_1' + 2v_2' \tag{2.2.124}$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 (2.2.125)$$

Aus der Impulserhaltung bekommen wir  $v'_1 = v_1 - 2v'_2$ . Eingesetzt in die Energieerhaltung ergibt sich:

$$v_1^2 = (v_1 - 2v_2')^2 + 2v_2'^2 = v_1^2 - 4v_1v_2' + 4v_2'^2 + 2v_2'^2 \qquad (2.2.126)$$

bzw.

$$0 = -4v_1v_2' + 6v_2'^2 \tag{2.2.127}$$

Als Endergebnis bekommt man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu:

$$v_2' = \frac{2}{3}v_1$$
  $v_1' = -\frac{1}{3}v_1$  (2.2.128)

D.h. der erste Wagen kommt mit einem Drittel der Geschwindigkeit zurück, während der zweite Wagen mit zwei Drittel der Geschwindigkeit des ersten Wagens weiterläuft.

## • Wagen 1 doppelt so schwer wie Wagen 2

Zunächst gelten im eindimensionalen Impuls- und Energieerhaltung:

$$2v_1 = 2v_1' + v_2' \tag{2.2.129}$$

$$2v_1^2 = 2v_1'^2 + v_2'^2 (2.2.130)$$

Aus der Impulserhaltung bekommen wir  $v'_1 = v_1 - \frac{1}{2}v'_2$ . Eingesetzt in die Energieerhaltung ergibt sich:

$$2v_1^2 = 2\left(v_1 - \frac{1}{2}v_2'\right)^2 + {v'}_2^2 = 2\left(v_1^2 - v_1v_2' + \frac{1}{4}v_2'^2\right) + {v'}_2^2 \quad (2.2.131)$$

bzw.

$$0 = -2v_1v_2' + \frac{3}{2}v_2'^2 \tag{2.2.132}$$

Als Endergebnis bekommt man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu:

$$v_2' = \frac{4}{3}v_1 \qquad v_1' = \frac{1}{3}v_1 \qquad (2.2.133)$$

D.h. der erste Wagen fährt mit einem Drittel der Geschwindigkeit weiter, während der zweite leichtere Wagen mit vier Drittel der Geschwindigkeit des ersten Wagens davon läuft.

#### • zentraler, elastischer Stoß

Betrachten wir einen zentralen Stoß im Laborsystem, bei dem der Stoßpartner 2 sich zunächst in Ruhe befindet ( $v_2 = 0$ ). Für die Impuls- und Energiebilanz bekommen wir:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \qquad (2.2.134)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad (2.2.135)$$

Daraus lassen sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoß ausrechnen mit:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$
 (2.2.136)

Die übertragene Energie $\Delta E$ ist die Bewegung des Körpers 2 nach dem Stoß. Man bekommt:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m_2 {v'}_2^2 = \frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \qquad (2.2.137)$$

Dieser **Energieübertrag** wird maximal, wenn die Massen der beiden Stoßpartner gleich ist!

#### • zentraler, inelastischer Stoß

Betrachten wir denselben Stoß, diesmal aber als komplett inelastischen Fall, d.h. beide Stoßpartner verbinden sich beim Stoß und fliegen als gemeinsamer Körper weiter. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit bleibt wegen der Allgemeingültigkeit der Impulserhaltung bestehen. D.h. man bekommt:

$$v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{2.2.138}$$

Die Differenz der kinetischen Energie nach dem Stoß und vor dem Stoß ist gegeben als Q:

$$Q = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_s^2 - \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$
 (2.2.139)

bzw.

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \left( v_1 - v_2 \right)^2 = -\frac{1}{2} \mu v_{12}^2$$
(2.2.140)

Man erkennt, daß die Relativenergie als die kinetische Energie im Schwerpunktsystem umgewandelt wird in innere Energie Q. Nach dem Stoß ist die Relativgeschwindigkeit gleich Null.

# 2.3 Die Kreisbewegung

# 2.3.1 Winkelgeschwindigkeit

Im folgenden wollen wir eine Bewegung betrachten bei der die Beschleunigung nicht gleichmäßig ist. Stellt man sich einen Körper vor, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt, so muß fortwährend eine Beschleunigung wirken, um diesen Körper auf seiner Kreisbahn zu halten, da diese Bahn nicht einer gleichförmigen *gradlinigen* Bewegung entspricht. Diese Beschleunigung bezeichnet man als **Zentripetalbeschleunigung**, also der Beschleunigung, die zum Zentrum der Kreisbewegung gerichtet ist. Wie ist diese Beschleunigung jetzt mit der Bewegung verknüpft?



Abbildung 2.3.30: Die gleichförmige Kreisbewegung.

Die Bahngeschwindigkeit sei:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = -v \sin \Theta \vec{e}_x + v \cos \Theta \vec{e}_y \tag{2.3.141}$$

mit  $\sin \Theta = \frac{y}{r}$  und  $\cos \Theta = \frac{x}{r}$  ergibt sich:

$$\vec{v} = -v\frac{y}{r}\vec{e}_x + v\frac{x}{r}\vec{e}_y \tag{2.3.142}$$

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Man bekommt, nachdem v konstant ist:

$$\vec{a} = -\frac{v}{r} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v\cos\Theta} \vec{e}_x + \frac{v}{r} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-v\sin\Theta} \vec{e}_y \qquad (2.3.143)$$

oder

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\cos\Theta\vec{e}_x - \frac{v^2}{r}\sin\Theta\vec{e}_y \qquad (2.3.144)$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Richtung von  $\vec{a}$  zeigt genau in -r-Richtung wegen der Anteile  $\cos \Theta$  für die x- und  $\sin \Theta$  für die y-Richtung. Der Betrag von  $\vec{a}$  ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\cos^2\Theta + \sin^2\Theta} = \frac{v^2}{r}$$
(2.3.145)

Man bezeichnet  $\vec{a}$  als **Zentripetalbeschleunigung** ("zum Zentrum strebend").

## Schwingender Affe

Die Bewegung eines schwingenden Affen folgt einer Kreisbahn. Hier hält die Zentrifugalkraft den Arm des Affen gestreckt und sein Schwerpunkt beschreibt eine Kreisbahn. Diese Zentrifugalkraft muss mit der Armkraft aufgebracht werden, um die Kreisbahn zu ermöglichen. Ein Betrachter von außen, sieht den Affen eine nicht geradlinige Bewegung ausführen, so als ob er von einer Kraft zum Kreismittelpunkt gezogen wird. Dies ist die Zentripetalkraft. Die Zentrifugalkraft ist eine Scheinkraft, die nur der sich bewegende Affe wahrnimmt.



Alternativ zu dieser Ableitung der Zentripetalbeschleunigung, wollen wir dasselbe noch einmal unter Verwendung der **Winkelgeschwindigkeit** durchführen.

Die Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn (siehe Abb. 2.3.31) ist:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.3.146}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.3.31: Ableitung Winkelgeschwindigkeit.

Die Wegstrecke  $\Delta s$ auf der Kreisbahn, läßt sich für kleine Winkel $\Delta \varphi$ ausdrücken als:

$$\Delta s = \sin \Delta \varphi R \tag{2.3.147}$$

für kleine Winkel geht der Sinus in sein Argument über:

$$\Delta s = \Delta \varphi R \tag{2.3.148}$$

damit wird die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R\omega \qquad (2.3.149)$$

 $\omega$  ist die sogenannte **Winkelgeschwindigkeit**. Die Bewegung eines Punktes auf dem Kreis in der xy-Ebene läßt sich jetzt schreiben als:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t\\ R\sin\omega t \end{pmatrix}$$
(2.3.150)

Die Geschwindigkeit auf diesem Kreis ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega\sin\omega t\\ R\omega\cos\omega t \end{pmatrix}$$
(2.3.151)

und schließlich die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit die Beschleunigung:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}$$
(2.3.152)

d.h. die Beschleunigung zeigt immer entgegen des Radiusvektors, also immer in Richtung Mittelpunkt. Dies ist die **Zentripetalbeschleunigung**.

Im allgemeinen Fall ist die Winkelgeschwindigkeit, die die Geschwindigkeit auf der Bahn und der Radius verknüpft durch:

$$v = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
(2.3.153)

Hierbei wird die Winkelgeschwindigkeit als Vektor definiert, der immer senkrecht auf der Bewegungsebene steht, wie in Abb. 2.3.32 verdeutlicht.



Abbildung 2.3.32: Definition des Vektors der Kreisfrequenz.

Die Gleichung 2.3.153 gilt für beliebigen Ursprung des Koordinatensystems.

Die Zentripetalbeschleunigung wird oftmals mit der Zentrifugalbeschleunigung verwechselt (siehe Abb. 2.3.33). Beide unterscheiden sich wie folgt: Die Zentripetalbeschleunigung ist eine Beschleunigung die ein externer Beobachter wahrnimmt, da der Körper keiner geradlinigen Bewegung folgt sondern einen Kreis beschreibt. Die Zentripetalbeschleunigung ist zum Zentrum des Kreises gerichtet. Die Zentrifugalbeschleunigung sieht ein Beobachter, der sich mit dem Kreis mit bewegt. Für ihn wird eine Scheinkraft spürbar, die ihn nach außen treibt. Die Zentrifugalbeschleunigung ist radial nach außen gerichtet. Diese unterschiedlichen Sichtweisen werden noch im Kapitel Bezugssysteme näher erläutert.



Abbildung 2.3.33: Unterschied Zentripetal-, Zentrifugalbeschleunigung.

# 2.3.2 Gravitation

# Die Kepler'schen Gesetze

Diese Gesetze der Mechanik fanden ihre Bestätigung durch die Berechnung der Bewegung der Planeten um die Sonne. Diese Bewegung wurde als erstes quantitativ von Kepler erfasst, der die Beobachtungsdaten am genauesten auswertete. Auf dieser Basis und dem Kopernikanischen Weltbild stellte er 3 Gesetze auf:

# • 1. Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

# • 2. Gesetz

Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, wie in Abb. 2.3.34 illustriert.

• 3. Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen zueinander.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.3.34: In gleichen Zeiten überfährt der Fahrstrahl die gleichen Flächen.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{2.3.154}$$

Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz läßt sich folgender Zusammenhang ableiten. Betrachten wir dazu ein infinitesimales Dreieck der Fläche dA, das der Fahrstrahl in einer Zeit dt überstreicht. Die zurückgelegte Strecke seit ds = vdt Die Fläche des Dreieck dA ist gemäß Abb. 2.3.35:

$$dA = \frac{1}{2}|r||ds|\sin\alpha = \frac{1}{2}|r||v|dt\sin\alpha$$
 (2.3.155)



**Abbildung 2.3.35:** Ein Flächenelement dA wird in einer Zeit dt durchlaufen.

Auf der rechten Seite von Gl. 2.3.155 entsteht ein Ausdruck der dem Kreuzprodukt der Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{v}$  entspricht. Dies ist in Vektorschreibweise:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \vec{r} \times \vec{v} \right) = \text{const.}$$
(2.3.156)

Nachdem die überstrichene Fläche dA pro Zeit dt zeitlich konstant bleibt (dA/dt = const.), muß auch der Ausdruck  $(\vec{r} \times \vec{v})$  während eines Umlaufes zeitlich konstant bleiben. Man definiert dazu eine neue Größe:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\vec{L} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \tag{2.3.157}$$

als den **Drehimpuls**, der in zentralsymmetrischen Problemen zeitlich konstant bleibt und damit eine **Erhaltungsgröße** ist.

Newton hatte jetzt aus dem dritten Kepler'schen Gesetz sein Gravitationsgesetz abgeleitet. Zunächst sagte er, daß die Kraft zwischen Sonne und Planeten immer in Richtung der Verbindungsgeraden zwischen beiden wirken müsse. Zusätzlich sollte sie proportional (Proportionalitätskonstante G) zu den Massen  $m_1$  und  $m_2$  der beteiligten Körper sein, also

$$\vec{F}_{Gravitation} = Gm_{Planet}m_{Sonne}f(r) \tag{2.3.158}$$

wobei f(r) zunächst irgendeine Abhängigkeit von r darstellt. Nach dem 1. Newton'schen Axiom muß auf die Planeten auf ihrer Umlaufbahn eine Kraft wirken, da sie nicht einer *gradlinige* Bewegung folgen. Diese Zentripetalkraft ist:

$$F_{Zentripetal} = m_{Planet}\omega^2 R \tag{2.3.159}$$

mit  $\omega^2$  der Umlauffrequenz und R dem Abstand Planet Sonne. Diese Zentripetalkraft ist im Bezugssystem des Planeten die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft, die im Gleichgewicht mit der Gravitationskraft der Sonne (siehe Abb. 2.3.36) steht. Somit gilt:

$$Gm_{Planet}m_{Sonne}f(r) = m_{Planet}\omega^2 R$$
 (2.3.160)

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz gilt für die Umlaufzeit T:

$$T^2 \propto R^3 \tag{2.3.161}$$

Mit der Umlauffrequenz  $\omega \propto \frac{1}{T}$  ist  $\omega^2 \propto \frac{1}{R^3}$ . Damit wird:

$$Gm_{Planet}m_{Sonne}f(R) \propto m_{Planet}\frac{1}{R^3}R$$
 (2.3.162)

In dieser Gleichung befinden sich bis auf R nur noch Konstanten. D.h. die Abhängigkeit f(R) auf der linken Seite muß durch die Abhängigkeit von R auf der rechten Seite gegeben sein. Man bekommt somit als Lösung:

$$f(R) = \frac{1}{R^2} \tag{2.3.163}$$

Aus dieser Schlussfolgerung hat Newton schließlich sein **Gravitationsgesetz** für die Bewegung der Planeten formuliert:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.3.36: Das Gleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Zentrifugalkraft bestimmt die Umlaufbahn der Planeten.

Dieses Gesetz gilt allerdings nicht nur für die Planetenbewegung sondern ganz allgemein für die Gravitationswirkung zweier Massen untereinander. Allgemein gilt somit für zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand r:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$
(2.3.165)

Die Schwerkraft auf der Erde auf der Erdoberfläche läßt sich mit Hilfe dieses Gesetztes verkürzt darstellen als:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM_{Erde}}{r_{Erde}^2} \frac{\vec{r}}{r} = -m \underbrace{G \frac{M_{Erde}}{r_{Erde}^2} \frac{\vec{r}}{r}}_{=-\vec{g}} = m\vec{g}$$
(2.3.166)

D.h. die Erdbeschleunigung entspricht der Näherung des Gravitationsgesetz am Ort der Erdoberfläche. Die Gravitationskonstante läßt sich auch experimentell mit einer sog. **Gravitationswaage** messen. Hierbei werden zwei Testmassen an einem Torsionsfaden aufgehängt. Bringt man in die Nähe dieser Massen weitere große Massen, so wird der Faden durch die Anziehung

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

der Massen verdrillt. Diese Verdrillung wird über einen Laser und ein kleinen Spiegel an dem Torsionsfaden sichtbar gemacht. Dies ist in Abb. 2.3.37 illustriert.



Abbildung 2.3.37: Bei einer Gravitationswaage wird die Massenanziehung über die Verdrillung eines dünnen Fadens sichtbar gemacht. An diesem Faden ist ein Spiegel befestigt über den ein Laserstrahl abgelenkt wird. Dies macht kleinste Änderungen sichtbar.

# 2.4 Ausgedehnte starre Körper

Nach der Betrachtung der Mechanik eines Massenpunktes bzw. eines Systems von Massenpunkten, werden im folgenden ausgedehnte, starre Körper behandelt.

# 2.4.1 Translation und Rotation

Ein ausgedehnter Körper ist zunächst durch eine Massenverteilung charakterisiert, die sich über sein Volumen erstreckt. Für die Beschreibung der Bewegung dieses Körpers im Raum (Translation) im Sinne eines Massenpunktes, läßt sich diese Masse auf den **Schwerpunkt** zusammenführen. Der Ort des Schwerpunktes  $\vec{r}_{Schwerpunkt}$  ergibt sich aus einer Integration über das Volumen des Körpers der Gesamtmasse M zu (siehe Abb. 2.4.1):

$$\vec{r}_{Schwerpunkt} = \frac{1}{M} \int_{Volumen} \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_{Volumen} \vec{r} \rho(\vec{r}) d\vec{r}$$
(2.4.1)



Abbildung 2.4.1: Bestimmung des Massenschwerpunkts eines Körpers.

mit  $\rho(\vec{r})$  der Dichte des Körpers. Ein ausgedehnter Körper besitzt die Möglichkeit zu rotieren. Man unterscheidet **feste Achsen** und **freie Achsen**. Bei festen Achsen ist die Rotationsachse durch ein mechanisches Lager festgelegt. Bei einer freien Achse betrachtet man den Körper isoliert im Raum. Die Bewegung dieses Körpers läßt sich als Überlagerung einer gradlinigen Bewegung, der **Translation** und einer **Rotation** darstellen. In einem Bezugssystem, das sich mit dem Schwerpunkt mit bewegt, geht die Achse der Rotation *immer* durch den Schwerpunkt. Nehmen wir einen isolierten Körper, der sich um eine Achse durch den Schwerpunkt dreht. Der Vektor, der einen Punkt i mit dem Schwerpunkt verbindet ist:

$$\vec{r}_{is} = \vec{r}_i - \vec{r}_s$$
 (2.4.2)

Dadurch wird die Relativgeschwindigkeit  $v_{is}$  zu:

$$\frac{d\vec{r}_{is}}{dt} = \vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s \tag{2.4.3}$$

Der Abstand  $|\vec{r}_{is}|$  = ist konstant bei einer Rotation des Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt. Deshalb gilt:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{is}^2 = 0 \tag{2.4.4}$$

Leitet man  $\bar{r}_{is}^2$  nach der Kettenregel ab, so bekommt man:

$$2\vec{r}_{is}\vec{v}_{is} = 0 \tag{2.4.5}$$

D.h. der Vektor  $\vec{v}_{is}$  steht senkrecht auf  $\vec{r}_{is}$ . Diese **Bahngeschwindigkeit** läßt sich somit einfach mit der **Winkelgeschwindigkeit**  $\vec{\omega}$  ausdrücken zu:

$$\vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is} \tag{2.4.6}$$

Jedem Punkt auf dem Körper kann somit nach Gl. 2.4.2 eine Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$  zugeschrieben werden, die sich aus der Schwerpunktsgeschwindigkeit  $\vec{v}_s$  und der Bahngeschwindigkeit zusammensetzt:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{iS}) \tag{2.4.7}$$

# 2.4.2 Drehmoment und Drehimpuls

## Drehmoment

An einem Körper greift an einem Punkt eine Kraft  $\vec{F}$  an. Falls dies Kraft nicht am Schwerpunkt angreift, erzeugt diese Kraft eine beschleunigte Translation und Rotation des Körpers. Gemäß der Hilfskonstruktion in Abb. 2.4.3 lassen sich die Anteile Translation und Rotation ableiten. Dazu erzeugen wir ein Kräftepaar  $\vec{F_1}$  und  $\vec{F_2}$ , das am Schwerpunkt angreift. Die Kraft, die zu einer beschleunigten Translation führt ist  $\vec{F_2}$ . Die Kräfte, die zu einer Rotation führen sind die Kräfte  $\vec{F_1}$  und  $\vec{F_3}$ . Nachdem die Rotationsachse durch den Schwerpunkt geht, erzeugt nur  $\vec{F_1}$  ein sogenanntes **Drehmoment** gemäß:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.4.2: Rotation eines Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt.

$$\vec{D}_S = \vec{r}_\perp \times \vec{F} \tag{2.4.8}$$

wobei  $r_{\perp}$  der senkrechte Abstand zwischen dem Punkt an dem die Kraft angreift und der Rotationsachse ist. Das Drehmoment auf einem Körper im Schwerefeld der Erde läßt sich auch ausnutzen um den Massenschwerpunkt experimentell zu bestimmen (siehe Abb. 5.7.39). Die Summe der Drehmomente, die gemäß  $m\vec{g}$  an einem Körper angreifen, falls die Drehachse am Ursprung von  $\vec{r}$  liegt:

$$\vec{D} = \int_{V} \vec{r} \times \vec{g} dm = -\vec{g} \times \int \vec{r} dm = -\vec{g} \times \vec{r}_{s} M \qquad (2.4.9)$$

Falls die Drehachse durch den Schwerpunkt geht ist  $\vec{r}_s = 0$ , d.h. die Drehmomente gleichen sich aus. Im Schwerpunkt kann ein Körper in beliebige Orientierungen aufgehängt sein. Dies ist gleichbedeutend mit der einer Gewichtskraft, die immer am Schwerpunkt eines Körpers angreift. Wenn man einen Körper an unterschiedlichen Punkten aufhängt, so ist im Gleichgewicht der Schwerpunkt immer unterhalb des Punktes an dem der Körper aufgehängt ist. Wählt man nun mehrere Aufhängepunkte, so läßt sich der entsprechende Schwerpunkt interpolieren.

In einem abgeschlossenen System müssen sich die Drehmomente untereinander aufheben. Liegt der Körper auf, wie zum Beispiel bei einer Balkenwaage (siehe Abb. 2.4.5), so müssen sich die angreifenden Drehmomente in



**Abbildung 2.4.3:** Greift eine Kraft  $\vec{F_1}$  an einem Körper an, läßt sich durch eine Hilfskonstruktion ein Kräftepaar  $\vec{F_2}$  und  $\vec{F_3}$  einführen, das am Schwerpunkt angreift.  $\vec{F_2}$  führt zu einer beschleunigten Translation,  $\vec{F_1}$  und  $\vec{F_3}$  führen zu einer Rotation.

der Summe aufheben:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$
 (2.4.10)

Für ausgedehnte Körper, die sich gleichförmig bewegen, muß immer die Summe über alle Kräfte und Drehmomente gleich Null sein:

$$\sum_{i} \vec{F}_i = 0 \tag{2.4.11}$$

$$\sum_{i} \vec{r_i} \times \vec{F_i} = 0 \tag{2.4.12}$$

#### Drehimpuls

Analog zum Impuls kann man auch der Rotation eines Körpers einen **Drehimpuls** zuordnen. Das einzelnen Volumenelement gemäß Abb. 5.7.40 besitzt einen Drehimpuls bezüglich der Rotationsachse von:

$$\vec{L}_i(\Delta m_i) = \vec{r}_i \times (\Delta m_i \vec{v}_i) \tag{2.4.13}$$

bzw.

$$\vec{L} = \sum_{i} \vec{r_i} \times (\Delta m_i \vec{v_i}) \tag{2.4.14}$$

mit  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  ergibt sich

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### Fallende Katze

Lässt man eine Katze den Rücken voran fallen, so landet sie immer wieder auf den Füssen. Bei dem Fall der Katze ist diese schwerelos und der Drehimpuls kann sich nicht mehr ändern. Allerdings verwindet sich die Katze wobei das Vorder- und das Hinterteil sich gegenläufig zu einander bewegen. Damit bleibt der Gesamtdrehimpuls Null, aber die Vorderseite wendet sich dem Boden zu, während die Hinterseite sich in die entgegen gesetzte Richtung bewegt. Durch das Ausstrecken und das zusammenziehen der Vorder-bzw. Hinterbeine ändert die Katze das Trägheitsmoment, d.h. bei ausgestreckten Beinen erzeugt eine kleine Drehung eine große Drehimpulsänderung. Somit zieht die Katze die Vorderbeine an, d.h. große Drehung, kleines Trägheitsmoment, während die Hinterbein ausgestreckt sind, d.h. kleine Drehung großes Trägheitsmoment. Im zweiten Teil des Falls ist dies genau umgekehrt, jetzt streckt sie die Vorderbeine von sich und zieht die Hinterbeine zusammen.



Fallende Katze. Quelle: Spektrum der Wissenschaft



**Abbildung 2.4.4:** Wird ein Körper in einer Achse durch den Schwerpunkt aufgehängt, so ist er in jeder Position im Gleichgewicht, d.h. es wirkt kein Netto-Drehmoment.



Abbildung 2.4.5: Beispiel Balkenwaage. Im Gleichgewicht heben sich die Drehmomente auf.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) m_i = \vec{\omega} \left( \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \right) m_i - \vec{r}_i \left( \vec{r}_i \cdot \vec{\omega} \right) m_i$$
(2.4.15)

Für  $r_i = r_{i,\perp}$  fällt der zweite Term weg, da der Ortsvektor senkrecht zur Drehachse steht:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_{i,\perp}^2 \vec{\omega} m_i \tag{2.4.16}$$

Integriert man über alle Volumenelemente  $m_i$  so bekommt man den gesamten Drehimpuls zu:

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_{i} \vec{r_{i,\perp}^2} m_i \vec{\omega}}_{I} \tag{2.4.17}$$

Dieser Ausdruck läßt sich verkürzt schreiben als

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{2.4.18}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum


Abbildung 2.4.6: Drehimpuls eines Körpers, der sich um eine Achse  $\vec{\omega}$  dreht.

Den Ausdruck:

$$I = \int r_{\perp}^2 \rho dV \tag{2.4.19}$$

bezeichnet man als **Trägheitsmoment**. Dieses Trägheitsmoment bezieht sich *immer* auf eine gegebene Rotationsachse! Wie bei dem System von Massenpunkten gilt auch für den Drehimpuls bei ausgedehnten Körpern die Drehimpulserhaltung. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden:

### • Drehimpulserhaltung

Betrachten wir einen Eisläufer der eine Pirouette dreht. Dabei bleibt sein Drehimpuls konstant. Hat er zwei Hanteln in der Hand mit der Gesamtmasse m, so ist deren Drehimpuls

$$\vec{L} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega} \tag{2.4.20}$$

Wenn er den Abstand  $\vec{r}_{\perp}$  zu seiner Drehachse verkleinert, muß sich  $\vec{\omega}$  erhöhen, damit  $\vec{L}$  konstant bleibt. D.h. seine Winkelgeschwindigkeit erhöht sich!

### • Versuch Drehstuhl

Eine Person sitzt auf einem Drehstuhl und bekommt ein rotierendes Rad überreicht, dessen Drehachse parallel zur Drehachse des Drehstuhls orientiert ist. Wenn diese Person die Drehachse des rotierenden Rades um 180° dreht, so beginnt der Drehstuhl sich gegenläufig zu drehen. Dies läßt sich wieder durch die Drehimpulserhaltung erklären, wie in Abb. 5.7.41 verdeutlicht. Es gilt:

$$\vec{L}_{vorher} = \vec{L}_{Rad} \tag{2.4.21}$$

$$\dot{L}_{nachher} = -\dot{L}_{Rad} + \dot{L}_{Drehstuhl} \tag{2.4.22}$$



Abbildung 2.4.7: Drehstuhl-Experiment: Falls jemand auf einem Drehstuhl ein rotierendes Rad, entsprechend einem Drehimpuls  $\vec{L}_{Rad}$  umdreht, so beginnt sich der Drehstuhl wegen der Drehimpulserhaltung zu drehen.

Für die Definition des Drehimpulses haben wir eine neue Größe, das Trägheitsmoment, eingeführt. Betrachten wir den allgemeinen Fall eines Körpers der um eine Achse **B** rotiert. Das Trägheitsmoment  $I_B$  ist:

$$I_B = \int_V r^2 dm = \int_V (\vec{r}_s + \vec{a})^2 dm \qquad (2.4.24)$$

Mit  $\vec{a}$  dem senkrechten Abstand des Schwerpunktes von der Achse und  $\vec{r_s}$  dem Ort des Massenpunktes bezüglich des Schwerpunktes. Beide Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{r_s}$  befinden sich in einer Ebene *senkrecht* zur Drehachse. Wir bekommen:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$I_B = \int_V \vec{r}_s^2 dm + \underbrace{2a \int_V \vec{r}_s dm}_{=0} + a^2 \underbrace{\int_V dm}_{=M}$$
(2.4.25)

Man erkennt, daß sich das Trägheitsmoment aus zwei Anteilen zusammensetzt:

$$I_B = I_S + a^2 M$$

$$(2.4.26)$$

$$\overrightarrow{O} \qquad \overrightarrow{O} \qquad \overrightarrow{O$$

Abbildung 2.4.8: Steiner'scher Satz: das Trägheitsmoment durch eine Achse  $\vec{\omega}$  läßt sich als Summe des Trägheitsmomentes bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt plus  $Ma^2$  darstellen. Mit M der Masse des Körpers und a dem senkrechten Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt. Die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{r}_s$  befinden sich in einer Ebene senkrecht zur Rotationsachse.

Man bezeichnet dieses Gesetz als den **Steiner'schen Satz**. Im folgenden sind einige Trägheitsmomente einfacher Körper abgeleitet:

### • dünne Scheibe

Das Trägheitsmoment einer dünnen Scheibe der Höhe h und Radius R ist gemäß Abb. 2.4.9:

$$I_z = \int_V \left(x^2 + y^2\right) \rho dV = 2\pi h \rho \int_0^R r r^2 dr = \frac{1}{2} \rho h \pi R^4 \qquad (2.4.27)$$

mit  $M = \pi R^2 h \rho$  ergibt sich:

(2.4.28)



 $I = \frac{1}{2}MR^2$ 

Abbildung 2.4.9: Berechnung des Trägheitsmomentes für eine flache Scheibe und einen Hohlzylinder.

### • Hohlzylinder

Für das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit Radius R und einer Wandstärke d bekommt man:

$$I_{z} = \rho \int_{V} r^{2} dV = 2\pi h \rho \int_{R-d}^{R} r^{3} dr \simeq 2\pi \rho h R^{3} d \qquad (2.4.29)$$

für  $d \ll R$ . Mit  $M = 2\pi R dh\rho$  ergibt sich:

$$I_z = MR^2 \tag{2.4.30}$$

### • Vollzylinder

Für das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius  ${\cal R}$  bekommt man:

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$
 (2.4.31)

### • Kugel

Für das Trägheitsmoment einer Kugel mit Radius R erhalten wir:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \tag{2.4.32}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 2.4.3 Die kinetische Energie der Rotation

Neben dem Drehimpuls, läßt sich auch eine Energie definieren, die sich in der Rotationsbewegung befindet. Diese ist gegeben durch die Geschwindigkeiten aller Massenelemente. Für ein einzelnes Massenelement  $\Delta m_i$  gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_{i,\perp}^2 \omega^2$$
 (2.4.33)

damit ergibt die gesamte Rotationsenergie:

$$E_{Rotation} = \frac{1}{2}\omega^2 \int r_{\perp}^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r_{\perp}^2 \rho dV$$
 (2.4.34)

bzw.



Abbildung 2.4.10: Berechnung der Rotationsenergie eines Körpers, der um eine Achse  $\vec{\omega}$  rotiert.

$$E_{Rotation} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{2.4.35}$$

Mit dem Drehimpuls  $\vec{L} = I\omega$ , können wir die **Rotationsenergie** auch darstellen als:

$$E_{Rotation} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} \tag{2.4.36}$$

Die Rotationsenergie ist neben der kinetischen und der potentiellen Energie eine weitere Möglichkeit wie ein Körper Energie speichern kann. Der Einfluss dieser Energie soll an Voll- und Hohlzylinder auf der schiefen Ebene illustriert werden.

Betrachten wir das Abrollen eines Voll- und Hohlzylinders auf einer schiefen Ebene. Welcher Zylinder erreicht das Ende der Rampe am schnellsten? Bei der Mechanik eines Massenpunktes war die Antwort *gleichzeitig*, da die Beschleunigung im Schwerefeld der Erde unabhängig von der Masse des Körpers ist. Im Falle eines ausgedehnten Körpers, wirkt jedoch zusätzlich ein Drehmoment, das den Körper in Rotation versetzt, wie in Abb. 2.4.11 veranschaulicht.



Abbildung 2.4.11: Abrollen eines Zylinders von einer Ebene. Bewegt sich die Achse mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , so muß die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf der Zylinderfläche am Kontaktpunkt  $-\vec{v}$  sein.

Dieses Drehmoment führt zu einer Änderung des Drehimpulses und der Zylinder beschleunigt seine Rotation. Bei dem Abrollen auf der schiefen Ebene wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Diese kinetische Energie bei ausgedehnten Körpern setzt sich aus einem Beitrag der Schwerpunktsbewegung und der Rotation zusammen.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 \tag{2.4.37}$$

D.h. bei Körpern mit einem großen Trägheitsmoment verbleibt eine kleinere Beitrag der zur Verfügung stehenden Energie, der in der Schwerpunktsgeschwindigkeit steckt. D.h. Körper mit einem großen Trägheitsmoment kommen später unten an. Vergleicht man somit einen Vollzylinder  $(I_s = \frac{1}{2}Mr^2)$ und einen Hohlzylinder  $(I_s = Mr^2)$  gleicher Masse, so erreicht der Vollzylinder den Fuß der schiefen Ebene als erstes. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ läßt sich aus der Geschwindigkeit des Schwerpunktes v ableiten. Nachdem

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

der Kontaktpunkt der Rolle zur Ebene in Ruhe ist, muß v des Schwerpunktes identisch mit der Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Zylindermantel sein, d.h.  $\omega = \frac{v}{R}$ . Damit ergibt sich für die kinetische Energie mit  $I_S = \frac{1}{2}MR^2$ 

$$E_{kin} = \frac{3}{4}Mv^2 \tag{2.4.38}$$

Im Vergleich zu einer gleitenden Rolle, bei der die kinetische Energie  $\frac{1}{2}Mv_{gleitend}^2$  ist, kann die Geschwindigkeit der rollenden Kugel  $v_{rollend}$  nur kleiner als  $v_{gleitend}$  sein, da in beiden Fällen die potentielle Energie mgh umgewandelt wird.

# 2.5 Elastische Körper

Bislang hatten wir entweder Massenpunkte oder starre ausgedehnte Körper betrachtet. In der Natur zeichnen sich aber alle Gegenstände durch ihre Verformbarkeit aus, die von sehr kleinen Änderungen bei elastischen Festkörpern (Volumen nahezu konstant, kleine Verformung) bis zu großen Änderungen bei Flüssigkeiten (Volumen nahezu konstant, große Verformung) und Gasen (Volumen variabel, große Verformung) reicht.

### 2.5.1 Dehnung und Stauchung

Elastische Festkörper können gedehnt oder gestaucht werden. Dies läßt sich in einem atomistischen Bild verstehen. Die Bindungsenergie zwischen zwei Atomen in einem Festkörper ist durch den Verlauf der potentiellen Energie wie in Abb. 2.5.1 illustriert. Bei sehr keinen Atomabständen R tritt Abstoßung auf Grund des Pauliverbotes auf; bei großen Abständen bricht die chemische Bindung; bei einem Abstand  $r_0$  liegt das Minimum der potentiellen Energie. Per Konvention wird dieses als Bindungsenergie bezeichnet und durch einen negativen Wert ausgedrückt, um einen gebundenen Zustand zu charakterisieren. In der Umgebung dieses Minimums  $r_0$  läßt sich die potentielle Energie durch eine Parabel annähern.

$$E_{pot} = \frac{1}{2}c\left(\vec{r} - \vec{r_0}\right)^2 + E_B \tag{2.5.1}$$

Die rückstellende Kraft bei einer Auslenkung um diese Ruhelage  $r_0$  ist gegeben durch:

$$\vec{F} = -\mathbf{grad}E_{pot} = -c\left(\vec{r} - \vec{r_0}\right) \tag{2.5.2}$$

D.h. wir bekommen eine Kraft, die linear mit der Auslenkung ansteigt, eine *Federkraft*. Mit diesem Ansatz läßt sich eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung  $x = r - r_0$  eines Atoms der Masse *m* ausdrücken:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx\tag{2.5.3}$$

bzw.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0 (2.5.4)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für eine Schwingung mit x(t) als Lösung der Form:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### Biegung eines Baums

Die Krümmung eines Zweiges oder Astes wird durch das Wechselspiel der angreifenden Kräfte wie Wind oder Gravitation mit der Faserstruktur der Pflanze festgelegt. Bei einer Verbiegung werden Pflanzenfasern gestaucht und gestreckt. An diesen Stellen finden Zuwachs statt, um die lokalen Druckoder Zugspannungen abzubauen.



Biegung eines Baums. Quelle: Priceless.

Dieses Wechselspiel wird auch in der Bionik ausgenutzt, um optimierte Tragwerke für z.B. Brücken bei minimalen Materialaufwand zu entwerfen. Hierzu wird eine Belastungsanalyse durchgeführt und sukzessive bei belasteten Bereichen Material hinzugefügt und bei unbelasteten entfernt. In diesen Iterationen entsteht so ein optimiertes Bauteil.

$$x(t) = \sin \omega_0 t$$
 mit  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  (2.5.5)

Die Atome schwingen also um ihre Ruhelage, was eine direkte Folge der Parabelnäherung der potentiellen Energie ist. Man spricht auch von der **harmonischen Näherung**. Dehnt man jetzt einen realen Körper kann man den linearen Zusammenhang zwischen Zugspannung und relativer Längenänderung für kleine Dehnungen gut beobachten: die Änderung des mittleren Abstandes zwischen den Atomen wird als Dehnung oder Stauchung (siehe Abb. 2.5.2) sichtbar. Übt man eine Kraft auf einen Körper der Länge L aus, der an einem Ende eingespannt ist, so dehnt er sich. Die Kraft

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.5.1: Die potentielle Energie einer Bindung zwischen zwei Atomen in einem Festkörper in Abhängigkeit von ihrem Abstand R. Das Minimum kann durch eine Parabel angenähert werden.

F, die man dabei aufwenden muß, ist in erster Näherung proportional zur Längenänderung  $\Delta L$ . Hier kann man entweder einen Körper betrachten, der an zwei Enden mit der Kraft F gedehnt oder gestaucht wird, oder der eingespannt ist und an einem Ende mit F gedehnt wird. In letzterem Fall, sorgt die Normalkraft  $F_N$  am eingespannten Ende für die Bedingung  $\sum F = 0$  im Gleichgewicht. Mit einem Querschnitt A dieses Festkörpers und einer Proportionalitätskonstante E bekommt man:



Abbildung 2.5.2: Dehnung eines Festkörpers um eine Länge  $\Delta L$ .

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \tag{2.5.6}$$

Die Proportionalitätskonstante E heißt **Elastizitätsmodul**. Zusätzlich kann man die **Zugspannung** oder **Druckspannung**  $\sigma$  einführen als die

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kraft pro Fläche.

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{2.5.7}$$

Mit der **relativen Längenänderung**  $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$  wird schließlich das **Hook'sche Gesetz** formuliert:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.5.8}$$

Bei großen Dehnungen ist die potentielle Energie der Atombindung allerdings nicht mehr durch eine Parabel anpassbar und die Dehnung damit auch *nicht* mehr proportional zur Kraft, wie in Abb. 2.5.3 illustriert. Die Abweichung der potentiellen Energie von der Parabelform wird sichtbar. Man spricht von der **Anharmonizität** des Bindungspotentials und die Dehnung ist *nicht mehr* proportional zur wirkenden Zugspannung. In einem Übergangsbereich ist diese Dehnung allerdings immer noch *reversibel*. Ab einem bestimmten Punkt kehrt der Körper nicht mehr in seine Ausgangslage zurück, da sich in seinem Innern *irreversible* Änderungen durch die Dehnung ergeben haben, der Körper fließt. Dies kann zum Beispiel das Abgleiten einzelner Kristallite in einem polykristallinen Festkörper sein. Bei noch größerer Dehnung wird schließlich ein Punkt erreicht an dem der Körper zerreißt (siehe Abb. 2.5.3).



**Abbildung 2.5.3:** Das Hook'sche Gesetz verknüpft Zugspannung  $\sigma = \frac{F}{q}$  und relative Längenänderung  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ . Wegen der Anharmonizität des Bindungspotentials kommt es zu einer Abweichung vom Hook'schen Gesetz für große Zugspannungen bzw. Dehnungen.

Die Härte von Materialien gegenüber einer mechanischen Beanspruchung kann mit zahlreichen Messverfahren untersucht werden. Die Härte selbst ist keine physikalisch genau definierte Größe im Unterschied zum Elastizitätsmodul. Die Härte ist also immer definiert bezüglich eines gewählten Messverfahrens. Bei der Härtemessung wird ein Prüfkörper in ein Material hinein gedrückt und das Verhältnis aus aufgewendeter Kraft zur Querschnittsfläche des Eindrucks ist als Härte definiert. Hierbei unterschieden sich die einzelnen Messverfahren hinsichtlich der Wahl des Prüfkörpers (Kugel, Diamant etc.)

### 2.5.2 Verbiegung eines Balkens

Betrachten wir im folgenden das Beispiel eines gebogenen Balkens, wie in Abb. 2.5.4 illustriert. Der Balken habe eine Länge L und sei an einem Ende eingespannt. An seinem Ende wirke eine Kraft  $F_0$ . Welche Spannung wirkt jetzt in dem Balken?

Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, entsteht ein Unterschied  $\Delta l$  in der Länge des Balkens an Ober- und Unterseite:



**Abbildung 2.5.4:** Biegung eines Balkens der Länge *L*. Die gestrichelte Linie bezeichnet die neutrale Faser.

$$\Delta l = \left(r + \frac{d}{2}\right)\varphi - \left(r - \frac{d}{2}\right)\varphi = d\varphi = d\frac{l}{r}$$
(2.5.9)

mit r dem **Krümmungsradius** und d der Dicke des Balkens. Wir betrachten kleine Dehnungen bzw. große Krümmungsradien r. D.h. bei kleinen Winkeln  $\varphi$ , kann  $\sin \varphi$  grundsätzlich durch  $\varphi = \frac{l}{r}$  angenähert werden. Die gestrichelte Linie in Abb. 2.5.4 bezeichnet man als **neutrale Faser** in der aus Symmetriegründen *keine* Spannung auftreten kann. Die Längenänderung an einem beliebigen Ort z im Balken ist demnach:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\Delta l(z) = z \frac{l}{r} \tag{2.5.10}$$

Mit dem Hook'schen Gesetz bekommen wir:

$$\frac{\Delta l}{l} = \epsilon = \sigma \frac{1}{E} \tag{2.5.11}$$

bzw.

$$\sigma = \frac{z}{r}E\tag{2.5.12}$$

Die Spannung  $\sigma$  erzeugt eine Kraft dF auf eine Fläche  $b \cdot dz$  am Ort z innerhalb des Balkens der Breite b:

$$dF = \sigma b dz = \frac{z}{r} E \cdot b \cdot dz \qquad (2.5.13)$$

Diese Kraft erzeugt mit dem Hebelarm z ein Drehmoment  $dD_{Balken} = dFz$  (siehe Abb. 2.5.5):

$$dD_{Balken} = z \frac{E}{r} z \cdot b \cdot dz \tag{2.5.14}$$

Mit der Integration über die Dicke d des Balkens bekommen wir das gesamte Drehmoment, daß durch das Spannungsfeld  $\sigma$  im Balken aufgebaut wird.

$$D_{Balken} = \int_{-d/2}^{d/2} z^2 b \frac{E}{r} dz = \frac{Ed^3b}{12r}$$
(2.5.15)

Dieses Drehmoment  $D_{Balken}$  steht im Gleichgewicht mit dem von außen angreifenden Drehmoment durch die Kraft  $F_0$ . An einem Ort x auf der Länge des Balkens ist das Drehmoment gegeben als (siehe Abb. 2.5.4):

$$D_{außen} = F_0 \left( L - x \right) \tag{2.5.16}$$

Wegen dem dritten Newton'schen Axiom gilt  $D_{Balken} = -D_{außen}$ . Es ergibt sich:

$$\frac{1}{r} = -\frac{12F_0}{Ed^3b}(L-x) \tag{2.5.17}$$

Man erkennt, daß die Krümmung des Balkens 1/r mit der dritten Potenz der Balkendicke abnimmt<sup>2</sup>. Gleichzeitig ist die Krümmung am Ort x = 0,

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Große Krümmung entspricht einem kleinen Radius und umgekehrt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.5.5: An einem beliebigen Punkt in dem Balken herrscht eine Gleichgewicht der Drehmomente.

dem Ort der Einspannung, am größten. An diesem Ort tritt auch die maximale Zugspannung  $\sigma_{max}$  auf:

$$\sigma_{max} = E \frac{1}{r} \frac{d}{2} \tag{2.5.18}$$

bzw.

$$\sigma_{max} = \frac{12F_0L}{2d^2b}$$
(2.5.19)

D.h. der Balken bricht bei Überlastung genau dort ab.

# 2.6 Hydrostatik

Eine Flüssigkeit kann prinzipiell keine Kräfte parallel zur Flüssigkeitsoberfläche (=Scherkräfte) aufnehmen. Die Flüssigkeitsoberfläche verändert sich solange bis die wirkenden Kräfte immer senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche sind. Dies läßt sich an einem rotierenden Gefäß illustrieren. Die Oberfläche der Flüssigkeit in dem rotierenden Gefäß nimmt die Kontur einer Parabel ein, da dann die Summe aus Zentrifugalkraft und Schwerkraft genau senkrecht zur Oberfläche steht, wie Abb. 2.6.6 veranschaulicht.

Betrachten wir einen Ort auf der rotierenden Flüssigkeit, so muß sind die Kräfte die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft. Nachdem die Kraft senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche wirkt (Querschnitt entspricht der Funktion z(r)) muß gelten:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{m\omega^2 r}{mg} \tag{2.6.20}$$

D.h. es gilt:

$$\frac{dz}{dr} \propto r$$
 bzw.  $z(r) \propto r^2$  (2.6.21)

D.h. der Querschnitt der Flüssigkeit hat eine Parabelform. Diese Abhängigkeit erzeugt auch eine perfekte asphärische Abbildung, falls man die Oberfläche als Spiegel dienen soll. In der Tat werden große Glasspiegel der Astronomie auf diese Art vorgeformt, wobei während der Erstarrung des geschmolzenes Glas-Rohlings dieser rotiert und sich so automatisch die Parabelform einstellt.

### 2.6.1 Hydrostatischer Druck

In einer ruhenden Flüssigkeit (siehe Abb. 2.6.6), darf sich kein Flüssigkeitselement bewegen, d.h. die Kräfte auf die Oberflächen dieses Flüssigkeitselementes müssen sich alle aufheben. Diese Kraft pro Fläche bezeichnet man als **Druck**:

$$p = \frac{F}{A} \qquad [Pa] \tag{2.6.22}$$

Die Einheit des Druckes sind **Pascal**, **Pa**. Dieser Druck ist innerhalb der Flüssigkeit konstant (ohne Schwerkraft). Dies kann wie folgt gezeigt werden. Betrachten wir ein Flüssigkeitselement bei dem der Druck in x-Richtung auf



Abbildung 2.6.6: In einer Flüssigkeit können keine Scherkräfte auftreten. Deshalb richtet sich die Kraftkomponente immer senkrecht zur Oberfläche aus.

beiden Seiten unterschiedlich sei. Auf der linken Fläche des Volumenelements dydz herrsche ein Druck p:

$$F = pdzdy \tag{2.6.23}$$

und auf der rechten Seite ein Druck  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ . Die Kraftbilanz in x-Richtung lautet demnach:

$$F_x = pdzdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dzdy = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \qquad (2.6.24)$$

mit dxdydz = dV. Nachdem in einer Flüssigkeit das Volumenelement konstant ist, sich aber in Ruhe die Kräfte aufheben, muß gelten:  $-\mathbf{grad}p = 0$ . D.h. der Druck ist konstant. Dies bezeichnet man als **Pascal'sches Prinzip**:

$$p = \text{const.} \tag{2.6.25}$$

Ein Beispiel für die Anwendung der Gleichverteilung des Druckes in einer Flüssigkeit ist die **hydraulische Hebebühne** für schwere Lasten, wie in Abb. 2.6.7 gezeigt. In einem System verbundener Röhren wird auf eine Röhre mit kleinem Querschnitt  $A_1$  eine Kraft  $F_1$  ausgeübt. Nachdem der Druck in der Flüssigkeit *überall* gleich ist, wirkt durch diesen Druck auf die Fläche  $A_2$ die Kraft  $F_2$ . D.h. es muß gelten:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{2.6.26}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Somit ist die Kraft, die man aufwenden muß, um einen Körper anzuheben, der die Fläche  $A_2$  beschwert, gleich:

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 \tag{2.6.27}$$

Die Arbeit W, die geleistet werden muß ist Kraft mal Weg. D.h. die Verschiebung der Fläche  $A_1$  um  $\Delta z_1$  erzeugt eine Verschiebung der Fläche  $A_2$  um  $\Delta z_2$ .

$$W_1 = F_1 \Delta z_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 \Delta z_1 \tag{2.6.28}$$

Nachdem die veränderten Volumina gleich bleiben, d.h.  $A_1 \Delta z_1 = A_2 \Delta z_2$  bekommt man durch Einsetzen:

$$W_1 = F_1 \Delta z_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 \frac{A_2}{A_1} \Delta z_2 = F_2 \Delta z_2 \qquad (2.6.29)$$

D.h. die Kraft  $F_1$  kann sehr viel kleiner als die Kraft  $F_2$  gemacht werden. Um die Last entsprechend  $F_2$  um  $\Delta z_2$  anzuheben ist allerdings eine große Verschiebung  $\Delta z_1$  notwendig.



Abbildung 2.6.7: Hydraulische Hebebühne.

Bisher hatten wir die *Gewichtskraft* der Flüssigkeit selbst vernachlässigt. Betrachten wir noch einmal ein Volumenelement in einer Flüssigkeit, wie in Abb. 2.6.8 illustriert. Der Druck auf der Unterseite des Volumenelements ist größer, da hier noch die Gewichtskraft der in dem Volumenelement enthaltenen Massen hinzukommt. Der Druckunterschied dp zwischen oben und unten bei einem Volumenelement (Höhenunterschied dz) ist:

$$dp = \rho V g \frac{1}{A} = \rho A dz g \frac{1}{A} = \rho g \cdot dz$$
 (2.6.30)

Der Druck an einem Ort z in einer Flüssigkeitssäule, durch die Gewichtskraft der darüber stehenden Wassersäule ist demnach gegeben als

$$p(z) = \rho g(H - z)$$
 (2.6.31)

mit H der Höhe des Wasserspiegels über Grund und der Definition p(H) = 0. Interessanterweise gilt diese Beziehung nicht für alle Medien. Betrachtet man zum Beispiel Sandkörner oder Weizenkörner in einem entsprechenden Silo, so nimmt der Druck nach unten hin *nicht* zu, da sich die Sandkörner untereinander abstützen können und so den Druck von oben auf die Seitenwände leiten.

### 2.6.2 Der Auftrieb

Die Druck-Variation mit der Höhe eines Wasserspiegels wird sichtbar beim sog. **Auftrieb**. Betrachten wir einen Körper, der untergetaucht ist. Durch die unterschiedlichen Höhen der Ober- wie der Unterseite ist der entsprechende Druck auf der Ober- und Unterseite mit Querschnitt A unterschiedlich. Dies führt netto zu einer Kraft nach oben, dem Auftrieb (siehe Abb. 2.6.8).

$$F_1 = p_1 A_1 \qquad F_2 = p_2 A_2 \tag{2.6.32}$$

Mit  $A_1 = A_2 = A$  bekommen wir

$$\Delta p = \frac{F_1 - F_2}{A} = p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) = \rho_{Fl\ddot{u}ssigkeit}g\Delta h \qquad (2.6.33)$$

$$F_{Auftrieb} = \Delta pA = \rho_{Fl\ddot{u}ssigkeit}gA\Delta h = \rho g\Delta V \qquad (2.6.34)$$

Demnach verliert ein eingetauchter Körper soviel Gewicht, wie die verdrängte Wassermenge  $\Delta V = A\Delta h$  wiegt. Dies bezeichnet man als das **Archimedische Prinzip**:

Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Dieser Auftrieb ist der Gewichtskraft entgegen gerichtet. Ein U-Boot kann stabil im Wasser schweben, wenn es den Auftrieb genau mit seiner Gewichtskraft ausbalanciert. Durch eine Veränderung des verdrängten Volumens (Fluten oder Ausblasen von Tanks) kann es entweder sinken der aufsteigen.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.6.8: Der Auftrieb.

Welches Gleichgewicht stellt sich jetzt ein, wenn ein Körper *schwimmt*? Im Gleichgewicht muß gelten:

$$F_{Auftrieb} = F_{Gravitation} \tag{2.6.35}$$

Der Vergleich der Dichten des Körpers und des Mediums in dem der Körper schwimmt, besagt zunächst, daß ein **Schwimmen** nur möglich ist, wenn die *mittlere Dichte*<sup>3</sup> des Körpers kleiner als die des Wassers ist. Bei einem schwimmenden Körper taucht dieser *so weit* in das Wasser ein, daß die verdrängte Wassermenge *genau* seinem Gewicht entspricht! Dies wird auf eindrucksvolle Weise in einem **Schiffshebewerk** sichtbar. Hier fährt ein Schiff in einen wassergefüllten Trog hinein, der auf eine andere Flußsohle gehoben oder gesenkt wird. An dem Trog sind Gegengewichte, die das Gewicht der Wassermenge in dem Trog ausbalancieren. Obwohl ein Schiff Tausende von Tonnen wiegt, ändert sich das Gewicht des Troges *nicht* durch das hinein fahrende Schiff: die verdrängte Wassermenge ist genau so schwer wie des Schiffes selbst. D.h. der Motor zum Heben und Senken des Troges kann relativ schwach sein, da kein zusätzliches Schiffsgewicht mit angehoben werden muß<sup>4</sup>

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Bei einem Schiff zum Beispiel, ergibt sich die mittlere Dichte aus dem Gewicht des Schiffes durch das verdrängte Volumen

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Dies ist im Unterschied zu einem traditionellen Fahrstuhl in Hochhäusern. Hier muß der Motor das Gewicht der Passagiere heben können.

### Messung des Körperfettanteils

Eine Möglichkeit den Fettanteil eines Lebewesens zu messen ist die Bestimmung der mittleren Dichte. Diese geschieht durch eine Wägung des Objekts im vergleich mit dem verdrängten Volumen. Ein Beispiel wäre das Untertauchen eines Objektes in eine Flüssigkeit und das Messen das Wasservolumens. Eine Variante dieser Methode ist die Luftverdrängung einer Person einer gegebene Geometrie. In Verbindung mit der Wägung lässt sich so der Fettanteil bestimmen, da die Relation Gewicht-zu-Volumen mit dem Fettanteil kalibriert werden kann.



### 2.6.3Grenzflächen

Reale Medien zeichnen sich durch eine Grenzfläche zu ihrer Umgebung aus. Das Erzeugen einer Grenzfläche, zum Beispiel beim Spalten eines Kristalls ist immer mit einer Energie verbunden, da die Bindungen zu den Nachbaratomen aufgebrochen werden müssen. Man definiert eine sog. Oberflächenenergie  $E_{Oberfläche}$  als diejenige Proportionalitätskonstante, die die aufgewendete Arbeit  $\Delta W$  zur Oberflächenänderung  $\Delta A$  in Bezug setzt:

$$\Delta W = E_{Ober\,fläche} \Delta A \tag{2.6.36}$$

Betrachten wir dazu einen Tropfen einer Flüssigkeit auf einer Oberfläche (siehe Abb. 2.6.9). Die Arbeit, die geleistet werden muß, um den Umfang eines Tropfens zu vergrößern ist:

$$\Delta W = \sum_{Umfang} F dR = \frac{F}{2\pi R} 2\pi R dR = E_{Oberfläche} \Delta A \qquad (2.6.37)$$

 $<sup>\</sup>bigcirc$ A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### Blutsenkung

Bei einer Blutsenkung wird Sedimentierung der Bestandteile im Blut entsprechend ihrer Dichte ausgenutzt, um Blutplättchen von Blutplasma zu separieren. Der Auftrieb der Bestandteile im Blut ist unterschiedlich. So sinken schwere Bestandteile zu Boden, während die leichteren sich an der Oberfläche ansammeln.



Man erkennt, daß die Einheit der Oberflächenenergie [Nm<sup>-1</sup>] ist. Oftmals wird **Oberflächenenergie** und **Oberflächenspannung** gleichwertig verwendet. Bei genauer Definition ist die Oberflächenenergie diejenige Energie, die durch das Spalten der Atombindungen aufgebracht werden muß. Bei der Oberflächenspannung wird zusätzlich noch berücksichtigt, daß durch das Einbringen einer neuen Grenzfläche sich eine Atomsorte an der Oberfläche ansammeln kann (die Phasen A und B entmischen sich bei einem Festkörper AB, wobei sich zum Beispiel Atomsorte A an der Oberfläche ansammelt). Im Experiment wird in der Regel die Oberflächenspannung bestimmt. Bei einkomponentigen Systemen ist die Oberflächenspannung identisch mit der Oberflächenenergie.

Betrachten wir als Beispiel eine **Seifenblase** mit Radius r. Innerhalb der Seifenblase herrsche ein Druck p während in der Umgebung der Druck  $p_0$  herrsche. Für die Vergößerung der Seifenblase, muß der innere Überdruck



Abbildung 2.6.9: Die Oberflächenenergie beschreibt die Arbeit die geleistet werden muß, um eine Fläche um  $\Delta A$  zu vergrößern.

 $p - p_0$  durch eine Volumenänderung  $4\pi r^2 \Delta r$  gegen die Oberflächenspannung  $E_{Oberfläche}$  um einen Betrag  $E_{Oberfläche}\Delta A$  Arbeit leisten.

$$\Delta W = F \Delta r = p A \Delta r = p \Delta V \tag{2.6.38}$$

Es gilt:

$$(p - p_0) 4\pi r^2 \Delta R = E_{Oberfläche} \Delta A \tag{2.6.39}$$



Abbildung 2.6.10: Kräftegleichgewicht einer Seifenblase.

Mit  $\Delta p = p - p_0$  bekommen wir:

$$\Delta p 4\pi r^2 \Delta r = E_{Oberfläche} 4\pi \left( r^2 - (r - \Delta r)^2 \right) 2 \qquad (2.6.40)$$

94

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Der Faktor 2 auf der rechten Seite berücksichtigt, daß sowohl die Innenseite als auch die Außenseite vergrößert wird. Wir bekommen somit:

$$\Delta p 4\pi r^2 \Delta r = E_{Oberfläche} 4\pi \left( r^2 - r^2 + 2r\Delta r - \underbrace{\Delta r^2}_{\Delta r^2 \ll \Delta r} \right) 2 \qquad (2.6.41)$$

De meisten Terme kürzen sich und wir erhalten als Zusammenhang zwischen  $\Delta p$  und r folgenden Ausdruck:

$$\Delta p = 4 \frac{E_{Oberfläche}}{r} \tag{2.6.42}$$

Man erkennt, daß der Druckunterschied bei sehr kleinen Seifenblasen sehr groß wird. D.h. kleine Seifenblasen sind sehr ungünstig. Dies ist ein allgemeines Phänomen: die Bilanz aus Grenzflächenenergie und Volumenenergie ist günstiger bei Körpern mit größerem Volumen-zu-Oberfläche Verhältnis, d.h. große Tropfen oder Seifenblasen wachsen auf Kosten der kleineren.

Diese Oberflächenspannung wird auch ganz praktisch für die Bewertung der Benetzbarkeit von Oberflächen genutzt. Betrachten wir dazu das Kräftegleichgewicht eines Tropfens auf einer Unterlage (Substrat), wie in Abb. 2.6.11 illustriert. An der Grenzlinie lassen sich drei Oberflächenspannungen angeben für die jeweiligen Grenzflächen Luft-Substrat  $(E_{LS})$ , Flüssigkeit-Substrat  $(E_{FS})$  und Luft-Flüssigkeit  $(E_{LF})$ . Aus einer Kraftbilanz am Ort der Grenzlinie an der sich alle drei Medien berühren kann man ableiten:

$$E_{LS} = E_{FS} + E_{LF} \cos \Theta \tag{2.6.43}$$

D.h. aus einer Beobachtung des sog. Kontaktwinkels  $\Theta$  an der Grenzlinie läßt sich auf die Oberflächenspannungen schließen. Hierbei betrachtet man die Oberflächenenergien als vektorielle Größen.

Die Oberflächenenergie kann auch als einfache Erklärung für die **Kapillarwirkung** von dünnen Hohlräumen dienen. Dies geschieht mit einer einfachen Energiebilanz, wie am Beispiel einer Kapillare mit Radius r in Abb. 2.6.11 illustriert ist. An der Oberfläche in der Höhe h haben wir folgendes Gleichgewicht: eine Erhöhung um dh ändert die potentielle Energie  $mg = \rho r^2 \pi hg$  der ganzen Flüssigkeitssäule um dh. Dies geschieht nur, wenn in gleichem Maß Oberflächenenergie gewonnen wird. Es muß gelten:

$$mgdh = 2\pi r dh \Delta E_{Oberfläche} \tag{2.6.44}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.6.11: Benetzung einer Oberfläche.

Hierbei vergleicht die Größe  $\Delta E_{Oberfläche}$  die Oberflächenspannungen vor und nach der Benetzung gemäß:

$$\Delta E_{Oberfläche} = E_{Kapillare-Luft} - E_{Kapillare-Flüssigkeit}$$
(2.6.45)

Mit dieser Definition wird

$$mg = 2\pi r \Delta E_{Oberfläche} \tag{2.6.46}$$

Wenn wir die Masse der Flüssigkeitssäule  $m = \pi r^2 h \rho$  benutzen, bekommt man:

$$h = \frac{2\Delta E_{Oberfläche}}{r\rho g} \tag{2.6.47}$$

D.h. mit kleinem Radius r ist die Kapillarwirkung sehr viel stärker, da der Energiegewinn bei Benetzung sehr groß wird im Vergleich zur potentiellen Energie, die aufgebracht werden muß, um die Flüssigkeit um dh anzuheben. Die Bilanz von Schwerkraft und Oberflächenenergie, kann auch zur **negativen Kapillarität** führen, falls es für eine Flüssigkeit *ungünstig* wird eine Oberfläche zu benetzen. Fügt man eine Kapillare in eine solche Flüssigkeit ein, so wird die Flüssigkeit verdrängt, bis der Druck in einer bestimmten *Tiefe* ausreicht, um im Gleichgewicht mit der Änderung der Oberflächenenergie zu sein. Hier wird  $\Delta E_{Oberfläche}$  negativ.

Mit der Gleichung 2.6.43 läßt sich auch direkt der Kontaktwinkel einsetzen mit dem die Flüssigkeit im Innern der Kapillare anliegt. Man bekommt mit:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 2.6.12:** Durch ein Gleichgewicht aus Schwerkraft und Oberflächenenergie wird eine Flüssigkeit in eine Kapillare hoch gezogen.

$$\Delta E_{Oberfläche} = E_{Kapillare-Luft} - E_{Kapillare-Flüssigkeit} = \cos \Theta E_{Flüssigkeit-Luft}$$
(2.6.48)

den Ausdruck:

$$h = \frac{2\Delta E_{Fl\ddot{u}ssigkeit-Luft}\cos\Theta}{r\rho g}$$
(2.6.49)

# 2.6.4 Gase

Im Unterschied zu Flüssigkeiten können Gase ihr Volumen ändern und reagieren damit auf Druckänderungen. Beim Komprimieren und Expandieren eines Gasvolumens stellt man fest, das bei gegebener konstanter Temperatur<sup>5</sup> das Produkt aus Druck und Volumen konstant bleibt:

$$pV = const. (2.6.50)$$

Dies bezeichnet man als **Boyle-Mariottsches Gesetz**. Im Unterschied zu einer Flüssigkeit ändert sich jetzt die *Dichte*  $\rho$  des Materials maßgeblich. Nachdem die Masse M in dem Gasvolumen V erhalten bleibt  $(M = V\rho)$  kann man äquivalent zu Gl. 2.6.50 auch schreiben:

 $<sup>^5\</sup>mathrm{Das}$ Konzept der Temperatur wird später noch explizit behandelt

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### wassertransport in Bäumen

Der Transport von Wasser in den Bäumen basiert auf der Kapillarität. Normalerweise ist der Schweredruck von Wasser so groß, dass durch einen Unterdruck am oberen Ende des Baumes keine größeren Höhen als 10 Meter möglich wären. Durch die kleinen Kapillaren unter der Rinde des Baumes sind allerdings Höhen bis zu 150 Meter möglich. Hier hält die Grenzflächenenergie der Flüssigkeit an der Innenseite der Kapillare (Durchmesser 0,2... 0,3 mm) die Flüssigkeitssäule zusammen. Unter Umständen kann es hier auch zu einem Abreisen der Flüssigkeitssäule kommen, einer Gasembolie.



Wassertransport in Bäumen. Quelle: wir-experimentieren.net

$$\frac{p}{\rho} = const. \tag{2.6.51}$$

Auf der Basis dieses Zusammenhangs läßt sich die Variation des Druckes mit der Höhe eines Volumenelements in der Atmosphäre beschreiben. Es sei gesucht der Druck p und die Dichte der Atmosphäre  $\rho$  an einem beliebigen Ort der Höhe h über dem Erdboden. Zunächst gilt:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \tag{2.6.52}$$

mit  $p_0$  und  $\rho_0$  dem Druck und der Dichte auf der Erdoberfläche. Betrachten wir jetzt ein kleines Volumenelement in einer Höhe h. Der Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Volumenelements mit Querschnittsfläche A wird durch die Gewichtskraft pro Fläche der Luft *innerhalb* dieses Volumenelements bestimmt. Der Anteil der Gewichtskraft ist

$$dF = -\rho g dhA \tag{2.6.53}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Der Druckunterschied ist Kraft pro Fläche. Damit bekommt man:

$$dp = \frac{dF}{A} = -\rho g dh \tag{2.6.54}$$

mit Gl. 2.6.52 ergibt sich schließlich:

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} pgdh \qquad (2.6.55)$$



Abbildung 2.6.13: Barometrische Höhenformel.

Separation der Variablen p und h liefert:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}gdh \tag{2.6.56}$$

Durch Integration bekommen wir:

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0}gh + C \tag{2.6.57}$$

mit der Integrationskonstanten C. Mit  $p(h = 0) = p_0$  bekommt man:

$$p = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}}$$
(2.6.58)

Dies bezeichnet man als **barometrische Höhenformel**. D.h. der Druck nimmt exponentiell mit der Höhe ab. Diese Formel gilt allerdings nur für *isotherme* Verhältnisse, d.h. einer konstanten Temperaturverteilung in der Atmosphäre.

# 2.7 Hydrodynamik

Bislang hatten wir statische Körper betrachtet, seien es kompressible Medien wie Gase oder inkompressible Medien wie Flüssigkeiten oder Festkörper. In allen Medien kann zudem Transport von Teilchen stattfinden, wie es zum Beispiel beim Strömen von Flüssigkeiten und Gasen sichtbar wird. Bei diesem Transport gelten wieder Erhaltungssätze für die Teilchenzahl, den Impuls und die Energie. Diese Grundgleichungen und deren Anwendungen werden im folgenden diskutiert.

# 2.7.1 Teilchenerhaltung, Kontinuitätsgleichung

In jedem Medium soll die Zahl der Teilchen N bzw. die Masse der Teilchen  $\rho V$  in einem Volumen V erhalten bleiben. D.h. es muß immer gelten:

$$\rho V = \text{const.} \tag{2.7.1}$$

Betrachten wir jetzt ein Medium, das durch ein Rohr mit variablem Querschnitt strömt (siehe Abb. 2.7.1). Die Menge, die durch den großen Querschnitt  $A_1$  strömt und in einem Zeitintervall  $\Delta t$  die Strecke  $\Delta x_1$  zurück legt, muß gleich derjenigen Menge sein, die durch den kleinen Querschnitt  $A_2$ strömt und in dem gleichen Zeitraum die Strecke  $\Delta x_2$  zurück legt. Dies läßt sich ausdrücken durch:



**Abbildung 2.7.1:** Eine Flüssigkeit ströme durch ein Rohr mit variablem Querschnitt.

$$\rho_1 A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \rho_2 A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \tag{2.7.2}$$

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

100

2.7. HYDRODYNAMIK

Die Ausdrücke  $\frac{\Delta x_1}{\Delta t}$  entsprechen Geschwindigkeiten. D.h. wir bekommen:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{2.7.3}$$

Bei inkompressiblen Medien, wie zum Beispiel einer Flüssigkeit gilt  $\rho_1 = \rho_2$  und wir bekommen:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{2.7.4}$$

Im allgemeinen kann sich jedoch die Dichte eines Mediums ändern. Wir führen deshalb eine **Massenflußdichte**  $j_{Massen}$  ein, die definiert ist als:

$$j_{Massen} = \rho v \qquad [\text{gm}^{-2}\text{s}^{-1}]$$
 (2.7.5)

und erhalten die allgemeine Beziehung:

$$A_1 j_1 = A_2 j_2 \tag{2.7.6}$$

Alternativ könnten wir auch die **Teilchenflußdichte**  $j_{Teilchen}$  verwenden, die einfach einer Anzahl von strömenden Teilchen pro Volumen n = N/V und Zeit entspricht:

$$j_{Teilchen} = nv$$
 [m<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>] (2.7.7)

Neben den Teilchen- oder Massenflußdichten läßt sich auch der **Teilchen**strom  $I_{Teilchen}$  oder der Massenstrom  $I_{Massen}$  an Teilchen angeben zu:

$$I_{Teilchen} = j_{Teilchen}A \tag{2.7.8}$$

$$I_{Massen} = j_{Massen}A \tag{2.7.9}$$

## 2.7.2 Energieerhaltung, Bernoulli-Gleichung

Neben der Teilchenerhaltung können wir auch die Energieerhaltung fordern. Betrachten wir zunächst wieder ein durchströmtes Rohr wie in Abb. 2.7.2 illustriert. Die Fließgeschwindigkeiten sind jeweils  $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$  und  $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$ . Die Arbeit, um ein Flüssigkeitselement durch das Rohr zu bewegen, muß gegen den Druck  $p_1$  geleistet werden. Die Kraft ist demnach  $F_1 = p_1 A_1$ . Man bekommt die Arbeit zu:

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1 \tag{2.7.10}$$

mit  $x_1$  der zurückgelegten Strecke und  $V_1 = A_1 x_1$  dem verdrängten Volumen. Die Arbeit im Querschnitt  $A_2$  ist:



Abbildung 2.7.2: An einer Verengung ist der Druck geringer, da die Flüssigkeit schneller strömt.

$$\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2 \tag{2.7.11}$$

Diese beiden Anteile sind Änderungen in der *potentiellen Energie* der Flüssigkeit  $E_{pot} = pV$  (analog zur Arbeit gegen die Gravitation  $mg\Delta x$  hat man hier eine Arbeit gegen einen Druck  $pA\Delta x$ ). Die *kinetische Energie*, die in der Bewegung der Flüssigkeit steckt ist:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\rho\Delta V v^2 \tag{2.7.12}$$

Damit wird die Gesamtenergie, die erhalten bleiben muß, zu:

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 \Delta V_2 \qquad (2.7.13)$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit sind die Volumina gleich ( $\Delta V_1 = \Delta V_2$ ) und  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  und man bekommt die sog. **Bernoulli-Gleichung** 

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
(2.7.14)

Ein allgemeiner Fall für die Energieerhaltung läßt sich ableiten, wenn wir berücksichtigen, daß die Arbeit auch gegen die Schwerkraft geleistet werden muß, wie in Abb. 2.7.3 illustriert. Wir bekommen einen analogen Ausdruck von:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$
 (2.7.15)

Obwohl die Bernoulli-Gleichung für inkompressible Medien ( $\Delta V_1 = \Delta V_2$ ) abgeleitet wurde, gilt sie auch für Gase bei nicht zu hohen Geschwindigkeiten.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.7.3: Bernoulli-Gleichung unter Berücksichtigung der Schwerkraft.

Bei niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten von Gasen ist die Änderung in der Dichte und damit die Änderung der Volumina klein. Erst beim Erreichen der Schallgeschwindigkeit wird die Beschreibung der Druckverhältnisse in strömenden Gasen schwieriger. Für die Bernoulli-Gleichung existieren zahlreiche anschauliche Beispiele:

## • Hydrodynamisches Paradoxon

Anhand dieser Gleichung läßt sich das **hydrodynamische Paradoxon** erklären (siehe Abb. 2.7.4). Betrachten wir zwei gegenüberliegende Blätter, wobei in den Spalt durch ein Rohr in einem der Blätter Luft hinein strömt. Anstatt das untere Blatt fort zu blasen, wird es angezogen. Woran liegt das? Die Luft die durch das Rohr strömt, durchläuft einen großen Querschnitt, während sie durch den Spalt zwischen den Blättern einen kleinen Querschnitt durchströmt. Dementsprechend steigt die Geschwindigkeit der Luftströmung zwischen den Blättern und der Druck sinkt. Nachdem der Außendruck höher wird als der Druck der zwischen den Blättern wirkt, werden dieses zusammengedrückt.

Nach einem ähnlichen Prinzip arbeitet auch das Anpressen von Rennwagen bei hohen Geschwindigkeit. Hier wird das Strömungsverhalten der Luft unterhalb des Rennwagens derartig beeinflusst, daß der Anpressdruck bei hohen Geschwindigkeiten groß wird.

### • Auftrieb eines Flugzeuges

Das identische Phänomen erklärt auch den Auftrieb eines Flugzeugs. Durch die Form eines Flugzeugflügels, wird die Luft, die oberhalb



Abbildung 2.7.4: Hydrodynamisches Paradoxon: Obwohl man durch das Rohr eine Luftströmung nach unten antreibt wird die Unterlage nach oben gedrückt.

über den Flügel streicht auf einen längeren Weg gezwungen (siehe Abb. 2.7.5). Dadurch muß sie *schneller* strömen, und der entsprechende Druck sinkt. Der Druck unterhalb des Flügels ist größer was den Auftrieb des Flugzeugs bewirkt. Verkehrsflugzeuge können den Krümmungsgrad ihrer Flügel aktiv beeinflussen um z.B. beim Landen trotz geringer Geschwindigkeit trotzdem eine große Auftriebskraft zu besitzen.

### • rotierender Zylinder, Magnuseffekt

Betrachten wir einen rotierenden Zylinder, der von Luft umströmt wird. Die Reibungskraft beschleunigt Luftteilchen vor der Oberfläche in Richtung der Bahngeschwindigkeit der Oberfläche. Auf einer Seite des Zylinders addieren sich die Geschwindigkeiten der umströmenden Luft und der mit gerissenen Luft und auf der anderen Seite subtrahieren sie sich. D.h. netto sind die Geschwindigkeiten auf beiden Seiten *unterschiedlich*. Dies führt zu einem Druckunterschied, der einen Vortrieb des Zylinders zur Folge hat. Dies bezeichnet man als **Magnuseffekt**.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 2.7.5: Der Auftrieb beim Flugzeug entsteht durch den Luftdruckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Flügels.

Es gibt Versuche, diesen Effekt auch als Vortrieb für Schiffe zu nutzen.

• Staurohr

Um die Geschwindigkeit eines Flugzeuges relativ zur umgebenden Luft zu messen, wird ein Staurohr verwendet. In dieses Staurohr dringt Luft ein und wird dort abgebremst. Dadurch erhöht sich der Druck. Durch einen Vergleich mit dem herrschenden Aussendruck kann die Geschwindigkeit des Flugzeuges bestimmt werden.

## 2.7.3 Strömung mit Reibung

Wie ändert sich der Transport, wenn wir berücksichtigen, daß in einer Flüssigkeit **Reibung** auftreten kann. Betrachten wir dazu zunächst eine Flüssigkeit, die an einer Wand entlang strömt. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit direkt vor der Wandoberfläche muß Null sein, während sie in der Mitte der strömenden Flüssigkeit sehr hoch werden kann. D.h. wir haben einen Gradienten in der Fließgeschwindigkeit senkrecht zur Oberfläche.

Diese unterschiedlichen Geschwindigkeiten können eine Reibungskraft erzeugen, die von dem *Unterschied* in der Geschwindigkeit abhängt. Betrachten wir eine Ebene in der Flüssigkeit mit der Fläche A parallel zur Wand (siehe Abb. 2.7.6), so kann diese Reibungskraft  $F_R$  von dem Unterschied der Fließgeschwindigkeit ober- und unterhalb dieser Ebene abhängen:

$$F_R = \eta A \left| \frac{dv}{dy} \right| \tag{2.7.16}$$

Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  gibt die Größe dieser Reibungskraft an, und wird als **Viskosität** bezeichnet (Einheit von  $\eta$  ist [**Pa** · **s**]).

Als Beispiel betrachten wir eine Flüssigkeit, die durch ein Rohr strömt (siehe Abb. 2.7.7). Die Reibungskraft an der Oberfläche eines Zylinders der

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### Pistolengarnelen

Pistolengarnelen können sehr laute Knallgeräusche wie Pistolenschüsse erzeugen indem sie ihren Scheren sich verhaken lassen. Wenn diese sich spontan lösen, erzeugen sie ein Druckgefälle an einer engen Stelle an der sich Kavitationsbläschen bilden. Diese zerplatzen anschließend und erzeugen das Geräusch. Kavitation ist ein Phänomen bei dem extreme Druckgradienten zu einer Bläschenbildung in Wasser führen. Wenn diese Bläschen kollabieren entsteht eine Druckwelle, die sich im Wasser ausbreitet. Eine solche Kavitation ist z.B. ein Schädigungsmechanismus von Schiffsschrauben.



Länge L und mit Radius r im Innern des Rohres, muß durch einen Druckunterschied zwischen dem Anfang des Zylinders  $p_1$  und dem Ende des Zylinders  $p_2$  aufgebracht werden. Dieses Kräftegleichgewicht ergibt:

$$\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} = r^2 \pi \left( p_1 - p_2 \right) \tag{2.7.17}$$

Dies ist eine Gleichung für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v(r) vom Radius r. Mit der Randbedingung, daß die Geschwindigkeit an der Wand v(r = R) = 0 ist, ergibt sich nach der Integration:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 2.7.6:** Geschwindigkeitsprofil einer strömenden Flüssigkeit vor einer Wand.

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} \left( R^2 - r^2 \right)$$
(2.7.18)

Die Menge an Flüssigkeit, die pro Zeit durch das Rohr fließt, ist das bewegte Volumen V pro Zeit t. Das Teilvolumen dV eines kleinen Hohlzylinders mit einem Innendurchmesser r und einem Aussendurchmesser r + dr bewegt sich in einer Zeit  $\Delta t$  um eine Strecke  $\Delta x$ :

$$\frac{dV}{\Delta t} = 2\pi r dr \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2\pi r dr v(r)$$
(2.7.19)

Dieses Volumen wird über den Radius integriert (von v(r = R) = 0 bis v(R - r)), und man bekommt schließlich das gesamte bewegte Volumen pro Zeit t:

$$\frac{V}{t} = \int_{r=0}^{R} 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi R^4 \left(p_1 - p_2\right)}{8\eta L}$$
(2.7.20)

Diesen Zusammenhang bezeichnet man als das Gesetz von Hagen-Poiseuille. Man erkennt, daß die Durchflußmenge mit dem Radius zur *vierten* Potenz ansteigt! D.h. eine sehr kleine Änderung des Radius eines Rohres fuhrt zu einer drastischen Erhöhung bzw. Erniedrigung der Durchflußmenge. Dies ist insbesondere wichtig für die Kontrolle des Blutstroms in unserem Körper. Schon kleinste Ablagerungen in den Blutgefäßen können die Durchflußmenge stark reduzieren. Dies kann nur kompensiert werden, wenn der Druckunterschied dementsprechend ansteigt, d.h. das Herz wird sehr stark belastet.

Die Reibung der Flüssigkeit am Übergang zu einem Festkörper führt zu einer Kraftwirkung. Auf der Basis von Gl. 2.7.16 für die Reibung zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, läßt sich die Reibung einer Kugel mit Radius  $R_K$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $v_0$  durch ein Medium bewegt, berechnen (Viskosität  $\eta$ ). Für dieses Problem erhält man schließlich die Reibungskraft, die der Bewegungsrichtung  $\vec{v}_0$  entgegen gerichtet ist:

$$\left|\vec{F}_R = -6\pi\eta R_K \vec{v}_0\right| \tag{2.7.21}$$

Diese Gleichung bezeichnet man als **Stokes'sches Gesetz**. Die Reibungskraft steigt *linear* mit der Geschwindigkeit an.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum




Abbildung 2.7.7: Strömungsgeschwindigkeit durch ein zylindrisches Rohr.



Abbildung 2.7.8: Stoke'sche Reibung.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# Kapitel 3

# Schwingungen und Wellen

# 3.1 Schwingungen

In vielen Systemen der Physik spielen Schwingungen eine große Rolle. Betrachtet man zum Beispiel die Atome in einem Molekül, so sind im Gleichgewicht die Länge der Bindungen und die Bindungswinkel vorgegeben. Lenkt man diese Atome aus ihrer Gleichgewichtslage aus, so wirkt eine rückstellende Kraft. Diese rückstellende Kraft führt zu einer Oszillation der Bindung um die Gleichgewichtslage. Eine Schwingung tritt auf.

# 3.1.1 Der harmonische Oszillator

Betrachten wir im folgenden den einfachen Fall einer Feder an dessen Ende sich eine Masse m befindet, wie in Abb. 3.1.1 illustriert. In Ruhe sei der Ort dieser Masse x = 0. Wird diese Feder ausgelenkt, so wirkt eine rückstellende Kraft F = -cx. Wie ändert sich die Position dieser Masse, wenn wir als Anfangsbedingungen x = 0 aber eine Geschwindigkeit  $v = \dot{x}(t = 0) = v_0$  vorgeben? Dazu schreiben wir zunächst das zweite Newton'sche Gesetz gemäß:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx\tag{3.1.1}$$

mit der Abkürzung

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \tag{3.1.2}$$

läßt sich die Gleichung umstellen zu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1.3}$$



Abbildung 3.1.1: Schwingende Masse m an einer Feder.

Wir wollen jetzt die Zeitabhängigkeit des Ortes x ermitteln. Dazu müssen wir eine Funktion x(t) finden, die die Gleichung 3.1.3 erfüllt. Dies kann durch zwei Funktionen erfüllt werden:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.1.4}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.1.5}$$

A bezeichnet die Amplitude der Schwingung,  $\omega_0$  die Kreisfrequenz und  $\varphi$  die Phase. Wir wollen eine Lösung finden für den Ansatz  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$  mit den Randbedingungen x(t = 0) = 0 und  $\dot{x}(t = 0) = v_0$ . Wir bekommen für die erste und zweite Ableitung:

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.1.6}$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{3.1.7}$$

Man erkennt, daß der Ansatz die Gl. 3.1.3 erfüllt. Aus der Randbedingung bekommen wir:

$$v_0 = A\omega_0 \cos\varphi \tag{3.1.8}$$

und  $\varphi = 0$  für x(0) = 0. Damit ergibt sich  $a = \frac{v_0}{\omega_0}$  und wir erhalten als Lösung:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{3.1.9}$$

Der Verlauf des Ortes und der Geschwindigkeit sind in Abb. 3.1.2 dargestellt. Bei den Orten x = 0 ist die Geschwindigkeit maximal, während bei maximaler Auslenkung am Umkehrpunkt x = A der Schwingung die Geschwindigkeit 0 ergibt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 3.1.2:** Zeitabhängigkeit von Ort x und Geschwindigkeit  $\dot{x}$  einer schwingenden Masse m.

Man kann jede Schwingung durch eine Cosinus bzw. Sinus-Funktion darstellen, wobei man die Phase den Anfangsbedingungen entsprechend auswählt. Die Phase  $\varphi$  einer Schwingung ist in Abb. 3.1.3 graphisch veranschaulicht.



Abbildung 3.1.3: Phase einer Schwingung.

Die Lösung x(t) läßt sich auch für das Fadenpendel ableiten. Die Komponente der Schwerkraft in Richtung der Bewegungsrichtung des ausgelenkten Pendels ist (siehe Abb. 3.1.4):

$$F = -\sin\varphi mg \tag{3.1.10}$$



Abbildung 3.1.4: Ein Pendel führt eine harmonische Schwingung für kleine Auslenkungen durch.

Dies eingesetzt in das zweite Newton'sche Gesetz ergibt:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin\varphi mg \tag{3.1.11}$$

mit  $x = l \sin \varphi$  ergibt sich ähnlich zu Gleichung 3.1.3 wieder:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0 \tag{3.1.12}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \tag{3.1.13}$$

Man erkennt, daß die Frequenz eines Pendels nicht von der Masse des Körpers abhängt, sondern nur von der Länge des Pendels.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# Lösung der Schwingungsgleichung für allgemeine Fälle mit der komplexen e-Funktion

Die Lösung der Schwingungsgleichung läßt sich auch eleganter ableiten indem man zunächst einen komplexen Ansatz wählt:

$$x(t) = ce^{i\omega_0 t} \tag{3.1.14}$$

Die komplexe Exponentialfunktion setzt sich aus dem Cosinus als Realteil und dem Sinus als dem Imaginärteil zusammen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{3.1.15}$$

Umgekehrt lassen sich auch Cosinus und Sinus wiederum durch komplexe Exponentialfunktionen ausdrücken:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i} \left( e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} \right) \tag{3.1.16}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \left( e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} \right) \tag{3.1.17}$$

Bei dem Ansatz der komplexen Exponentialfunktion als Lösung einer Schwingungsgleichung beschreibt der Realteil, dann den Verlauf der Amplitude, wie in Abb. 3.1.5 illustriert ist. Der Vorteil besteht in der Tatsache, daß die Lösungen sowohl einen imaginären (einer komplexen Exponentialfunktion entsprechend Cosinus und Sinus) als auch einen reellen Anteil haben können (normale Exponentialfunktion). Dieser Ansatz vereinfacht besonders die Beschreibung gedämpfter und erzwungener Schwingungen, wie weiter unten demonstriert wird. Die Amplitude und die Phase einer Schwingungen können mit dem komplexen Ansatz schnell ermittelt werden. Diese Parameter werden dann für die reelle Funktionen Cosinus oder Sinus als entsprechenden Amplitude und Phase verwendet, um den Verlauf der Schwingung im Ortsraum zu beschreiben.



Abbildung 3.1.5: Die Lösung einer Schwingungsgleichung kann man in der komplexen Ebene darstellen.

Benutzen wir diesen Ansatz noch einmal für die Lösung der Schwingungsgleichung in der Form:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1.18}$$

Wir verwenden zunächst wieder einen sehr allgemeinen Ansatz:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$
(3.1.19)

Die erste Ableitung ist:

$$x(0) = v_0 = c_1 \iota \omega_0 - c_2 \iota \omega_0 \tag{3.1.20}$$

Aus der Randbedingung x(t = 0) = 0 bekommen wir:

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 \tag{3.1.21}$$

D.h.  $c_1 = -c_2$  und  $|c_1| = |c_2| = c$ . Aus  $v(t = 0) = v_0$  bekommen wir:

$$\frac{\nu_0}{\omega_0} = 2ci \tag{3.1.22}$$

Wenn wir diese Randbedingungen für die Unbekannten  $c_1$  und  $c_2$ einsetzen erhalten wir schließlich:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \frac{1}{2i} \left( e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$
(3.1.23)

Man erkennt, daß man eine identische Lösung wie Gl. 3.2.1 erhält.

Betrachten wir jetzt den Fall, daß die Schwingung gedämpft sei. Beispiel sei eine Feder, bei der sich die Masse durch ein viskose Flüssigkeit bewegt. Nach dem Stokes'schen Gesetz (Gl. 2.7.21) ist die Dämpfung der Bewegung proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{x}$ . D.h. die Bewegungsgleichung müssen wir um einen **Dämpfungsterm** proportional zu einer Dämpfungskonstante  $\gamma$  erweitern:

$$m\ddot{x} = -cx - 2\gamma m\dot{x} \tag{3.1.24}$$

bzw.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1.25}$$

Wir verwenden jetzt eine exponentiellen Ansatz wobei die unbekannten Faktoren cund $\lambda$  jeweils komplexe Zahlen sein können:

$$x(t) = ce^{\lambda t} \tag{3.1.26}$$

Mit diesem Ansatz bekommen wir als Bestimmungsgleichung für  $\lambda$ 

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3.1.27}$$

mit den beiden Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{3.1.28}$$

D.h. die vollständige Lösung ist:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 t}} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2 t}} \right]$$
(3.1.29)

Wir erkennen, daß durch die Wahl des Ansatzes sofort ein Anteil einer normalen Exponentialfunktion entsteht  $(e^{-\gamma t})$ , der die Dämpfung der Schwingungsamplitude wiedergibt. Die anderen Terme können je nach Verhältnis zwischen  $\gamma$  und  $\omega_0$  reell oder komplex werden. Hieran erkennt man den effizienten Weg zu einer Lösung, die durch den formalen Ansatz einer komplexen Exponentialfunktion gelingt.

Welche typische Lösungen ergeben sich jetzt für die Zeitabhängigkeit von x(t). Wir können drei Fälle unterscheiden:

#### • $\gamma \ll \omega_0$ schwache Dämpfung

Falls die Dämpfung  $\gamma$ sehr klein gegen die Frequen<br/>z $\omega_0$ ist, so ist $\omega$ eine reelle Zahl:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \tag{3.1.30}$$

Damit bekommen wir für die beiden Lösungen für  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = -\gamma \pm \imath \omega \tag{3.1.31}$$

Damit ergibt sich eine Schwingung der Form:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \right]$$
(3.1.32)

Aus den Anfangsbedingungen  $x(0)=A_0$  und v(0)=0 ergibt sich die Lösung zu:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) \tag{3.1.33}$$

Wir erhalten eine Schwingung, deren Amplitude exponentiell abnimmt, wie in Abb. 3.1.6 gezeigt.

#### • $\gamma \gg \omega_0$ starke Dämpfung

Falls die Dämpfung sehr stark ist, so können wir den Ausdruck

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \alpha \tag{3.1.34}$$

mit  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  einer reellen Zahl ausdrücken und erhalten:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} \right]$$
 (3.1.35)

Falls man als Anfangsbedingung  $v(0) = v_0$  und x(0) = 0 wählt, so bekommt man die Lösung:

$$x(t) = \frac{v_0}{2\alpha} e^{-\gamma t} \left[ e^{\alpha t} - e^{-\alpha t} \right]$$
(3.1.36)

Der Verlauf x(t) entspricht einem Kriechen der Feder, da die Amplitude sehr langsam zurück geht.

#### • $\gamma = \omega_0$ aperiodischer Grenzfall

Falls die Dämpfung $\gamma$ genau gleich der Frequen<br/>z $\omega_0$ ist, so bekommt man die Lösung:

$$\lambda = -\gamma \tag{3.1.37}$$

Man benutzt diese Randbedingung für die Lösung der Form  $x(t) = c(t)e^{-\gamma t}$ . Setzt man dies in die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung ein, bekommt man eine Bedingung für  $\ddot{c} = 0$  und für  $c = c_1 t + c_2$ . Aus den Anfangsbedingungen x(0) = 0 und  $v(0) = v_0$  ergibt sich die Lösung für  $c_2 = 0$ und  $c_1 = v_0$ . Damit erhält man:

$$x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} (3.1.38)$$

Der aperiodische Grenzfall entspricht der *schnellst möglichen* Rückkehr in die Gleichgewichtslage bei der kein Überschwingen des Pendels/Feder erfolgt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Ein wichtiger Fall ist die erzwungene Schwingung. Man stelle sich dazu eine Feder vor, deren Aufhängepunkt über einen Exzenter mit einer periodischen Kraft  $F = F_0 \cos \omega t$  angetrieben wird. Die Bestimmungsgleichung ist jetzt gegeben als:

$$m\ddot{x} = -cx - 2\gamma m\dot{x} + F_0 e^{i\omega t} \tag{3.1.39}$$

mit c der Federkonstante,  $\gamma$  der Dämpfung und  $F_0$  der Amplitude der anregenden Kraft, die mit einer Frequenz  $\omega$  die Bewegung der Feder moduliert. Mit der Beschleunigung  $a = F_0/m$  bekommen wir:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = a e^{i\omega t} \tag{3.1.40}$$

Auch hier verwenden wir wieder den Ansatz

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \tag{3.1.41}$$

und bekommen als Bestimmungsgleichung:

$$-\omega^2 A + 2\gamma \iota \omega A + \omega_0^2 A = a \tag{3.1.42}$$

Die komplexe Amplitude der Schwingung ist:

S

$$A = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma \iota \omega} = |A|e^{i\varphi}$$
(3.1.43)

Mit dem Realteil:

$$\Re A = \frac{a\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2} = |A|\cos\varphi$$
(3.1.44)

und dem Imaginärteil

$$\Im A = -\frac{2a\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2} = |A|\sin\varphi \qquad (3.1.45)$$

Die Amplitude und Phase sind Funktionen sowohl der Eigenfrequenz der Feder  $\omega_0$  als auch der externen Erregerfrequenz  $\omega$ . Für den Betrag der Amplitude bekommt man:

$$A(\omega)| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$
(3.1.46)

und für die Phase bekommt man:

$$\tan\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3.1.47}$$

D.h. die Amplitude der Feder wird maximal, wenn die Frequenz mit der angeregt wird folgende Bedingung erfüllt:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{3.1.48}$$

Dies bezeichnet man als **Resonanz**.

### 3.1.2 Die gedämpfte Schwingung

Betrachten wir jetzt den Fall, daß die Schwingung gedämpft sei. Beispiel sei eine Feder, bei der sich die Masse durch ein viskose Flüssigkeit bewegt. Nach dem Stokes'schen Gesetz (Gl. 2.7.21) ist die Dämpfung der Bewegung proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{x}$ . D.h. die Bewegungsgleichung müssen wir um einen **Dämpfungsterm** proportional zu einer Dämpfungskonstante  $\gamma$  erweitern:

$$m\ddot{x} = -cx - 2\gamma m\dot{x} \tag{3.1.49}$$

bzw.

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.1.50}$$

Für den Fall einer schwache Dämpfung bekommt man:

Aus den Anfangsbedingungen  $x(0) = A_0$  und v(0) = 0 ergibt sich die Lösung zu:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) \tag{3.1.51}$$

Falls die Dämpfung  $\gamma$  genau gleich der Frequenz  $\omega_0$  ist, so bekomm erhält als Lösung den so genannten aperidischen Grenzfall:

$$x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} (3.1.52)$$

Der aperiodische Grenzfall entspricht der *schnellst möglichen* Rückkehr in die Gleichgewichtslage bei der kein Überschwingen des Pendels/Feder erfolgt (siehe Abb. 3.1.7). Bei jedem Stoßdämpfer ist es wesentlich, daß die Dämpfung genau so eingestellt ist, daß der aperiodische Grenzfall realisiert ist. Nur dann kehrt die Feder schnellst möglich in die Ausgangslage zurück. Ist die Dämpfung zu klein, so schwingt das System nach. Ist die Dämpfung zu groß, so kann sich z.B. der Stoßdämpfer nach der ersten Bodenwelle nicht schnell genug in die Ausgangslage zurück bewegen, um eine nachfolgende Bodenwelle gut zu absorbieren.

## 3.1.3 Die erzwungene Schwingung

Ein wichtiger Fall ist die erzwungene Schwingung. Man stelle sich dazu eine Feder vor, deren Aufhängepunkt über einen Exzenter mit einer periodischen Kraft  $F = F_0 \cos \omega t$  angetrieben wird (siehe Abb. 3.1.7). Die Bestimmungsgleichung ist jetzt gegeben als:

$$m\ddot{x} = -cx - 2\gamma m\dot{x} + F_0 e^{i\omega t} \tag{3.1.53}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 3.1.6:** Gedämpfte Schwingung für die Randbedingungen x(0) = 0 und  $\dot{x}(0) = v_0$ : bei sehr großer Dämpfung  $\gamma \gg \omega_0$  kehrt die Feder nur langsam in die Ausgangslage zurück, sie kriecht; für  $\gamma = \omega_0$  kehrt die Feder schnellst möglich zurück *ohne* überzuschwingen; für  $\gamma \ll \omega_0$  wird die Schwingung sehr langsam gedämpft.

Die Amplitude und Phase sind Funktionen sowohl der Eigenfrequenz der Feder  $\omega_0$  als auch der externen Erregerfrequenz  $\omega$ . Für den Betrag der Amplitude bekommt man:

$$|A(\omega)| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$
(3.1.54)

und für die Phase bekommt man:

$$\tan\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3.1.55}$$

D.h. die Amplitude der Feder wird maximal, wenn die Frequenz mit der angeregt wird folgende Bedingung erfüllt:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{3.1.56}$$

Dies bezeichnet man als **Resonanz**. Amplitude und Phase sind in Abb. 3.1.8 gezeigt. Man kann drei Bereiche identifizieren:

•  $\omega < \omega_0$ 

Diese Phasenänderung läßt sich anschaulich verstehen: bei kleinen anregenden Frequenzen  $\omega$ , folgt die Feder direkt der externen Erregung. Nachdem die Eigenfrequenz  $\omega_0$  sehr viel größer als  $\omega$  ist, kann das System Feder beliebig schnell folgen. Die Feder läuft der externen Erregung hinterher und der Ort des Exzenters und der Ort der schwingenden Masse ändern sich jeweils in gleicher Weise, d.h. der Phasenwinkel  $\varphi$  ist klein.



**Abbildung 3.1.7:** Beispiel für eine erzwungene Schwingung: eine äußere Kraft bewegt periodisch den Aufhängepunkt einer Feder.

•  $\omega \simeq \omega_0$ 

Für  $\omega \simeq \omega_0$  ist die Phase ungefähr  $-\pi/2$ , d.h. Erregung und Schwingung erfolgen um 90° phasen-verschoben. Die Amplitude im Bereich der Erregerfrequenz  $\omega \simeq \omega_0$  ist sehr groß. Man spricht von einer **resonanten** Erregung der Feder. Bei einer Phasenverschiebung von  $-\pi/2$ ist am Umkehrpunkt der Feder, die Geschwindigkeit der Erregung maximal. D.h. die Feder wird an den Umkehrpunkten durch die externe Kraft maximal beschleunigt. Dadurch schaukelt sich die Schwingung auf. Dies ist ähnlich zu dem Beschleunigen einer Schaukel, bei der ein optimaler Effekt erzielt wird, wenn diese Schaukel genau im Moment des Umkehrpunktes stark angeschoben wird.

•  $\omega > \omega_0$ 

Für  $\omega \gg \omega_0$  kann die Feder der Bewegung *nicht* mehr folgen, sie hinkt nach (negative Phase). Die Auslenkung der Feder erfolgt später als die Auslenkung des Erregers. Bei sehr hohen Frequenzen erfolgt die Bewegung genau gegenphasig. Die Amplitude der Anregung läuft gegen Null, d.h. die Feder kann der externen Anregung nicht mehr folgen. Dies wird eindrucksvoll bei Lichtwellen sichtbar: dort müssen die Elektronen, den Schwingungen des elektrischen Feldes (=der Lichtwelle) folgen. Bei sehr hohen Frequenzen ist das nicht mehr möglich. So werden viele Materialien zum Beispiel für Licht mit Frequenzen im Röntgenbereich *durchsichtig*.

Bei der erzwungenen Schwingung wird Energie durch die äußere Kraft in

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 3.1.8: Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung.

die Bewegung der Schwingung hin<br/>ein gepumpt. Man kann zwei charakteristische Amplituden definieren. Für<br/>  $\omega \to 0$ ergibt sich die Schwingungsamplitude zu:

$$|A|_{\omega \to 0} = \frac{a}{\omega_0^2} \tag{3.1.57}$$

Im Maximum für schwache Dämpfung  $\gamma \ll \omega_0$  bekommt man eine Amplitude von:

$$|A|_{max.} = \frac{a}{2\gamma\omega_0} \tag{3.1.58}$$

D.h. wenn die Dämpfung sehr klein wird läuft die Amplitude der Schwingung gegen unendlich, da dem System durch die externe Kraft kontinuierlich Energie zugeführt wird. Das Verhältnis dieser beiden Amplituden bezeichnet man als **Güte** des Resonators:

$$Q = \frac{|A|_{max}}{|A|_{\omega \to 0}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$
(3.1.59)

# 3.2 Wellen

Schwingungen beschreiben die zeitliche Entwicklung einer Oszillation. Hat man allerdings eine lokale Quelle, die ein umgebendes Medium anregt, so kann sich diese Schwingung auch räumlich ausbreiten. Eine Welle entsteht.

# 3.2.1 Ausbreitung von Wellen

Die Ausbreitung von Wellen läßt sich an Abb. 3.2.1 verdeutlichen. Beginnt man ein Seil zu einem Zeitpunkt t = 0 periodisch zu bewegen, so pflanzt sich diese Schwingung auf dem Seil fort. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Wellenberges bezeichnet man als **Phasengeschwindigkeit**  $v_{Phase}$ .



Abbildung 3.2.1: Ausbreitung einer Schwingung auf einem Seil.

Die Tatsache, daß diese Welle sich mit der Zeit tmit einer Geschwindigkeit  $v_{phase}$ ausbreitet, läßt sich durch den Ansatz

$$x(z,t) = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_{Phase}}\right)\right]$$
 (3.2.1)

beschreiben. Wie erklärt sich diese Phasengeschwindigkeit? Betrachten wir dazu einen Beobachter, der sich mit der Phasengeschwindigkeit mit der Welle mit bewegt (wie ein Surfer auf einer Wasserwelle). Der Ort dieses Surfers ändert sich somit wie:

$$z_{surfer} = v_{Phase}t \tag{3.2.2}$$

Setzt man dies in 3.2.1 ein, so erkennt man, daß  $x(z_{Surfer}, t) = const.$ wird. D.h. die Amplitude am Ort dieses Surfers ändert sich *nicht*, er reitet auf der Welle.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Gleichung 3.2.1 beschreibt die Amplitude x als eine Funktion von Zeit und Ort. Den räumliche Abstand zwischen zwei Orten mit einem Phasenunterschied von  $2\pi$  bezeichnet man als **Wellenlänge**  $\lambda$ :

$$\omega\left(t - \frac{z_2}{v_{Phase}}\right) - \omega\left(t - \frac{z_1}{v_{Phase}}\right) = 2\pi \tag{3.2.3}$$

mit  $z_2 - z_1 = \lambda$  erhält man somit:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v_{Phase} \tag{3.2.4}$$

 $\omega$  war die sog. **Kreisfrequenz**, d.h. die Änderung des Winkels pro Zeit. Die **Frequenz** f ist die Zahl der Schwingungen pro Sekunde:

$$2\pi f = \omega \tag{3.2.5}$$

Nach Gl. 3.2.4 ergibt sich der Zusammenhang:

$$f = \frac{v_{Phase}}{\lambda} \tag{3.2.6}$$

Gl. 3.2.1 läßt sich somit kompakt schreiben als:

$$x(z,t) = A\sin(\omega t - kz) \tag{3.2.7}$$

mit k der sog. Wellenzahl.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3.2.8}$$

Man unterscheidet **longitudinale** und **transversale Wellen**: bei longitudinalen Wellen erfolgt die Auslenkung in Richtung der Wellenausbreitung, während bei transversalen Wellen die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung erfolgt. Dies ist in Abb. 3.2.2 veranschaulicht.

In vielen praktischen Anwendungen muß diese Wellengleichung für die Ausbreitung von Wellen in unterschiedlichen Medien gelöst werden. Dies soll an drei Beispielen erläutert werden:

#### • Seilschlaufe, transversale Welle

Betrachten wir eine Seilschlaufe, die sich mit der Phasengeschwindigkeit v ausbreitet, wie in Abb. 3.2.3 gezeigt. Die Phasengeschwindigkeit dieser transversalen Welle läßt sich aus einer einfachen Kraftbilanz ableiten. Wir gehen in ein bewegtes Bezugssystem, das sich mit v bewegt. D.h. die Seilschlaufe bleibt ortsfest und das Seil bewegt



Abbildung 3.2.2: Transversal- und Longitudinalwellen.

sich mit -vdurch einen gekrümmten Bereich mit Krümmungsradius Rhindurch. Die Zugspannung  $\sigma$  versucht das Seil gerade zu ziehen, während die Zentrifugalkraft die Seilschlaufe aufrecht erhält. Bei einem Krümmungsradius Rist die Zugkraft gegeben als:

$$F_{Zugspannung} = 2\sigma A \sin \Theta \tag{3.2.9}$$

Nur die Komponente  $\sigma \sin \Theta$  der Zugspannung wirkt der Auslenkung entgegen. Die Querschnittsfläche des Seils sei A. Gemäß Abb. 3.2.3 ist der Winkel  $\Theta$  mit der Länge  $\Delta l$  verknüpft wie:



**Abbildung 3.2.3:** Auslenkung eines Seilstückes einer Seilwelle, die sich mit v ausbreitet.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{\Delta l}{2}\frac{1}{R} = \sin\Theta \tag{3.2.10}$$

D.h wir bekommen:

$$F_{Zugspannung} = \sigma A \frac{\Delta l}{R} \tag{3.2.11}$$

Diese Kraft ist im Gleichgewicht mit der Zentrifugalkraft:

$$F_{Zentrifugal} = \Delta m \frac{v^2}{R} = \rho A \Delta l \frac{v^2}{R}$$
(3.2.12)

mit  $\rho$  der Dichte des Seils. Wir bekommen somit aus dem Vergleich von Gl. 3.2.11 und 3.2.12 die Phasengeschwindigkeit zu:

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \tag{3.2.13}$$

D.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist proportional zur Wurzel aus der Zugspannung. Man bemerke, daß die Phasengeschwindigkeit dieser transversalen Welle *nicht* von den elastischen Eigenschaften des Seils abhängt.

#### • Dichtewelle in einem Festkörper, longitudinale Welle

Eine longitudinalen Welle bei der sich die Dichte in dem Medium periodisch ändert, bezeichnet man generell als **Schallwelle**. Es sei ein Material gegeben, durch das eine ebene Dichtewelle in z-Richtung läuft (siehe Abb. 3.2.4). In einem Volumenelement der Ausdehnung dz herrscht links und rechts ein unterschiedliche Druckspannung  $\sigma$ , die zu einer Auslenkung einer Schicht des Mediums um dx führt. Die Änderung der Kraft dF über eine Länge dz ist

$$dF = A(\sigma + d\sigma) - A\sigma = Ad\sigma \qquad (3.2.14)$$

Die Druckspannung ist mit den elastischen Eigenschaften des Mediums verknüpft. Die relative Längenänderung ist  $\epsilon = \frac{dx}{dz}$ . Mit  $\sigma = \epsilon E = E \frac{dx}{dz}$  ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{dz} = E \frac{d^2 x}{dz^2} \tag{3.2.15}$$



Abbildung 3.2.4: Ausbreitung einer Schallwelle in einem Medium.

D.h. die Kraft dF ergibt sich aus:

$$dF = AE \frac{d^2x}{dz^2} dz \tag{3.2.16}$$

Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung einer Masse dm im Volumenelement Adz:

$$dF = dm \frac{d^2x}{dt^2} = \rho \frac{d^2x}{dt^2} dV = \rho A dz \frac{d^2x}{dt^2}$$
(3.2.17)

Vergleichen wir Gl.3.2.16 und 3.2.17, so erkennen wir als Wellengleichung wieder:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{v^2} \frac{d^2x}{dz^2}$$
(3.2.18)

Aus dem Vergleich mit Gl. ??, bekommt man als Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle:

$$v_{Phase} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.2.19}$$

Man erkennt, daß die longitudinale Welle im Unterschied zu der transversalen von den elastischen Eigenschaften (gegeben durch E) des Materials abhängt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schallwelle in einem Material wird ausgenutzt, um dessen elastische Eigenschaften zu bestimmen. Hierzu wird über eine Anregung mittels Laser oder

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Piezoelementen eine Schallwelle erzeugt und die Laufzeit dieser Welle gemessen. Mit bekannter Dichte des Materials läßt sich damit das Elastizitätsmodul (sogar richtungsabhängig) ermitteln.

#### • Dichtewelle in einem Gas

Eine longitudinale Welle in einem Gas entspricht einer räumlichen und zeitlichen Änderung des Luftdrucks. Dies nehmen wir als Ton wahr. Die rückstellende Kraft in benachbarten Volumenelementen ist in Analogie zu Gl. 3.2.14 immer:

$$dF = (p+dp)A - pA = Adp \qquad (3.2.20)$$

In Analogie zu der Ableitung der Schallwelle in einem Festkörper ergibt sich dann eine Phasengeschwindigkeit in einem Gas von:

$$v_{Phase} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \tag{3.2.21}$$

mit p dem Druck und  $\rho$  der Dichte des Gases. Reduziert man zum Beispiel die Dichte des Mediums (Schallausbreitung in Helium statt in Luft), so wird die Phasengeschwindigkeit höher, und die Dichteschwankungen erreichen schneller unser Ohr. Dies nehmen wir als höhere Frequenz wahr.

### 3.2.2 Energiedichte einer Welle

Für das Wahrnehmen von Wellen ist deren Intensität maßgeblich. Um die Intensität einer Welle zu bestimmen, beginnen wir zunächst mit der Beschreibung einer Welle gemäß:

$$x = A\sin(\omega t - kz) \tag{3.2.22}$$

Die Intensität einer Welle ist der Transport von Energie mit der Phasengeschwindigkeit. Die Energie der Welle besteht aus zwei Beiträgen, der potentiellen und der kinetischen Energie:

#### • kinetische Energie

Die kinetische Energie, die durch die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  festgelegt ist, ist gegeben als:



$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Delta m \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\Delta m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz)$$
(3.2.23)

Für die Intensität ist die zeitlich gemittelte Energie maßgeblich. Die zeitliche Mittelung über eine Periode von  $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$  ergibt den Faktor 1/2. Damit bekommt man:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{4} \Delta m A^2 \omega^2 \tag{3.2.24}$$

### • potentielle Energie

Die potentielle Energie, die in der Schwingung steckt ist gegeben durch die Arbeit, die gegen die rückstellende Kraft geleistet wird (F = -cx). Mit  $E_{pot} = -\int F dx$  bekommt man für die potentielle Energie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}cx^2 = \frac{1}{2}cA^2\sin^2(\omega t - kz)$$
(3.2.25)

130

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Auch hier wird das zeitliche Mittel benötigt mit  $\langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$ . Mit  $\omega^2 = \frac{c}{\Delta m}$  bekommen wir:

$$\langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{4} \Delta m A^2 \omega^2 \tag{3.2.26}$$

Man erhält somit für die Gesamtenergie der Welle:

$$\langle E \rangle = \langle E_{pot} \rangle + \langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} \Delta m A^2 \omega^2$$
 (3.2.27)

Die Intensität pro Fläche ist die Energie, die sich in der Welle pro Volumen mal der Phasengeschwindigkeit  $v_{phase}$  ausbreitet. Damit bekommt man mit  $\Delta m = \rho \Delta V$ :

$$I = \frac{E}{\Delta V} v_{Phase} = \frac{1}{2} v_{Phase} \rho A^2 \omega^2$$
(3.2.28)

D.h. die Intensität nimmt mit dem Quadrat der Amplitude A und der Frequenz  $\omega$  zu. Diese Formel beschreibt zum Beispiel auch die Intensität von Schallwellen. Schallwellen sind longitudinale Druckschwankungen  $\delta p$  in einem Medium mit dem Druck p. Die Intensität dieser Welle I skaliert wie  $\delta p^2$ . Man definiert damit den sogenanten Schalldruckpegel  $L_p$  als dimensionslose Zahl wie:

$$L_p = 10 \log \frac{\delta p^2}{p^2}$$
 [dB] (3.2.29)

Das ist zu unterscheiden von der so genannten **Lautstärke** in der Einheit **Dezibel dB**, die den Bezug zur menschlichen *Hörschwelle* definiert:

Lautstärke = 
$$10 \log \frac{I}{I_0}$$
 [dB] (3.2.30)

Diese Hörschwelle ist abhängig von der Frequenz und liegt bei 1 kHz bei einer Intensität von  $I_0 \sim 10^{-12}$  Wm<sup>-2</sup> liegt. Das menschliche Gehör kann Frequenzen von 16 Hz bis zu 16 kHz wahrnehmen und wird von Lautstärken bis 100 dB gerade noch nicht dauerhaft geschädigt. Allerdings werden Geräusche unterschiedlicher Frequenz unterschiedlich laut wahrgenommen. Diese *emp*fundene Lautstärke ist in Abbildung 3.2.5 gezeigt. Man erkennt, daß insbesondere im Bereich um 1000 Hz, also der normalen Tonlage des Sprechens (Kammerton **a** entspricht 440 Hz), die wahre Lautstärke und die empfundene ungefähr gleich sind. Nur sehr tiefe und sehr hohe Töne werden als sehr viel lauter registriert.

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 3.2.5:** Schalldruckpegel  $L_p$  in Dezibel im Vergleich zu einer Kurve konstanter Lautstärke  $L_s$  in Abhängigkeit von der Frequenz.

# 3.2.3 Beugung, Brechung und Reflexion von Wellen

#### Das Huygens'sche Prinzip

Wellen breiten sich räumlich aus und können sich entsprechend überlagern. Dabei tritt konstruktive und destruktive Interferenz auf. Diese Ausbreitung von Wellen in einem Medium mit gegebene äußeren Randbedingungen wie Grenzflächen, Blenden etc. läßt sich sehr elegant ableiten, wenn man das Huygens'sche Prinzip bemüht:

Jede Welle läßt sich als Überlagerung von Kugelwellen darstellen.

Dies soll im folgenden erläutert werden. Betrachten wir zunächst eine Welle, die von einem Punkt ausgehen soll. Das Wellenbild das sich ergibt ist eine **Kugelwelle**, wie in Abb. 3.2.6 illustriert. Die Intensität der Welle ändert sich mit dem Abstand zur Quelle wie (siehe Gl. 3.2.27):

$$I \propto v f(r)^2 \omega^2 \rho \tag{3.2.31}$$

wobei f(r) zunächst eine allgemeine Abhängigkeit der Amplitude vom Abstand darstellen soll. Wegen der Energieerhaltung darf die Intensität *integriert* über die Oberfläche einer Kugel, die die Quelle im Abstand r umschließt, allerdings nicht ab- (für den Fall keiner Dämpfung) oder zunehmen.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 3.2.6: Eine Kugelwelle geht von einem Punkt radial aus.

D.h. wir müssen fordern, daß die Intensität  $I_{gesamt}$ , die sich durch Integration über alle Raumrichtungen  $(4\pi r^2)$  ergibt, gegeben ist als:

$$I_{gesamt} \propto v f(r)^2 4\pi r^2 = \text{const.}$$
(3.2.32)

Daraus folgt direkt, daß  $f(r) \propto \frac{1}{r}$ . Somit bekommen wir als allgemeinen Ansatz für eine Kugelwelle die Form:

$$x(r,t) = \frac{A}{r}\sin\left(\omega t - kr\right) \tag{3.2.33}$$

oder

$$x(r,t) = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr)}$$
(3.2.34)

Betrachten wir jetzt eine einfache *ebene* Welle auf der Basis des Huygens'schen Prinzips. Auf einer Linie seien unendliche viele Punktquellen angeordnet, die alle in gleicher Phase und Frequenz Kugelwellen aussenden. Aus Abb. 3.2.7 wird ersichtlich, daß sich an Orten parallel zu der Linie der Punktquellen, Orte gleicher Phasen ergeben (gestrichelte Linien in Abb. 3.2.7). D.h. eine ebene Welle entsteht.

#### Beugung einer Welle

Betrachten wir noch einmal eine Welle, die allerdings aus einem räumlich begrenzten Bereich emittiert wird. Dies kann zum Beispiel den Durchgang einer ebenen Welle durch einen Spalt der Breite d sein. Dazu verteilen wir zunächst N Punktquellen auf einer Strecke der Länge d, die bei gleicher Frequenz und Phase Kugelwellen aussenden. Wir suchen die Amplitude  $x(\alpha)$ der Welle an einem Ort P, der gemäß der Abb. 3.2.8 im Abstand r unter



Abbildung 3.2.7: Die Überlagerung von Punktquellen auf einer geraden Linie, die mit gleicher Phasenlage und Frequenz eine Kugelwelle aussenden, ergibt eine ebene Welle.

einem Winkel  $\alpha$  zur Normalen der Ebene des Spaltes liegt. Bei der Superposition der N Punktquellen (Index n = 1..N) ist insbesondere die Phase  $\Delta \varphi$ der Punktquellen untereinander wichtig. Nachdem  $d \ll r$  gelten soll, ist der Unterschied in den Entfernungen  $r_1$  bis  $r_N$  (siehe Abb. 3.2.8) der einzelnen Punktquellen sehr klein, so daß die Abhängigkeit der Kugelwellen gemäß 1/rdurch eine einzige Amplitude a (a = f(r)) gut genähert ist. Was allerdings nicht vernachlässigt werden darf, ist die *Phasenverschiebung*  $\Delta \varphi_n$  der einzelnen Punktquellen untereinander. Wir bekommen somit für die Amplitude  $x(\alpha)$  einen allgemeinen Ansatz von:

$$x(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} a e^{i(\omega t - kr - \Delta\varphi_n)}$$
(3.2.35)

Wenn wir zwei benachbarte Punktquellen im Abstand  $\delta$  betrachten, bekommen wir einen Phasenunterschied gemäß Abb. 3.2.14 von:

$$\Delta \varphi_1 = k \sin \alpha \delta \tag{3.2.36}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 3.2.8: Räumliche Überlagerung der Wellen von N Punktquellen mit einem Abstand  $\delta$  zueinander an einem Ort P.

Das Beugungsmuster, das dabei entsteht ist gegeben als:

$$I(\alpha) \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} \tag{3.2.37}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$x = \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{1}{2}dk\sin\alpha = \frac{1}{2}d\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha \qquad (3.2.38)$$

Aus Abb. 3.2.9 erkennt man, daß ein sog. **Beugungsmuster** entsteht. Klassisches Beispiel für diesen Effekt sind Lichtwellen, die durch eine Blende begrenzt werden, und ein Photopapier dahinter belichten. Die Breite des entstehenden Beugungsmusters hängt empfindlich vom Verhältnis  $d/\lambda$  ab:

•  $d \ll \lambda$ 

Falls die Wellenlänge  $\lambda$  der ebenen Welle sehr viel größer als die Ausdehnung *d* der Blende ist, so bekommt man auch für große Werte von  $\alpha$  immer noch kleine Werte für *x*. D.h. gemäß Abb. 3.2.9 entsteht eine große Intensität an Orten, die sich unter einem großen Winkel  $\alpha$  befinden. D.h durch die Beugung können wir mit einer großen Wellenlänge einen kleinen Spalt *nicht scharf* abbilden.

•  $d \gg \lambda$ 



**Abbildung 3.2.9:** Die Beugung einer Welle an einem Spalt ergibt eine Intensität proportional zu  $\frac{\sin^2 x}{x^2}$  auf einem Schirm.

Falls die Wellenlänge  $\lambda$  der ebenen Welle sehr viel kleiner als die Ausdehnung *d* der Blende ist, so bekommt man auch für große Werte von  $\alpha$  auch große Werte für *x*. Nachdem die Funktion  $\sin^2 x/x^2$  für große *x* schnell abfällt wird die Intensität an Orten, die sich unter einem großen Winkel  $\alpha$  befinden, sehr klein. Nur für kleine Winkel  $\alpha$  bekommt man eine nennenswerte Intensität. D.h mit einer Wellenlänge die kleiner als die Ausdehnung des Spaltes ist können wir diesen *scharf* abbilden.

Die Begrenzung der Abbildungseigenschaften durch die Beugung ist eine fundamentale Grenze, die prinzipiell nicht unterboten werden kann. Allein über Interferenz mehrerer Beugungsmuster von unterschiedlichen Blenden untereinander kann man im begrenzten Umfang auch kleinere Strukturen belichten. Dies ist derzeit ein drängendes Problem in der Herstellung von Nanostrukturen in der Halbleiterindustrie. Die Schaltkreise auf einem Chip haben Ausdehnungen im Bereich < 90 nm, wobei die Wellenlänge des Lichtes zur Erzeugung der Strukturen typischerweise 193 nm ist. D.h. schon hier sind ausgefeilte Techniken nötig, um die Beugungsbegrenzungen zu umgehen.

#### Reflexion einer Welle

Auf der Basis des Huygens'schen Prinzips lassen sich schließlich noch Reflexion und Brechung von Wellen an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien beschreiben. Betrachten wir zunächst wieder eine ebene Welle, die unter einem Einfallswinkel auf eine Grenzfläche fällt, wie in Abb. 3.2.10 illustriert. Wenn die Welle an Punkt A ankommt beginnt dort die Ausbreitung einer Kugelwelle. An Punkt B beginnt eine zweite Kugelwelle später, da die einfallende Welle noch die Strecke  $\overline{DB}$  überwinden muß. In dem Moment, in dem die Kugelwelle in B beginnt hat die Kugelwelle, die von A ausging, schon einen endlichen Radius erreicht. Die ausfallende ebene Welle läßt sich jetzt durch die Überlagerung der Orte gleicher Phasen konstruieren. Dazu erzeugt man eine Tangente an die Kugelwelle um A, die durch B geht. Es entsteht ein Punkt E. Man erkennt, daß das Dreieck AEB gespiegelt zu dem Dreieck ABD ist. Aus Abb. 3.2.10 läßt sich dann leicht ablesen, daß der Einfallswinkel immer gleich dem Ausfallswinkel sein muß.



Abbildung 3.2.10: Reflexion einer Welle an einer Grenzfläche.

#### Brechung einer Welle

Betrachten wir jetzt den Ubergang einer ebenen Welle zwischen zwei Medien 1 und 2. Diese Medien unterscheiden sich hinsichtlich der Phasengeschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$ . Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die einfallende Welle die Punkte A und D in Abb. 3.2.11 erreicht. Danach beginnt ein Kugelwelle sich über die Strecke  $\overline{AE}$  im Medium 2 mit einer Geschwindigkeit  $v_2$  für einen Zeitraum T auszubreiten. Um die Wellen gleicher Phasen zu überlagern, muß in diesem Zeitraum T die Kugelwelle im Medium 1 die Strecke  $\overline{DB}$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  überwinden. D.h. es muß gelten:

$$\overline{AE} = v_2 T \qquad \overline{DB} = v_1 T \tag{3.2.39}$$

Man erkennt sofort, daß die Strecken in folgendem Bezug zu<br/>einander stehen.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 3.2.11: Brechung einer Welle an einer Grenzfläche.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AE}} = \frac{v_2}{v_1} \tag{3.2.40}$$

Wenn man mit  $\alpha$  den Einfallswinkel zu Oberflächennormalen im Medium 1 und mit  $\beta$  den Ausfallswinkel zur Oberflächennormalen im Medium 2 bezeichnet und mit d den Abstand der Punkte A und B, so gilt gemäß Abb. 3.2.11:

$$v_2 T = \sin\beta d \qquad v_1 T = \sin\alpha d \qquad (3.2.41)$$

Dies läßt sich umschreiben und man erhält das Snellius'sche Brechungsgesetz zu:

$$v_1 \sin \beta = v_2 \sin \alpha \tag{3.2.42}$$

# 3.2.4 Stehende Wellen

Im folgenden wollen wir die Reflexion einer einfachen Welle an einer Grenze betrachten. Beispiel sei ein Seil, das an einem Ende an einer Wand befestigt sei. Eine Welle auf dem Seil läuft auf die Wand zu und wird von dieser reflektiert (siehe Abb. 3.2.12). Dabei überlagert sich die hin- und die zurücklaufende Welle.

$$x(z,t) = A \underbrace{\cos(\omega t + kz)}_{hinlaufend} + A \underbrace{\cos(\omega t - kz + \varphi)}_{ruecklaufend}$$
(3.2.43)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 3.2.12: Hin- und rücklaufende Welle.

Die Laufrichtung der Welle wird dabei durch das Vorzeichen der Wellenzahl k berücksichtigt. Der sog. *Phasensprung*  $\varphi$  hängt von den Reflexionseigenschaften am Ende ab. Dies läßt sich anschaulich wieder an der Seilwelle verdeutlichen, wie in Abb. 3.2.13 illustriert: (i) bei einem festen Ende, schlägt z.B. eine positive Amplitude nach der Reflexion in den negativen Wert um. Vergleicht man die hin- und rücklaufende Welle an dem gleichen Ort z und Zeit t, so muß die rücklaufende Welle um  $\pi$  verschoben werden. Dabei kehrt sich das Vorzeichen der Amplitude um und ein Wellenberg wird zu einem Wellental; (ii) bei einem freien Ende, bleibt das Vorzeichen der Amplitude nach der Reflexion zunächst erhalten. Vergleicht man die hin- und rücklaufenden Wellen an dem gleichen Ort z und Zeit t, so muß die Phase  $\varphi$  gleich Null sein. Gl. 3.2.43 läßt sich zusammenfassen zu:

$$x(z,t) = 2A\cos(kz - \frac{\varphi}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$$
(3.2.44)

Man erkennt wieder eine Welle der Form  $\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$ . Allerdings wird die Amplitude dieser Welle räumlich moduliert, wobei der Ausdruck  $\cos(kz - \frac{\varphi}{2})$  nicht von der Zeit abhängt! D.h. es entstehen an definierten Abständen Orte an denen die Amplitude *immer* Null ist. Diese bezeichnet man als **Wellenk-noten**. Diese Orte liegen an:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 3.2.13:** Reflexion einer Welle an einem festen und einem offenen Ende.

$$z = \frac{\lambda}{4\pi} \left[ (2n+1)\pi + \varphi \right] \tag{3.2.45}$$

mit n einer natürlichen Zahl. Bei einer Variation der Wellenlänge ändern sich kontinuierlich die Orte der Wellenknoten. Der erste Wellenknoten ist dabei zum Beispiel immer die Einspannung dieses Seils an der Wand.

Wird dieses Seil allerdings an *beiden* Enden im Abstand L eingespannt, so muß an beiden Orten z = 0 und z = L gleichzeitig ein Wellenknoten sein, wie in Abb. 3.2.14 illustriert ist.



Abbildung 3.2.14: Stehende Welle.

Mit diesen Randbedingungen bei z = 0 und z = L können jetzt allerdings nicht mehr beliebigen Frequenzen oder Wellenlängen angeregt werden. Die zulässigen Wellenlängen bzw. zulässigen Frequenzen bezeichnet man als **Eigenfrequenzen** des Systems. Es kann mit großer Amplitude schwingen, wie in Abb. 3.2.14 illustriert ist. Als mögliche Wellenlängen bekommt man

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

bei beidseitig offenen Enden  $\lambda = \frac{2L}{n}$  mit n einer natürlichen Zahl; bei einem festen und einem offenen Ende  $\lambda = \frac{4L}{n}$  mit n = 1, 3, 5... einer natürlichen Zahl; bei beidseitig festen Enden  $\lambda = \frac{2L}{n}$  mit n einer natürlichen Zahl.



Abbildung 3.2.15: Je nach Randbedingungen ergeben sich unterschiedliche Schwingungsmoden. Die Zahl n bezeichnet hier die Anzahl der Knoten entlang der stehenden Welle.

Alle Wellen in einem definierten System lassen sich darstellen als Überlagerung von einzelnen Eigenfrequenzen oder Moden, den sog. **Harmonischen**. Betrachten wir den Fall einer Saite einer Geige oder eines Klaviers. Hier bestimmt die Spannung der Saite, die Frequenz der Grundmoden. Die Tonhöhe der oberen Harmonischen sind jeweils Vielfache dieser Frequenz. Beim mechanischen Anschlagen einer Saite schwingt diese nicht nur auf der Grundmode, sondern auch auf den Harmonischen, da das System aus Saite, Befestigungspunkt und Resonanzkörper gleichzeitig angeregt wird. Dies macht die *Klangfarbe* eines Instrumentes aus.

#### Fledermausortung

Ultraschallortung bei Fledermäusen basiert auf der Reflexion von Ultraschallwellen an Objekten der Umgebung. Dadurch können Fledermäuse sich im Dunkeln orientieren und auf Beutejagd gehen.



## 3.2.5 Wellen bei bewegten Quellen

#### Quelle bewegt sich, Beobachter ruht

Wir wollen den Fall betrachten, daß eine Quelle Q sich relativ zu einem Beobachter B bewegt. Bei einer ruhenden Quelle ist der Abstand zwischen zwei Wellenbergen  $\Delta z$ :

$$\Delta z = \lambda_0 = v_{Phase}T \tag{3.2.46}$$

mit  $T = \frac{1}{t_0}$  der Periode der Schwingung. Wir unterscheiden zwei Fälle:

#### • Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu

Bewegt sich die Quelle mit der Geschwindigkeit  $v_{Quelle}$  auf einen Beobachter zu, so verkürzt sich der Abstand der Wellenberge zueinander, wie in Abb. 3.2.8 illustriert ist, zu:

$$\lambda = \lambda_0 - v_{Quelle}T \tag{3.2.47}$$

Der Beobachter nimmt die Frequenz  $f = \frac{v_{Phase}}{\lambda}$  wahr. Damit ergibt sich aus Gl. 3.2.47: Frequenz, die ein Beobachter wahrnimmt zu:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 3.2.16: Ausbreitung von Wellen ausgehend von einer ruhenden und einer bewegten Quelle.

$$\frac{v_{Phase}}{f} = \frac{v_{Phase}}{f_0} - \frac{v_{Quelle}}{f_0} \tag{3.2.48}$$

bzw.:

$$f = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}}$$
(3.2.49)

Der Ausdruck  $\frac{1}{1-\frac{v_Q}{v_{Phase}}}$  ist größer 1 und die wahr genommene Frequenz am Ort des Beobachters ist höher. Dies bezeichnet man als **Doppler**effekt.

#### • Quelle entfernt sich vom Beobachter

Bewegt sich die Quelle mit der Geschwindigkeit  $v_{Quelle}$  vom Beobachter weg, so vergrößert sich der Abstand der Wellenberge zueinander:

$$\lambda = \lambda_0 + u_Q T \tag{3.2.50}$$

In Analogie zu obiger Ableitung nimmt der Beobachter dann folgende Frequenz wahr:

$$f = f_0 \frac{1}{1 + \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}}$$
(3.2.51)

Der Ausdruck  $\frac{1}{1+\frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}}$  ist kleiner 1 und die wahr genommene Frequenz am Ort des Beobachters ist kleiner als die der ruhenden Quelle.

#### Quelle ruht, Beobachter bewegt sich

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß die Quelle Q ruht und sich der Beobachter B mit  $v_{Beobachter}$  auf die Quelle zu bewegt. Der Beobachter nimmt dabei eine andere Frequenz war, da er häufiger auf Wellenberge trifft. D.h. im Bezugssystem des Beobachter gilt die Wellenlänge  $\lambda$  und die Frequenz f. Im Bezugssystem der ruhenden Quelle gilt die Wellenlänge  $\lambda_0$  und die Frequenz  $f_0$ . Damit verkürzt sich die Wellenlänge um:

$$\lambda = \lambda_0 - v_{Beobachter} \frac{1}{f} \tag{3.2.52}$$

Die Wellenlängen sind mit den Phasengeschwindigkeiten und Frequenzen verknüpft wie:

$$\lambda = \frac{v_{Phase}}{f}; \qquad \lambda_0 = \frac{v_{Phase}}{f_0} \tag{3.2.53}$$

Damit ergibt sich schließlich aus Gl. 3.2.52:

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{v_{Beobachter}}{v_{Phase}} \right)$$
(3.2.54)

Der Ausdruck  $\left(1 + \frac{v_{Beobachter}}{v_{Phase}}\right)$  ist größer 1 und die wahr genommene Frequenz am Ort des Beobachters ist höher. Bei anderer Bewegungsrichtung dreht sich jeweils das Vorzeichen um.

#### Quelle und Beobachter bewegen sich

Abschließend betrachten wir den Fall, daß sich Quelle Q und Beobachter B aufeinander zu bewegen. In Analogie zu der obigen Beschreibung bekommen wir eine Änderung der wahrgenommenen Wellenlänge von

$$\lambda = \lambda_0 - v_{Beobachter} \frac{1}{f} - v_{Quelle} \frac{1}{f_0}$$
(3.2.55)

Hier gilt im Bezugssystem des Beobachter die Frequenz f, während gleichzeitig im Bezugssystem der Quelle die Frequenz  $f_0$  vorliegt. Mit

$$\lambda = \frac{v_{Phase}}{f}; \qquad \lambda_0 = \frac{v_{Phase}}{f_0} \tag{3.2.56}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum
bekommen wir schließlich aus Gl. 3.2.55:

$$f = f_0 \frac{v_{Phase} + v_{Beobachter}}{v_{Phase} - v_{Quelle}}$$
(3.2.57)

Bei anderer Bewegungsrichtung von Quelle oder Beobachter dreht sich jeweils das Vorzeichen um.

## Quellengeschwindigkeit ist größer als die Phasengeschwindigkeit



Abbildung 3.2.17: Ausbildung einer Stoßfront bei einer Bewegung der Quelle mit einer Geschwindigkeit größer als die Phasengeschwindigkeit in dem Medium.

Was passiert, wenn die Phasengeschwindigkeit der Welle gleich der Geschwindigkeit der Quelle ist? In Fahrtrichtung gesehen wird der Abstand der Wellenberge unendlich klein, bzw. die Frequenz unendlich hoch. Es entsteht eine sog. **Stoßfront**. Im Falle von Schallwellen bezeichnet man diesen Punkt als Schallmauer. Die starken Luftdruckschwankungen führen zu einer drastischen Änderung der Temperatur der Luft, was als Tröpfchenbildung sichtbar wird (siehe Abb. 3.2.18). Zudem ist ein Knall hörbar. In Abb. 3.2.17 ist der Ausbreitungskegel dieser Stoßfront dargestellt. Der Öffnungswinkel  $\alpha$ berechnet sich aus:

$$\sin \alpha = \frac{v_{Phase}}{v_{Quelle}} \tag{3.2.58}$$

Eine Überschallgeschwindigkeit wird auch durch die **Machzahl** M ausgedrückt als dem Verhältnis zwischen Quellengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit des Schalls in dem Medium.

$$M = \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}$$
(3.2.59)

Abbildung 3.2.18: Durchbruch eines Flugzeugs durch die Schallmauer.

### Dopplersonografie

Durch Ultraschall lassen sich Dichteunterschiede im Gewebe sichtbar machen. Dabei wird eine Ultraschallwelle in den Körper gesandt und die Reflexion detektiert. Bei der Dopplersonografie beobachtet man zusätzlich eine Frequenzverschiebung der Welle, da das Objekt, zum Beispiel ein Blutstrom sich bewegt. Die Frequenz erniedrigt sich falls das Objekt sich von dem Sender weg bewegt, sie erhöht sich wenn sich das Objekt auf den Sender zubewegt.



Dopplersonografie. Quelle: Uni Leipzig

# Kapitel 4

## Elektrizitätslehre

In der Natur existieren vier Arten der Wechselwirkung, die Gravitation, die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung. In diesem Kapitel wird die elektromagnetische Wechselwirkung behandelt, die an starken Kräfte zwischen elektrischen Ladungen sichtbar wird.

## 4.1 Elektrostatik

In der Elektrostatik werden statischen Anordnungen von Ladungen betrachtet, die untereinander in Wechselwirkung treten.

## 4.1.1 Elektrische Ladung

## Die Elementarladung

Elektrische Ladungen werden über Kräfte sichtbar, die sie aufeinander ausüben. Hierbei existieren Ladungen mit zwei unterschiedlichen Vorzeichen, **positiv** und **negativ**, wobei gilt:

- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab
- Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an

Dies ist im Unterschied zur Gravitation und der starken Wechselwirkung, die in jedem Fall eine anziehende Wirkung hat. Bei allen Phänomenen und Prozessen in der Natur gilt neben der Energie- und der Impulserhaltung auch die **Ladungserhaltung**. D.h. es existieren keine Vorgänge bei der nur eine einzige Ladungssorte entsteht. Betrachtet man zum Beispiel die Ionisation eines Atoms, so entsteht dabei ein positives geladenes Ion und ein freies Elektron. Ladungen in der Natur existieren nur Vielfachen einer Elementarladung. Diese Elementarladung beträgt in der Einheit **Coloumb**:

$$e = 1.602177 \cdot 10^{-19} \mathrm{C} \tag{4.1.1}$$

Dies war zunächst ein überraschendes Ergebnis, da zum Beispiel bei der Gravitation bislang keine kleinste Elementarmasse bekannt ist. Diese Quantisierung der Ladung wurde 1910 im **Millikan-Versuch** nachgewiesen, wie in Abb. 4.1.1 illustriert ist. Hierbei wird ein Öltröpfchen mit der Ladung Qzwischen zwei geladenen Platten in der Schwebe gehalten. Das Öltröpfchen erfährt eine Kraft durch die Gravitation nach unten und eine durch die geladenen Platten nach oben. Das Öltröpfchen wird dabei über ein Fernrohr beobachtet. Man führt jetzt drei Messungen durch: (i) man läßt das Öltröpfchen sinken bei ungeladenen Platten und bekommt ein Gleichgewicht zwischen Gravitation  $F_{Gravitation}$  und der Reibungskraft  $F_{Reibung}$ :

$$F_{Reibung} = 6\pi\eta Rv \tag{4.1.2}$$

$$F_{Gravitation} = \frac{4\pi}{3} R^3 \left(\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft}\right) g \tag{4.1.3}$$

Man beobachtet jetzt mit dem Fernrohr die Sinkgeschwindigkeit v bei bekannter Viskosität  $\eta$  und den Dichten von Öl und Luft und bestimmt daraus den Radius R des Tröpfchens. (ii) In einem zweiten Versuch lädt man die Platten mit einer Spannungsquelle entsprechend einer Spannung U. Bei geeigneter Wahl von U bekommt man ein Gleichgewicht zwischen Schwerkraft  $F_{Gravitation}$  und elektrischer Kraft  $F_Q$  und das Tröpfchen bleibt in Ruhe.

$$F_{Ladung} = Q \frac{U}{d} \tag{4.1.4}$$

Mit d dem Abstand der beiden Platten. Aus der eingestellten Spannung U läßt sich dann die Ladung Q bestimmen. (iii) In einem dritten Schritt verwendet man eine externe UV-Lampe, um über den Photoeffekt den Ladungszustand des Tröpfchens zu ändern. Ein Tröpfchen, das sich im Gleichgewicht befand, beginnt jetzt wieder nach oben zu steigen oder nach unten zu sinken. Korrigiert man die elektrische Spannung U an den Platten, kann man dieses Tröpfchens wieder zur Ruhe bringen. Man beobachtet dabei, daß die Spannungen, die man dazu einstellen muß, nur *diskrete* Werte annehmen. Das heißt die Änderung des Ladungszustandes erfolgt in festen Einheiten. Aus der quantitativen Analyse dieses Experimentes kann man die kleinste mögliche Ladungsmenge ableiten, die **Elementarladung** e.

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 4.1.1:** Bestimmung der Elementarladung im Millikan-Versuch. In einem elektrischen Feld wird ein geladenes Öltröpfchen in der Schwebe gehalten. Über das Einstrahlen einer Lampe wird der Ladungszustand geändert und das Tröpfchen beginnt sich zu bewegen. Diese Änderung der Ladung erfolgt in diskreten Schritten.

### Das Auftreten von Elektrizität

Phänomene der Elektrizität lassen sich an vielen Beispielen aus dem täglichen Leben illustrieren.

### • Reibungselektrizität

Bei der sogenannten **Reibungselektrizität** bringt man zwei Körper in engen Kontakt. Nachdem die Bindungsenergie von Elektronen in den einzelnen Materialien unterschiedlich sind, treten Elektronen von dem einen Material in das mit der größeren Bindungsenergie über. Dabei lädt sich ein Körper negativ, der andere positiv auf. Dieser Vorgang findet solange statt, bis die Anziehungskräfte der neuen Ladungen an der Grenzfläche so groß werden, daß sie dem Übertritt entgegenstehen. Dies ist in Abb. 4.1.2 illustriert.

Die Reibung als solche ist hier nicht wesentlich, sondern ermöglicht nur den guten Kontakt zwischen zwei Materialien. Hält man zum Beispiel Paraffin in Wasser, so findet auch dort eine Ladungstrennung statt, obgleich keine Reibung auftritt.

Ladungen lassen sich mit einem **Elektrometer** sichtbar machen. Hierzu wird ein Band aufgeladen, an dessen Enden sich gleichnamigen Ladungen abstoßen können. Der Winkel ist dabei ein Maß für die Größe der Ladung.

### • Spannungsreihe der Metalle

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.1.2: Bringt man zwei Körper zusammen, so können Elektronen von einem zum anderen übertreten, falls die Bindungsenergien sich unterscheiden. Die Körper laden sich damit auf. Ladungsmengen lassen sich mit einem Elektrometer sichtbar machen, das auf der Abstoßung gleichnamiger Ladungen beruht.

Man kann Metalle gemäß der Bindungsenergie ihrer Elektronen anordnen. Bringt man zum Beispiel zwei Metall zusammen, so findet wieder ein Austausch von Elektronen statt und eine Ladungsverschiebung tritt auf. Man kann die Metalle in folgender Reihenfolge anordnen mit steigender Bindungsenergie der Elektronen:

K, Na, Al, Zn, Pb, Sn, Sb, Bi, Fe, Cu, W

## • Erde als geladener Körper

Die Erde bewegt sich durch das inter-stellare Medium, das aus einem dünnen Plasma, einer Ansammlung von Elektronen und Ionen besteht. Elektronen und Ionen treffen auf die Erde und laden diese auf. Nachdem Elektronen sehr vie leichter sind, ist ihre mittlere Geschwindigkeit sehr viel größer als die der Ionen. Damit ist die Auftreffrate der Elektronen größer als die der Ionen und die Erde lädt sich negativ auf. Dies geschieht solange bis die abstoßende Wirkung der negativen Ladung auf der Erde die Auftreffrate der Elektronen so weit reduziert, daß sie der der Ionen gleicht. D.h. im Mittel treffen dann die gleiche Anzahl an positiven und negativen Ladungen auf die Erde. Im Gleichgewicht stellt sich eine Ladung von  $-6 \cdot 10^5$  C ein. Dies entspricht einer Anzahl von  $4 \cdot 10^{24}$  Elektronen. Diese geringe Anzahl genügt um ein gut messbares elektrisches Feld von 130 Vm<sup>-1</sup> auf der Erdoberfläche zu erzeugen.

### Das Coloumbgesetz

Elektrische Ladungen werden über ihre Kraftwirkung untereinander sichtbar. Betrachten wir zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  mit einem Verbindungsvektor  $\vec{r}$ , so ist die Kraft zwischen ihnen durch die sog. **Coloumbkraft** gegeben (siehe Abb. 4.1.3):



Abbildung 4.1.3: Das Coloumb-Gesetz beschreibt die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen bzw. einer Testladung q und einer Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ .

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$
(4.1.5)

Die Proportionalitätskonstante ist die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \mathrm{A}^2 \mathrm{s}^4 \mathrm{kg}^{-1} \mathrm{m}^{-3} \tag{4.1.6}$$

Die Richtung der Kraft ist durch den Verbindungsvektor  $\vec{r}$  vorgegeben. Bei gleichnamigen Ladungen zeigt die Kraft in Richtung  $\vec{r}$ , d.h. wir beobachten eine *abstoßende* Kraft. Bei ungleichnamigen Ladungen zeigt die Kraft entgegen der Richtung von  $\vec{r}$ , d.h. wir beobachten eine *anziehende* Kraft.

Die Coulombkraft ist um ein Vielfaches größer als die Gravitationskraft. Vergleicht man zum Beispiel zwei Elektronen im Abstand von einem Meter, so bekommt man für beide Kräfte:

$$|\vec{F}_{Gravitation}| = G \frac{m_e m_e}{r^2} = 5.537 \cdot 10^{-71} \text{N}$$
 (4.1.7)

$$|\vec{F}_{Ladung}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 2.307 \cdot 10^{-28} \text{N}$$
 (4.1.8)

Setzt man diese ins Verhältnis, so ergibt sich ein Faktor von

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{|\vec{F}_{Gravitation}|}{|\vec{F}_{Ladung}|} = 2.4 \cdot 10^{-43} \tag{4.1.9}$$

um den die Gravitationskraft geringer als die elektrostatische Kraft ist. Elektrische Kräfte kann man leicht im Labor sichtbar machen, während Gravitationskräfte sehr empfindliche Messaufbauten verlangte bzw. für große Körper wie bei der Planetenbewegung zum tragen kommt.

## 4.1.2 Elektrisches Feld und Potential

Die Coloumbkraft läßt sich etwas formaler definieren, wenn wir das elektrische Feld einführen: jedes geladenen Teilchen erzeugt ein elektrisches Feld in dem ein anderes Teilchen eine Kraft gemäß dem Coulomb-Gesetz erfährt. Dies erscheint auf den ersten Blick etwas künstlich. Allerdings bekommt das **elektrische Feld** eine eigenständige Bedeutung, wenn wir später die Ausbreitung von **elektromagnetischen Wellen**, dem Licht, beschreiben.

### Das elektrische Feld

Die Kraft zwischen Ladungen wird vom Coloumbgesetz definiert:

$$\vec{F}_{Ladung} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$
(4.1.10)

Das elektrische Feld  $\vec{E}$  der Ladung  $q_1$  ist definiert als:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$
(4.1.11)

Damit wird die Kraft auf die Ladung  $q_2$  in diesem elektrischen Feld zu:

$$\vec{F}_{Ladung} = q_2 \vec{E}(\vec{r}) \tag{4.1.12}$$

Die Einheit des elektrischen Feldes ist  $[NC^{-1}=Vm^{-1}]^1$ . Das elektrische Feld wird durch **elektrische Feldlinien** symbolisiert. Für die Konstruktion dieser Feldlinien lassen sich mehrere Forderungen aufstellen:

- Elektrische Feldlinien beginnen immer bei der positiven Ladung und enden bei der negativen Ladung bzw. im Unendlichen.
- Die elektrischen Feldlinien geben die Richtung der Kraft auf einen Ladung vor.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Die Einheit Volt [V] wird später beim elektrostatischen Potential eingeführt

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

- Die *Dichte* der Feldlinien ist ein Maß für die Größe der Kraft. Bei einer einfachen Punktladung fällt die Dichte der Linien quadratisch mit dem Abstand. Dies entspricht genau der  $1/r^2$ -Abhängigkeit des Coloumb-Gesetzes.
- Feldlinien schneiden sich nie. Ansonsten wäre die Richtung der Kraft nicht eindeutig definiert.
- Die Zahl der Feldlinien ist proportional zur Größe der Ladung von der sie ausgehen. Dies ist an einem System illustriert aus zwei unterschiedlichen Ladungen +2e und -e (siehe Abb. 4.1.4). An der positiven Ladung beginnen 10 Feldlinien während an der negativen nur 5 von Ihnen enden. In geringer Entfernung von den beiden Ladungen gleicht das elektrischen Feld dem eines Dipols (siehe unten), während in großer Entfernung das elektrische Feld dem einer Punktladung ähnelt (+2e e = e).



Abbildung 4.1.4: Die elektrischen Feldlinien beginnen immer an der positiven Ladung und enden an der negativen bzw. im Unendlichen. Die Anzahl der Feldlinien die von einer Ladung ausgehen oder an einer Ladung enden ist proportional zu deren Betrag.

Im folgenden wollen wir das elektrische Feld für einige Geometrien berechnen.

## • Feld einer Linienladung

Es befinde sich eine Ladung  $q_1$  in einem Abstand *a* von einer geladenen Linie, wie zum Beispiel einem dünnen Draht (siehe Abb. 4.1.5). Auf

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.1.5: Berechnung des elektrischen Feldes einer Linienladung.

dieser Linie befindet sich eine Ladung Q pro Länge L und bekommen für das Feld:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{a} \frac{Q}{L} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a} \frac{Q}{L}$$
(4.1.13)

D.h. das elektrische Feld fällt mit 1/a ab.

### • elektrisches Feld einer Fläche A mit Ladung Q

Betrachten wir jetzt das Feld im Abstand a zu einer unendlich ausgedehnten Fläche mit der Ladung Q pro Fläche A. In Analogie zur Betrachtung der Linienladung bekommen wir keine Beiträge zum elektrischen Feld in x- und z-Richtung, sondern wieder nur in y-Richtung. Die Verbindungsgerade zwischen dem Ort an dem wir das Feld berechnen wollen und einem Kreis mit Radius r um den Fußpunkt dieses Ortes auf der Fläche sei b. Wir erhalten schließlich das elektrische Feld im Abstand a von:

$$E_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dE_y = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$
(4.1.14)

Man erkennt, daß das elektrische Feld unabhängig vom Abstand a ist. d.h. es ist räumlich konstant.

Wir können dieses Bild leicht erweitern zu dem elektrischen Feld in einem sog. **Plattenkondensator** als zwei gegensätzlich geladenen Platten. Wie Abb. 4.1.7 illustriert überlagern sich die beiden elektrischen Felder der Platten im Innern eines Plattenkondensators und wir erhalten:



Abbildung 4.1.6: Berechnung des elektrischen Feldes einer Flächenladung.

$$E_{Plattenkondensator} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \tag{4.1.15}$$



Abbildung 4.1.7: Das elektrische Feld im Innern eines Plattenkondensators erhält man durch Überlagerung der Lösungen der einzelnen Platten.

Im Außenraum dieses Plattenkondensators kompensieren sich die Felder und wir erhalten genau E = 0.

Eine wichtige Anwendung elektrischer Felder ist die **Feldemission**. Bei der Betrachtung einer geladenen Kugel hatten wir abgeleitet, daß das elektrische Feld wie:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \tag{4.1.16}$$

skaliert. D.h. bei sehr kleinen Abständen r kann die Feldstärke sehr hoch werden. Dies läßt sich an einer feinen Spitzen eines Materials (Bsp. Wolfram) realisieren auf der eine große Ladungsmenge aufgebracht wird (siehe Abb. 4.1.8). Die hohe Feldstärke führt dazu, daß Elektronen aus dem Material herausgerissen werden. Man spricht von **Feldemission**. Wenn man diese Elektronen auf einen Leuchtschirm abbildet entsteht eine starke Vergrößerung der mikroskopischen Variation der Emissionswahrscheinlichkeit auf der Oberfläche dieser Spitze. Mit dieser Methode ist es zum ersten Mal gelungen ein *atomares* Abbild von Oberflächen zu erzeugen.



Abbildung 4.1.8: Das elektrische Feld hängt von dem Krümmungsradius der Oberfläche ab. Bei sehr starker Krümmung ergibt sich eine hohe elektrische Feldstärke, die die Elektronen aus dem Material heraus reißen kann. Dies wird im Feld-Elektronen-Mikroskop genutzt um Oberflächen atomar abzubilden.

## Das elektrische Potential

Bewegen wir eine Ladung in einem elektrischen Feld so müssen wir je nach Richtung Arbeit leisten, bzw. an der Ladung wird Arbeit verrichtet (siehe Abb. ??). Die Arbeit auf dem Weg zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ist definiert als

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{s} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$$
(4.1.17)

Nachdem das elektrische Feld ein *konservatives* Feld ist, d.h. die Arbeit ist *unabhängig* von der Wahl des Weges, können wir eine Beschreibung mittels der potentiellen Energie verwenden: bewegen wir eine positive Ladung

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

entlang der Richtung des elektrischen Feldes wird die Arbeit W positiv, d.h. die Ladung leistet Arbeit, seine potentielle Energie verringert sich und seine Bewegungsenergie erhöht sich. Wenn das Vorzeichen von W negativ wird, wird Arbeit der Ladung zugeführt, d.h. seine potentielle Energie erhöht sich und seine Bewegungsenergie verringert sich. Falls wir einen geschlossenen Weg betrachten, muß bei einem konservativen Feld gelten:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = 0 \tag{4.1.18}$$

Dieser Zusammenhang gilt allerdings nur für zeitlich konstante Probleme<sup>2</sup>!

Die Änderung der potentiellen Energie  $E_{pot}$  bei dem Weg von Punkt  $P_1$  zu Punkt  $P_2$  ist definiert als:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_2) - E_{pot}(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} dW \qquad (4.1.19)$$



**Abbildung 4.1.9:** Das Potential entspricht der Arbeit, die benötigt wird, um eine Elementarladung in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  von einem Punkt P<sub>1</sub> zu einem Punkt P<sub>2</sub> zu bewegen.

Neben der potentiellen Energie ist es üblich in der Elektrizitätslehre das sog. **elektrische Potential** zu definieren als:

$$\phi = \int_{P}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} \tag{4.1.20}$$

Der Ausdruck  $q\Phi(P)$  gibt die Arbeit an, die aufgewendet oder gewonnen wird, wenn man ein Teilchen von dem Punkt P an einen Ort im Unendlichen bewegt.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Bei dem Induktionsgesetz wird die rechte Seite ungleich Null und entspricht der zeitlichen Änderung des magnetischen Flußes durch die umschlossenen Fläche.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Vergleicht man das elektrische Potential an zwei Punkten, so läßt sich die **Spannung** U definieren:

$$U = \phi(P_1) - \phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$$
(4.1.21)

## Das Herz als elektrischer Dipol

Eine besonderes Beispiel für elektrische Felder ist das Herz. Hier werden über Nervenleitungen elektrische Reize ausgelöst, die den Muskel periodisch zusammenziehen lassen. Diese elektrischen Signale lassen sich außen am Körper ableiten und vermessen.

```
Elektrokardiogramm (EKG)
```

Das Herz schlägt durch eine Abfolge von elektrischen Pulsen. Dadurch entsteht ein elektrischer Dipol dessen elektrisches Feld sich charakteristisch ändert. Dies wird durch ein Elektrokardiogramm sichtbar gemacht. Dazu werden Elektroden an definierten Punkten am Körper platziert (Abgriffe). Die Spannungen die sich zwischen diesen Elektroden einstellen werden ausgegeben. Aus diesen Signalen lassen sich Herzfehler ablesen.



## 4.1.3 Leiter im elektrischen Feld, Kapazität

Im folgenden betrachten wir leitfähige Materialien wie Metalle in einem elektrischen Feld.

## Influenzladungen

Die Elektronen in einem Leiter können sich in einem äußeren elektrischen Feld entgegen der Feldrichtung ( $\vec{F} = -e\vec{E}$ ) bewegen. An einer Oberfläche entsteht ein Überschuss an Elektronen, während an der gegenüber liegenden Oberfläche eine Elektronenverarmung auftritt. Auf der Seite des Überschusses existieren mehr Elektronen als positive Atomrümpfe der Metallatome, eine negative Oberflächenladung baut sich auf; auf der Seite der Verarmung existieren weniger Elektronen als positive Atomrümpfe der Metallatome, eine positive Oberflächenladung baut sich auf (siehe Abb. 4.1.10). Diese Aufladung der Oberflächen geht solange vonstatten bis das Innere des metallischen Körper frei von einem elektrischen Feld ist! Diese Oberflächenladungen bezeichnet man als Influenzladungen.



Abbildung 4.1.10: Die freien Ladungen in einem elektrischen Leiter in einem elektrischen Feld bewegen sich an die Oberflächen und schirmen so das elektrische Feld im Innern ab.

Hält man zwei Platten in ein elektrisches Feld und verbindet diese elektrisch, so lädt sich eine Platte negativ und die andere positiv auf. Trennt man jetzt die elektrische Verbindung, hat man diese Ladungsmengen auf den Platten gespeichert.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die freie Beweglichkeit der Ladungsträger auf einem leitenden Körper führt zudem dazu, daß sich die Ladungen an der Oberfläche ansammeln. Betrachten wir dazu eine geladene Metallkugel. Wenn sich die Ladungsträger gleicher Polarität auf der Oberfläche befinden, ist ihr mittlerer Abstand maximal und es entspricht dem energetisch günstigsten Zustand. Nach dem Gauß'schen Satz wird der Innenraum eines derartig geladenen Körpers damit automatisch feldfrei!

Dieser Zusammenhang wird an dem **Faraday'schen Käfig** sichtbar. Das Innere eines metallischen Käfigs bleibt feldfrei unabhängig von der Ladungsmenge, die von außen aufgebracht wird. Dieser Umstand schützt zum Beispiel den Autofahrer vor hohen Feldstärken bei einem Blitzeinschlag.



**Abbildung 4.1.11:** Das elektrische Feld in einem Hohlraum im Innern eines Leiter ist exakt Null.

Die Feldfreiheit im Innern eines Leiters läßt sich auch formaler beweisen, wie in Abb. 4.1.11 illustriert ist. Betrachten wir zunächst eine geladenen Kugel, bei der sich positive Ladungen auf der Oberfläche ansammeln. Im Innern sei ein Hohlraum auf dessen Innenseite sich Ladungen befinden sollen, die im Innenraum ein elektrisches Feld erzeugen<sup>3</sup>. Ist das ein Widerspruch? Konstruieren wir zunächst eine Fläche die den Hohlraum umschließt, so kann das elektrische Feld im Innern des Leiters gleich Null werden, da die umschlossenen negativen und positiven Ladungen sich gegenseitig aufheben. D.h. so löst sich der Widerspruch noch nicht auf. Alternativ dazu können wir aber einen geschlossenen Weg konstruieren, der zum Teil durch den Hohlraum geht als

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Diese Annahme ist sehr künstlich, da die unterschiedlichen Ladungen in einem Metall zum Beispiel, sich natürlich finden und gegenseitig neutralisieren

auch zum Teil durch den Leiter läuft. Nachdem statische elektrische Felder konservativ sind, muß gelten:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = 0 \tag{4.1.22}$$

Auf dem Teil 1 (siehe Abb. 4.1.11) des geschlossenen Weges muß das Integral Null ergeben, da das Feld im Innern des Leiters ja verschwindet. Auf Teil 2 (siehe Abb. 4.1.11) des geschlossenen Weges ist nach unserer Annahme von Oberflächenladungen, das elektrische Feld ungleich Null. D.h. die Summe über beide Teilstrecken 1 und 2 ist von Null verschieden und im Widerspruch zu Gl. 4.1.22 Es dürfen sich also *keine* Oberflächenladungen auf der Innenseite des Hohlraums befinden !

Eine weitere Anwendung dieses Verhalten ist die Realisierung eines Hochspannungsgenerators, des sog. van-de-Graaff-Bandgenerators, wie in Abb. 4.1.12 illustriert. Hierbei wird über Reibungselektrizität ein Band mit Ladungen beaufschlagt. Diese Ladungen werden kontinuierlich von einer Spannungsquelle nachgeliefert. Das Band bewegt die aufgebrachte Ladungen in das *Innere* einer Hohlkugel wo sie von einem zweiten Kamm wieder abgestreift werden. Dieses Abstreifen passiert unabhängig von der zuvor gesammelten Ladungsmenge auf der Hohlkugel, da die Ladungen immer von dem Band auf die  $\ddot{a}u\beta ere$  Oberfläche der Kugel wandern. D.h. das Abstreifen im *Innern* der Hohlkugel ist ganz wesentlich für das Funktionsprinzip eines van-der-Graaff-Generators.

Bei beliebig geformten Leitern ist die Berechnung von Oberflächenladungen und den elektrischen Feldern hinreichend kompliziert. Für Leiter läßt sich allerdings eine sehr einfache Randbedingung angeben: das elektrische Feld muß immer *senkrecht* zur Metalloberfläche sein! Wäre dies nicht der Fall, so könnte es die Oberflächenladungen *verschieben*. Diese Verschiebung findet so lange statt, bis das resultierende elektrische Feld wieder senkrecht zur Oberfläche zeigt. D.h. es muß gelten:

# Elektrische Feldlinien stehen **immer senkrecht** auf leitenden Metalloberflächen.

Dies sei am Beispiel einer Ladung vor einer metallischen Oberfläche in Abb. 4.1.13 illustriert. Orte direkt an der Metalloberfläche, die sich gegenüber der einzelnen Punktladung befinden, spüren ein stärkeres elektrisches Feld, als Orte, die weiter entfernt liegen. Deshalb ist die Dichte an Influenzladungen im Zentrum größer als die in großer Entfernung. Eine inhomogene Verteilung an Influenzladungen stellt sich so ein, daß die elektrischen Feldlinien, die von der Punktladung ausgehen senkrecht auf die Metalloberfläche auftreffen.

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.1.12: Bei einem van-de-Graaff Generator werden über Reibungselektrizität hohe Spannungen erzeugt. Durch das Abstreifen der Ladungen im *Innern* einer Hohlkugel fliessen diese nach außen hin ab.

Man kann allerdings das richtige elektrische Feldlinienbild elegant erzeugen, in dem man sich eine **Spiegelladung** im Innern des Metalls vorstellt. Es entsteht ein Dipolfeld, das genau den geforderten Randbedingungen genügt, wie Abb. 4.1.13 illustriert. Dies ist allerdings nur eine konstruierte *Scheinladung*, deren elektrisches Feld allerdings genau demjenigen entspricht, daß die reale inhomogene Verteilung von Influenzladungen erzeugt.

## Die Kapazität

Das Beispiel der Influenzladung hat gezeigt, daß ein elektrisches Feld zu einer Ladungstrennung in einem elektrischen Leiter führt. Trennt man diese beiden Seiten, so hat man dauerhaft Ladung gespeichert. Anordnungen, die sich dafür eignen bezeichnet man als **Kondensator**. Die Fähigkeit bei einer vorgegebenen Spannung U eine Ladungsmenge Q zu speichern, wird durch die **Kapazität** C ausgedrückt.



Abbildung 4.1.13: Das elektrische Feld einer Punktladung vor einer Metalloberfläche läßt sich leicht mit dem Konzept einer Spiegelladung ermitteln.

$$Q = CU \tag{4.1.23}$$

Das einfachste Beispiel ist ein Plattenkondensator. Eine Spannungsquelle erzeugt eine positive Ladung auf einer Seite von zwei gegenüber liegenden Platten. Das elektrische Feld zieht Elektronen auf der anderen Platte an. Dies geschieht so lange bis die Ladung auf beiden Platten identisch ist. Der Kondensator ist *aufgeladen*. Jetzt könnte man die Spannungsquelle abtrennen und der Zustand bleibt erhalten, da die elektrischen Felder der positiven und negativen Ladungen die Ladungstrennung auf der jeweils anderen Platte aufrecht erhalten.

Die Fähigkeit einer Anordnung Ladung zu speichern wird als Kapazität C in der Einheit **Farad** gemessen, 1 F = 1CV<sup>-1</sup>. Im folgenden wollen wir die Kapazitäten eines Plattenkondensators.

Betrachten wir zunächst einen Plattenkondensator mit der Fläche A und dem Plattenabstand d an den eine Spannung U angelegt wird (siehe Abb. 4.1.14). Nachdem das elektrische Feld in einem Plattenkondensator konstant ist, kann man einfach setzen:

$$E = \frac{U}{d} \tag{4.1.24}$$

Das elektrische Feld bei gegebener Ladung Q eines Plattenkondensators ist:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{1}{A} \tag{4.1.25}$$

Daraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Spannung und Ladung von:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$U\underbrace{\epsilon_0 \frac{A}{d}}_{=C} = Q \tag{4.1.26}$$

bzw. die Kapazität

$$C_{Plattenkondensator} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{4.1.27}$$

D.h. die Kapazität steigt mit der Fläche A an, nimmt aber mit dem Abstand der Platten d ab. Mit steigendem Abstand muß auch die Spannung steigen um dieselbe Ladungsmenge zu speichern.

In der Mikroelektronik ist die Erzeugung von kleinsten Kondensatoren zur Informationspeicherung (1 Bit) ein drängendes Problem, da bei fortschreitender Miniaturisierung die Fläche schneller sinkt als der Abstand und damit nur noch die Speicherung von immer weniger Elektronen möglich bleibt.



**Abbildung 4.1.14:** In einem Kondensator wird eine Geometrie mit einer Spannungsquelle  $U_0$  aufgeladen.

## Serien- und Parallelschaltung von Kapazitäten

Die Kapazität einer Anordnung von mehreren Kondensatoren läßt sich durch die Regeln für Serien- und Parallelschaltung ableiten.

Bei der Parallelschaltung, wie in Abb.4.1.15 illustriert, ist die Spannung, die an jedem Kondensator abfällt, gleich. D.h. die gesamte Ladungsmenge auf der einen Seite wie auf der anderen Seite der Kondensatoren muß gleich sein:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U (4.1.28)$$

Für eine Parallelschaltung bekommen wir als Gesamtkapazität  $C_{qes}$ :



Abbildung 4.1.15: Parallel- und Serienschaltung von Kondensatoren.

Bei der Serienschaltung wie in Abb. 4.1.15 illustriert, muß die Ladungsmenge die jeder Kondensator speichert gleich sein. Da der Abschnitt zwischen zwei Kondensatoren in der Serie elektrisch neutral ist, muß die negative Ladung des einen Kondensators gleichzeitig betragsmäßig identisch zur positiven Ladung des nächsten Kondensators sein und sofort. D.h. es muß gelten  $Q = C_1U_1$ ,  $Q = C_3U_3$ ,  $Q = C_3U_3$  usw. Dies läßt sich auf die gesamte Spannung U beziehen wie:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\dots\right)$$
(4.1.30)

Damit ergibt sich für die gesamt Kapazität  $C_{qes}$ :

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i} \frac{1}{C_i} \tag{4.1.31}$$

Betrachten wir als Beispiel zwei gleiche Kondensatoren  $C_0$ , die parallel geschaltet werden. Man erhält  $C_{ges} = 2C_0$ , da mit der gleichen Spannung die doppelte Ladungsmenge gespeichert werden kann. Bei der Serienschaltung teilt sich die Spannung durch zwei und eine Ladungsmenge Q wird pro Kondensator mit der halben Spannung gespeichert, daraus ergibt sich  $C_{ges} = (1/2)C_0$ .

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### Die Energie des elektrischen Feldes

Das Speichern von Ladung in der Anordnung eines Kondensators ist gleichbedeutend mit dem Speichern von Energie. Verbindet man die beiden Seiten eines Kondensators, so findet ein Ladungsausgleich statt. Die dabei erfolgende Bewegung der Ladungsträger kann als Energiequelle genutzt werden (Stromquelle). Um die gespeicherte Energie eines Kondensators zu berechnen, betrachten wir eine Kugel mit Radius a und einer positiven Ladung Q, auf die wir aus dem Unendlichen weiter positive Ladungen dq hinzufügen (siehe Abb. 4.1.16).



Abbildung 4.1.16: Elektrisches Potential einer Kugel mit Radius a. Durch Aufbringen von Ladungen dq auf eine Kugel der Ladung Q erzeugen wir gespeicherte potentielle Energie.

Nachdem der Integrationsweg entgegen der Richtung von  $\vec{E}$  erfolgt wird dW negativ, d.h. Arbeit muß in die Bewegung der Ladung hinein gesteckt werden. Damit erhöht sich die potentielle Energie wegen  $\Delta E_{pot} = -dW$ . Falls wir mit einer ungeladenen Kugel beginnen und sie langsam auf die Ladung Q aufladen entspricht dies einer Änderung der potentiellen Energie von:

$$E_{pot} = -\int_{q=0}^{Q} \int_{\infty}^{P} \mathrm{d}q \vec{E}(q) \mathrm{d}\vec{r}$$
(4.1.33)

Mit dem elektrischen Potential  $\Phi$ einer Kugel der Ladung qkönnen wir schreiben:

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\phi = \int_P^\infty \vec{E} d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$
(4.1.34)

Damit wird die potentielle Energie zu:

$$E_{pot} = \int_{q=0}^{Q} \phi dq = \int_{q=0}^{Q} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$
(4.1.35)

D.h. die gespeicherte potentielle Energie eines Kondensators ist mit  $Q=CU^{-4}\colon$ 

$$E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2$$
 (4.1.36)

Dieser Zusammenhang lässt sich auch verallgemeinern, wenn wir die Kapazität eines Plattenkondensators ansetzen mit  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$  und die Spannung die an diesem Kondensator anliegt mit U = Ed. Damit bekommen wir:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{=V}$$
(4.1.37)

Damit wird die Energiedichte w des elektrischen Feldes zu:

$$w = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$
(4.1.38)

Diese Gleichung gilt ganz allgemein unabhängig von der Annahme eines bestimmten Kondensatortyps.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Wir hatten oben die potentielle Energie einer einzelnen Ladung im Feld einer anderen Ladung abgeleitet mit  $E_{pot} = eU$ . Mit Q/U ergibt sich hier allerdings eine Formel  $E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$ , d.h. woher kommt der Faktor 1/2 ? Dies löst sich auf, wenn man berücksichtigt, daß man zur Berechnung der Energie des ersten Beispiels mittels  $E_{pot} = \frac{1}{2}QU$ , beide Ladungen berücksichtigen muß. D.h. mit Q=2e ergibt sich konsistent wieder  $E_{pot} = \frac{1}{2}(2e)U = eU$ .

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

## 4.2 Der elektrische Strom

Die Ladungsmenge, die pro Zeit durch eine gegebene Fläche tritt bezeichnet man als elektrischen Strom. Mit diesem Transport von Ladungsträgern lässt sich Energie von einem Ort zum nächsten nahezu verlustfrei transportieren bzw. in vielfältiger Art und Weise zur Verrichtung von Arbeit nutzen.

## 4.2.1 Strom und Widerstand

## Strom und Stromdichte

Der elektrische **Strom** I ist definiert als eine Ladungsmenge, die pro Zeit durch den Querschnitt in einem leitenden Objekt tritt. Es gilt die Definition:



Abbildung 4.2.1: Elektrischer Strom entspricht dem Transport von Ladungsträgern.

Ströme werden in der Einheit **Ampere** gemessen wobei 1 A, einer Ladungsmenge von 1 Coloumb entspricht, die pro Sekunde durch einen gegebenen Querschnitt transportiert wird. Der Strom läßt sich auch über die **Stromdichte**  $\vec{j}$  definieren, die den Strom pro Fläche  $\vec{A}$  angibt. Aus der Stromdichte läßt sich der Gesamtstrom immer über Integration gewinnen:

$$I = \int \vec{j} d\vec{A} \tag{4.2.2}$$

Wie ist die Stromdichte definiert? Betrachten wir dazu zunächst in einer Dimension eine Fläche A, durch die Ladungsträger mit einer Geschwindigkeit

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

 $v = \Delta x / \Delta t$  hindurch treten (siehe Abb. 4.2.1). D.h. Teilchen in einem Volumen der Ausdehnung  $\Delta x \cdot A$  erreichen in einem Zeitraum  $\Delta t$  diese Fläche und tragen zum Strom bei. Daraus ergibt sich der Strom bei einer Teilchendichte n zu:

$$I = nqA\Delta x \frac{1}{\Delta t} = nqAv \tag{4.2.3}$$

bzw. durch die Division durch A die Stromdichte als:

$$\vec{j} = nq\vec{v} \tag{4.2.4}$$

Die Ladung q bezieht sich auf die Ladung der Teilchen, die positiv oder negativ sein kann. Für Elektronen bzw. einfach geladenen Ionen gilt  $q = \pm e$ .

Wenn wir den Transport von Elektronen in einem elektrischen Feld betrachten, das in positive x-Richtung zeigt, so bewegen sich diese entgegen der Feldrichtung, d.h.  $v_x$  ist negativ. Mit q = -e wird allerdings auch:

$$j = n(-e)v_x \tag{4.2.5}$$

eine positive Zahl. D.h. der Elektronentransport führt zu einer Stromdichte *in Richtung* des elektrischen Feldes. Analog kann man einen Ausdruck für den Ionentransport im elektrischen Feld ableiten. Auch hier zeigt die Stromdichte *in Richtung* des elektrischen Feldes. Der Strom läuft also immer in Richtung des elektrischen Feldes, bzw. von Plus nach Minus in einem Stromkreis. Diese Richtung bezeichnet man als **technische Stromrichtung**. Dabei gilt es zu beachten, daß in den meisten Leitern, Elektronen die Ladung transportieren und somit die Teilchenbewegung des Elektronen entgegen der technischen Stromrichtung erfolgt.

Stromtransport kann über mehrere Mechanismen stattfinden:

#### • Elektronenleitung

In Metallen findet Stromtransport durch die Bewegung der Elektronen statt. Man spricht von Elektronenleitern.

## • Ionenleitung

Der Stromtransport in Form von Ionen findet in Elektrolyten statt in denen sich positive und negative Ionen bilden (NaCl,  $H_2SO_4...$ ). In einem elektrischen Feld wandern diese Ionen zu den entsprechenden Elektroden.

Eine wichtige Anwendung eines Ionenleiter ist eine **Brennstoffzelle**. In einer solchen Zelle werden zwei Reaktanden z.B.  $H_2$  und  $O_2$  *still* 

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

verbrannt. Dazu bildet sich an einer Metallelektrode zunächst ein Proton, wobei das Elektron in der Metallelektrode abfliesst. Das Proton kann als *Ion* durch eine Membran zu einer Gegenelektrode *diffundieren* an der  $O^{2-}$  Ionen gebildet werden. Verbindet man die beiden Elektroden, so laufen die Elektronen über die elektrische Verbindung von einer Elektrode zur anderen, während die Ionen direkt durch die Membran (PEMFC Proton Exchange Membrane Fuel Cell, siehe Abb. 4.2.2) diffundieren. Damit ist der Stromkreis geschlossen.



Protonenleitermembran

**Abbildung 4.2.2:** In einer Brennstoffzelle findet Ladungstransport über den Transport von Protonen durch eine Ionen-leitende Membran statt.

Brennstoffzellen können sehr effizient chemische Energie  $(H_2+1/2O_2 \rightarrow H_2O)$  in elektrische Energie umwandeln.

### • Elektronen- und Ionenleitung

Bei Gasentladungen entsteht ein Plasma als Gemisch aus positiven und negativen Ladungsträgern. In solchen Plasmen findet Stromtransport über die Bewegung *beider* Ladungsträgersorten statt. Nachdem Quasineutralität herrscht (d.h. die Dichte an positiver und negativer Ladung muß gleich sein) können wir bei einfach geladenen Ionen (q = +e) die Stromdichte einfach angeben als:

$$\vec{j} = en\left(\vec{v}_{+} - \vec{v}_{-}\right) \tag{4.2.6}$$

Mit  $\vec{v}_+$  der Geschwindigkeit der Ionen und  $\vec{v}_-$  der Geschwindigkeit der Elektronen.

## • Leitung durch Membranen

Insbesondere im biologischen Kontext findet Stromfluss durch Membranen statt, die z.B. das Innere einer Zelle elektrisch von der Umwelt isolieren. Spezielle Protein fungieren als Ionenkanäle und transportieren Protonen von der Innen- auf die Außenseite oder umgekehrt.

#### Membranen

Der Ladungstransport über Membranen ist ein wesentlicher Mechanismus der Signalverarbeitung n Zellen. Eine Zellmembran trennte zwei Medien und über Ionenkanäle und Elektronentransport kann ein Ladungsaustausch stattfinden. Die Spannungen, die dabei auftreten sind im Bereich von 100 mV. Da diese Zellmembranen aber auch sehr dünn sind im Bereich von 5 nm, entstehen elektrische Felder im Bereich von 20 MV/m. Spezielle Proteine innerhalb der Zellmembran erlauben den Ionentransport, so wird der Strom von Protonen genutzt, um im Inneren der Zelle Phosphat als Energiespeicher zu binden.



Quellen für elektrischen Strom lassen sich auf vielfältige Weise realisieren. Im folgenden seien einzelne Beispiele genannt:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

## • Generator

Die wichtigste Stromquelle ist ein **Generator**, der aus mechanischer Energie elektrische Energie erzeugt. Primär produziert dieser Wechselstrom, wie weiter unten noch genau diskutiert wird.

## • Galvanisches Element

Die früheste Beobachtung von Strom gelang mit Hilfe eines sogenannten Galvanischen Elementes. Hierzu verwendet man zwei Metallelektroden, die über einen Elektrolyten miteinander verbunden sind. Durch die chemische Reaktion des Elektrodenmaterials mit dem Elektrolyten entsteht eine Ladungstrennung. So treten z.B. bei einer Zinkelektrode  $Zn^{2+}$ -Ionen in Lösung über. Es verbleibt ein Überschuss an Elektronen und die Elektrode lädt sich negativ gegenüber dem Elektrolyten auf (siehe Abb. 4.2.3). Der Übergang von Zink in Lösung findet solange statt, bis das elektrische Feld durch den Elektronenüberschuß im Material, dem Abtransport von positiven Zinkionen entgegenwirkt. Man erhält im Gleichgewicht einen definierten konstanten Spannungsunterschied zwischen Elektrode und Elektrolyt.



**Abbildung 4.2.3:** Durch die Reaktion eines Metalls (Bsp Zink) mit einem Elektrolyten (Bsp.  $H_2SO_4$ ) erhält man einen Spannungsunterschied.

Vergleicht man jetzt zwei unterschiedliche Elektrodenmaterialien, zum Beispiel Zink und Kupfer, so beobachtet man unterschiedliche Spannungsunterschiede, da die Reaktion der Metallionen mit dem Elektrolyten jeweils unterschiedlich ist (Zink-Ionen treten leichter in Lösung über als Kupfer-Ionen). Mit einem Spannungsmeßgerät, das man an beide Elektroden hält, läßt sich jetzt allerdings von außen nur der *Unterschied* der beiden Potentialdifferenzen messen (siehe Abb. 4.2.4)<sup>5</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Würde man einen Messfühler in den Elektrolyten halten, so erzeugt man ein neu-



Abbildung 4.2.4: Der Potentialunterschied von zwei Metallen gegenüber einem Elektrolyten läßt sich extern als Spannungsunterschied  $\Delta U$  zwischen den Metallen beobachten.

Zunächst befindet sich die Galvanische Zelle in einem stationären Gleichgewicht, bei denen an beiden Elektroden sich an der Oberfläche jeweils Zink bzw. Kupfer-Ionen in Lösung gebildet haben. Verbindet man allerdings jetzt beide Elektroden durch ein Kabel miteinander, so findet Stromfluß statt, da die Elektronen von der stark negativ aufgeladenen Zinkelektrode abfließen können (siehe Abb. 4.2.5). Diese Elektronen werden durch die Bildung neuer Zink-Ionen nachgeliefert. D.h. die Zinkelektrode *löst sich auf*, und die Ionen wandern zur Kupferelektrode und schließen damit den Stromkreis.



Abbildung 4.2.5: Bei einem Galvanischen Element wird aus einer chemischen Reaktion (hier das Auflösen einer Zinkelektrode) Strom gewonnen.

Genau diese Beobachtung machte Galvani (1737-1798), der zwei Elek-

es Galvanisches Element, das diesmal aus einer der ursprünglichen Elektroden und dem Material des Messfühlers selbst gebildet wird.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

troden in Kontakt mit einem Froschbein brachte. Der elektrische Strom induzierte Nervenreizungen, die als Bewegung des Froschbeins sichtbar wurden. Alexander von Humboldt hat im 19ten Jahrhundert in Eigenversuchen die Wirkung unterschiedlicher Galvanischer Elemente untersucht, wie sehr anschaulich mit folgendem Zitat dokumentiert ist:

Zufällig stieß er auf Galvanis Buch über den Strom und die Frösche. Galvani hatte abgetrennte Froschschenkel mit zwei unterschiedlichen Metallen verbunden, und sie hatten gezuckt wie lebendig. Lag das nun an den Schenkeln, in denen noch Lebenskraft war, oder war die Bewegung von außen gekommen, aus dem Unterschied der Metalle, und von den Froschteilen bloß sichtbar gemacht? Humboldt beschloss es herauszufinden.

Er zog sein Hemd aus, legte sich aufs Bett und wies einen Diener an, zwei Aderlaßpflaster auf seinen Rücken zu kleben. Der Diener gehorchte, Humboldts Haut warf zwei große Blasen. Und jetzt solle er die Blasen aufschneiden! Der Diener zögerte, Humboldt mußte laut werden, der Diener nahm ein Skalpell. Es war so scharf, daß der Schnitt kaum schmerzte. Blut tropfte auf den Boden. Humboldt befahl, ein Stück Zink auf eine der Wunden zu legen.

Der Diener fragte, ob er Pause machen dürfe, ihm sei nicht wohl. Humboldt bat ihn, sich nicht dumm anzustellen. Als ein Silberstück die zweite Wunde berührte, ging ein schmerzhaftes Pochen durch seine Rückenmuskeln, bis hinauf in den Kopf. Mit zitternder Hand notierte er: Muscularis cucularis, Hinterhauptbein, Stachelfortsätze des Rückenwirbelbeins. Kein Zweifel, hier wirkte Elektrizität. Noch einmal das Silber! Er zählte vier Schläge, in regelmäßigem Abstand, dann wichen die Farben aus den Gegenständen<sup>26</sup>

Die Spannung zwischen Metall und Elektrolyt kann nur relativ zueinander gemessen werden. Mit einer wasserstoff-umspülten Platinelektrode als Referenz (d.h. die Bildung von Protonen an der Platinoberfläche wird auf Spannung 0 Volt normiert  $H_2=0$ ) ergeben sich die Spannungsunterschiede von:

Li: -3.02 V, Zn: -0.76 eV, Cu: +0.35 V, Au: +1.5 eV

D.h. je *edler* das Metall wird, desto weniger hat es die Tendenz mit einem Elektrolyten zu reagieren.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>aus: Daniel Kehlmann :"Die Vermessung der Welt", ein Vergleich der Lebensgeschichten von Carl Friedrich Gauß und Alexander von Humboldt.

## • Anodisieren, Elektropolieren

Betrachtet wir ein Galvanisches Element bestehend aus einer Zink und einer Kupferelektrode, so läßt sich das Gleichgewicht zwischen den beiden Elektroden durch das Anlegen einer Spannungsquelle verschieben. Vergrößert man die negative Spannung an der Zinkelektrode, so verbleiben die Zinkionen an der Elektrode und die Kupferionen werden zur Zinkelektrode getrieben. Dabei wird die Zinkelektrode *verkupfert* bzw. die Kupferelektrode *elektropoliert*. Falls man umgekehrt eine stark positive Spannung an die Zinkelektrode anlegt, werden dort Elektronen entnommen und die Zinkelektrode löst sich auf und die Zinkionen wandern zur Kupferelektrode, dabei wird diese *verzinkt* und die Zinkelektrode *elektropoliert*. Den positiven Pol bezeichnet man dabei immer als Anode und den negativen Pol immer als Kathode.

## • Batterie

Bei einer Batterie entnimmt man einem Galvanischen Element Strom. Dadurch gehen im Fall des Zn-Cu-Elementes verstärkt Zink-Ionen in Lösung, d.h. die Elektrode löst sich auf. Diese Zinkionen schlagen sich auf der Oberfläche der Kupferelektrode nieder. Würde diese vollständig mit Zink bedeckt, ist die Grenzfläche beider Elektroden nur noch durch die chemische Identität von Zink bestimmt, d.h. die Spannungsdifferenz zwischen beiden Elektroden verschwindet. Dieses Versagen der Batterie läßt sich vermeiden, indem man den Ionentransport zwischen den Elektroden limitiert (siehe Abb. 4.2.6): (i) zum einen kann man als Elektrolyt Kupfersulfat (CuSO<sub>4</sub>) verwenden. Die Kupfer-Ionen scheiden sich zusammen mit den Zink-Ionen ab und führen zu einer Auffrischung der Kupferelektrode; (ii) alternativ dazu kann man auch Ionenleitermembranen oder Salzbrücken verwenden, die nur Ladungsträger einer bestimmten Sorte durchlassen.

Ein Galvanisches Element im Sinne einer Batterie wird zum Teil unbeabsichtigt erzeugt. Ein Beispiel ist die Verwendung von Wasserleitungen aus zwei unterschiedlichen Materialien, die leitend verbinden sind (Cu-Rohr auf Zn-Rohr). Wenn durch diese Wasserleitung salzhaltiges Wasser fließt, ist der Stromkreis über diesen Elektrolyten geschlossen und das Zinkrohr löst sich entsprechend auf. Allerdings kann dieser Zinkabtrag auch genutzt werden. Beispiel ist hier die Verzinkung von Blechen. Bei einem Schaden in diesem Blech liegt das Eisen frei und bei einem Salzhaltigen Elektrolyten löst sich Zink auf und wandert zu dem Eisen in der Fehlstelle. Dabei wird diese Fehlstelle allerdings wieder abgedeckt. D.h. die Verzinkung hat eine *selbst-heilende* Wirkung.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 4.2.6:** Bei einer Batterie wird ein Galvanisches Element zur Stromproduktion genutzt. Eine Membran schützt in diesem Beispiel die Kupferelektrode vor dem Verzinken.

## Das Ohmsche Gesetz

Ladungsträger werden durch elektrische Felder bewegt. Allerdings ist dies zunächst eine beschleunigte Bewegung. Im Gleichgewicht stellt sich eine Bilanz aus Beschleunigung im elektrischen Feld und der Abbremsung der Ladungsträger durch Stöße mit der Umgebung ein. Man spricht von **Drift**. In einem Metall haben die Elektronen zum Beispiel sehr hohe kinetische Energien im Bereich von einigen eV. Die entsprechenden Geschwindigkeitsrichtungen sind allerdings im Raum isotrop verteilt, und die Summe aller Geschwindigkeiten ergibt Null. Überlagert man jetzt ein elektrisches Feld, so wird diese Geschwindigkeitsverteilung leicht anisotrop und es ergibt sich in der Summation genau diese Driftgeschwindigkeit! Dies ist in Abb. 4.2.3 illustriert.

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons ergibt sich aus einer Bilanzierung der Beschleunigung in einem äußeren elektrischen Feld und den Stoßprozessen, die dieser entgegen stehen:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\vec{v}\frac{1}{\tau}$$
(4.2.7)

mit  $\tau$  der Zeitspanne zwischen zwei Stößen eines Elektrons mit Atomen seiner Umgebung. Im Gleichgewicht muß die Zeitableitung auf der linken Seite verschwinden und wir können nach der Geschwindigkeit für diese Drift auflösen:

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.2.7: In einem Metall haben die Elektronen eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung. Legt man ein elektrisches Feld an, so wird diese Verteilung anisotrop und die Summe aller Geschwindigkeiten addiert sich zu einer Driftgeschwindigkeit  $v_{Drift}$ . Im mikroskopischen Sinne finden im Mittel alle  $\tau$  Sekunden Stöße der Elektronen mit den Festkörperatomen statt.

$$\vec{v}_{Drift} = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \tag{4.2.8}$$

Die läßt sich verkürzt schreiben mit der sog. **Beweglichkeit**  $\mu$ :

$$\boxed{\vec{v}_{Drift} = \mu \vec{E}} \tag{4.2.9}$$

Für  $\mu$  gilt:

$$\mu = \frac{q\tau}{m} \tag{4.2.10}$$

Die Stromdichte, die durch ein elektrisches Feld jetzt getrieben wird ist die Ladungsträgerdichte mal Ladung mal der Driftgeschwindigkeit und wir bekommen:

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} \tag{4.2.11}$$

Auch dies wird kompakter geschrieben mit einer neuen Größe Leitfähigkeit  $\sigma$ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{4.2.12}$$

mit der Leitfähigkeit als:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e} \tag{4.2.13}$$

Dies bezeichnet man als das **Ohm'sche Gesetz**. Die Leitfähigkeit beschreibt die Fähigkeit eines Materials Strom zu transportieren. Sie besitzt die Einheit  $AV^{-1}m^{-1}$  bzw.  $\Omega^{-1} m^{-1}$ , wobei die Einheit des Widerstandes in Ohm verwendet wurde ( $\Omega = VA^{-1}$ ).

Dieser Zusammenhang gilt nur, wenn die Stromdichte und das Feld *line*ar miteinander verknüpft sind. In speziellen Fällen ist aber z.B. die Stoßzeit nicht mehr eine Konstante der Bewegung, sondern hängt explizit von der Teilchengeschwindigkeit ab. In diesem Fall ergibt sich ein anderer Zusammenhang zwischen Feld und Strom.

Alternativ zur Leitfähigkeit wird oftmals auch der **spezifische Widerstand** benutzt, der nur dem Kehrwert der spezifischen Leitfähigkeit entspricht.

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau} \tag{4.2.14}$$

Die Einheit des spezifischen Widerstandes ist  $\Omega \cdot m$  Diese mikroskopische Beschreibung eines elektrischen Widerstandes läßt sich auf einen makroskopischen Zusammenhang zurückführen, wenn man einen einfachen Körper der Länge L mit einer Querschnittsfläche A betrachtet, zwischen dessen Enden eine Spannung U anliegt, wie in Abb. 4.2.8 illustriert. Für diese Geometrie erhält man I = jA und U = LE und man kann das Ohmschen Gesetz  $j = \sigma E$ umschreiben zu:



Abbildung 4.2.8: Der Strom wird durch ein elektrisches Feld durch einen Körper der Länge L transportiert.

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{U}{L} \tag{4.2.15}$$

Daraus ergibt sich:

$$U = \underbrace{\frac{L}{A\sigma}}_{=R} I \tag{4.2.16}$$

Mit der neuen Größe des elektrischen **Widerstandes** R kann man diesen Zusammenhang kompakt als alternative makroskopische Formulierung des Ohm'schen Gesetz bezeichnen:

$$\boxed{U = RI} \tag{4.2.17}$$

Die mittlere Bewegung der Ladungsträger erfolgt mit der Driftgeschwindigkeit. Betrachtet man zum Beispiel Kupfer, an das ein elektrisches Feld in der Größe von 0.1 V/m angelegt wird, so ergibt sich eine Driftgeschwindigkeit von  $0.4 \text{ mm s}^{-1}$ . Diese Geschwindigkeit ist viel langsamer als die *isotrope* Geschwindigkeit der Elektronen in der Größe von  $10^6 \text{ ms}^{-1}$  (Fermigeschwindigkeit). Bei dieser Abschätzung würde man eigentlich folgern, daß ein Strompuls eine sehr lange Zeit benötigt, um ein Kabel entlang zu laufen. Dem ist nicht so! Erhöhen wir zum Beispiel die Ladungsmenge an einem Ende des Kabels durch das Verbinden mit einer Spannungsquelle, so hat die dortige Änderung der Ladung eine Änderung des elektrischen Feldes in der ganzen Umgebung zur Folge. Diese Information der Feldänderung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus (virtuelle Photonen). D.h. die Elektronen am hinteren Ende des Kabels merken nahezu sofort, daß am vorderen Ende des Kabels eine Spannungsquelle zugeschaltet wurde. Dementsprechend reagieren sie und beginnen auch sofort zu driften. D.h. der Strompuls breitet sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf dem Kabel aus<sup>7</sup>.

Ein Beispiel aus der Biologie für den Transport als Drift ist die Elektrophorese, bei der eine Substanz auf der Oberfläche eins Gels im elektrischen Feld wandert und so analysiert werden kann.

Im folgenden wollen wir den elektrischen Widerstand in einem mikroskopischen Sinne betrachten. Der spezifische Widerstand war abgeleitet worden zu:

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau_e} \tag{4.2.18}$$

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Als Analogon wird oftmals eine gefüllte Wasserleitung verwendet, in die man an einem Ende Wasser hinein drückt und das Wasser am anderen Ende sofort herauskommt. Dies suggeriert, daß die Elektronen sich untereinander "anschieben" und dadurch der Stromtransport so schnell stattfindet. Dies ist etwas irreführend, da die Information bei dem Strompuls über Änderung der elektrischen Felder übertragen wird

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum
#### Elektrophorese

Bei der Elektrophorese nutzt man die unterschiedliche Beweglichkeit von Substanzen in einem Medium aus. Eine Probe wird eingefärbt und an eine Kante des Mediums gesetzt. Ein elektrisches Feld wird angelegt und die einzelnen Bestandteile der Probe beginnen in dem Feld zu migrieren wobei leichtere etwas schneller vorankommen als schwere größere Moleküle. Nach einiger Zeit entsteht ein charakteristisches Muster.



Man erkennt, daß dieser zum einen von den Dichten der Ladungsträger n aber auch von der Stoßzeit  $\tau$  der Ladungsträger beim Transport abhängt.

Als Beispiel für die Anwendung des Stromes als eine Änderung der Ladung mit der Zeit und dem Einfluss eines elektrischen Widerstandes wollen wir einen sehr einfachen Schaltkreis betrachten (siehe Abb. 4.2.9). Dieser besteht aus einem Kondensator, der von einer Spannungsquelle mit der Spannung  $U_0$  über einen Widerstand aufgeladen wird. Der Strom der fließt ist:

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC}$$
(4.2.19)

Wenn wir beide Seiten nach der Zeit ableiten, so bekommen wir:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}I(t)$$
(4.2.20)

Diese Differentialgleichung läßt sich lösen zu

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$
(4.2.21)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Setzt man diese Lösung in Gl. 4.2.19 ein, so ergibt sich die Zeitabhängigkeit der Spannung zu:

$$U(t) = U_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$
 (4.2.22)



**Abbildung 4.2.9:** Die Änderung von Strom- und Spannung beim Laden eines Kondensators.

Die Verläufe von Strom und Spannung sind in Abb. 4.2.9 illustriert. Man erkennt, daß der Strom beim Laden kontinuierlich absinkt, während die Spannung anwächst und schließlich den Wert  $U_0$  der Spannungsquelle erreicht. Die Zeitkonstante für die Strom- und Spannungsänderung ist durch den Term RC gegeben.

Widerstände lassen sich auf unterschiedliche Art und Weise vermessen. Eine sehr effiziente Methode ist die Verwendung einer **Brückenschaltung**, bei der eine empfindliche Vergleichsmessung von mehreren Widerständen durchgeführt wird. Betrachten wir den Stromkreis, der in Abb 4.2.10 illustriert ist. Der Strom kann auf zwei Zweigen über die Widerstände  $R_1$  und  $R_x$ , sowie über  $R_2$  und  $R_3$  abfliessen. Der unbekannte Widerstand sei  $R_x$ . Die einzelnen Widerstände sollen so bemessen sein, daß in der Verbindung der zwei Zweige kein Strom fließt, d.h. die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  müssen gleich sein. Der Strom  $I_{oben}$ , der über den oberen Zweig fließt, ergibt:

$$I_{oben} = \frac{U_0}{R_1 + R_x} = \frac{U_1}{R_x}$$
(4.2.23)

woraus man bekommt:

$$U_1 = U_0 \frac{R_x}{R_1 + R_x} \tag{4.2.24}$$

D.h. die Spannung  $U_0$  wird gemäß dem Anteil der beiden Widerstände geteilt und man bekommt in der Mitte die Spannung  $U_1$ . Ein solche Anordnung bezeichnet man als **Spannungsteiler**.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.2.10: Messung von Widerständen über eine Wheatston' sche Brückenschaltung.

Der Strom  $I_{unten}$  im unteren Zweig ist

$$I_{unten} = \frac{U_0}{R_2 + R_3} = \frac{U_2}{R_3} \tag{4.2.25}$$

woraus man bekommt:

$$U_2 = U_0 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \tag{4.2.26}$$

Damit der Strom zwischen den beiden Zweigen, wie oben postuliert, verschwindet, muß  $U_1 = U_2$  gelten und es ergibt sich:

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2} \tag{4.2.27}$$

In der Praxis wird dies durch einen variablen Widerstand realisiert. Durch einen Mittelabgriff am Ort x auf einem kontinuierlich sich ändernden Widerstand der Länge L, kann das Verhältnis  $R_2$  zu  $R_3$  verändert werden kann. Mit  $R_2/R_3 = x/(L-x)$  ergibt sich somit:

$$R_x = R_1 \frac{L-x}{x} \tag{4.2.28}$$

#### Die elektrische Leistung

Bei dem Transport einer Ladung Q wird Arbeit verrichtet. Setzt man diesen Transport in Relation zur benötigen Zeit, erhält man die damit verbundene Leistung. Betrachten wir eine Strecke vom Punkt  $P_1$  zu einem Punkt  $P_2$ , über die eine Spannung U abfällt und über die ein Strom I getrieben wird. Die Arbeit, die dabei geleistet wird ist:

$$W = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$$
 (4.2.29)

$$= Q \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} - Q \int_{P_2}^{\infty} \vec{E} d\vec{s}$$
 (4.2.30)

$$= Q(\phi(P_1) - \phi(P_2)) = QU$$
 (4.2.31)

Die Zeitableitung der Arbeit liefert die Leistung gemäß:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt}U = UI \tag{4.2.32}$$

mit U = RI ergibt sich:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$
 (4.2.33)

### 4.2.2 Netzwerke

#### Kirchhoff'sche Regeln

Eine Anordnung von elektrischen Leitern mit darin befindlichen elektrischen Bauteilen (Widerstände, Kondensatoren, Induktivitäten) kann man allgemein als **Netzwerk** bezeichnen. Für die Spannungen und Ströme in einem solchen Netzwerk gelten die Kirchhoff'schen Gesetze, wie in Abb. 4.2.11 illustriert.



Abbildung 4.2.11: Die Summe der Spannung in einer Masche muß Null ergeben. Die Summe aller Ströme an einem Knoten muß Null ergeben.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Zunächst gilt es auf allen Verbindungslinien die jeweiligen Ströme mit ihren Richtungen einzutragen, sowie die Spannungen, die zwischen benachbarten Knoten abfallen. Auch hier gibt man eine Richtung vor. Wenn man bei der Analyse des Netzwerks für diese Unbekannten einen negativen Wert bekommt, so muß der Strom in die andere Richtung wie zunächst definiert laufen bzw. die Polarität des Spannungsabfalls dreht sich um.

#### • 1. Kirchhoffsche Regel - Knotenregel

Bei einem Knoten in diesem Netzwerk laufen mehrere Leiter an einem Punkt zusammen. Wegen der Ladungserhaltung muß die Bilanz der Ströme, die zu diesem Knoten hin- bzw. von ihm abfliessen ausgeglichen sein. Dies läßt sich als Gleichung formulieren gemäß

$$\sum_{i} I_i = 0 \tag{4.2.34}$$

Wobei man die Ströme die zu einem Knoten hinfliessen bzw. die einen Knoten verlassen mit unterschiedlichem Vorzeichen ansetzt.

#### • 2. Kirchhoffsche Regel - Maschenregel

In einem Netzwerk kann man allerdings auch eine Masche verfolgen, wie in Abb. 4.2.11. Nachdem das elektrische Potential an einem Punkt eindeutig ist, muß die Summe der Spannungsdifferenzen zwischen einzelnen Knoten, die man addiert, wenn man in einer Masche einmal umläuft gleich Null sein:

$$\boxed{\sum_{k} U_k = 0} \tag{4.2.35}$$

Bei dieser Summation zählen wir alle Spannungen positiv bei denen wir entlang der zuerst definierten Richtung die Masche durchlaufen. wenn wir entgegen des ursprünglichen Sinnes die Spannung durchlaufen, zählen wir diese negativ.

Falls wir eine Masche mit einer Spannungsquelle betrachten, muß die Summe der Spannungen die abfallen, die von außen angelegte Spannung ergeben:

$$\sum_{k} U_k = U_0 \tag{4.2.36}$$

Als Beispiel für die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze wollen wir die möglichen Verschaltungen von Widerständen betrachten, wie in Abb. 4.2.12 illustriert:

#### • Serienschaltung

Bei der Serienschaltung werden Widerstände hintereinander geschaltet. Die Knoten entsprechen jetzt den Punkten zwischen den Widerständen. An jedem Knoten läuft ein Strom ein und verläßt ihn wieder. Aus der Knotenregel kann man sofort schließen, daß der Strom in der ganzen Anordnung gleich sein muß. Dieser Strom durch jeden Widerstand I ist nach dem Ohmschen Gesetz mit der Spannung verknüpft, die über ihn abfällt:



Abbildung 4.2.12: Serien- und Parallelschaltung von Widerständen.

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} = \dots$$
(4.2.37)

Nach der Maschenregel bilden wir die Summe aller Spannungen die zwischen den Knoten abfallen, die zusammen die von außen angelegte Spannung U ergeben muß. D.h. man kann sofort setzen

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \dots = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots)I$$
(4.2.38)

und erhält als Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  der Anordnung:

$$R_{ges,seriell} = \sum_{i} R_i \tag{4.2.39}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

#### • Parallelschaltung

Bei einer Parallelschaltung laufen die Widerstände jeweils auf beiden Seiten an einem einzigen Knoten zusammen. Dementsprechend muß der Spannungsabfall nach der Maschenregel für alle Widerstände gleich sein.

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = \dots (4.2.40)$$

Der Gesamtstrom I, der in die Knoten hineinfließt verteilt sich aber jetzt auf die Parallelwiderstände:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \tag{4.2.41}$$

Der Strom, der durch jeden einzelnen Widerstand fließt ist durch den Spannungsabfall U und den jeweiligen Widerstand gegeben:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots\right)U \qquad (4.2.42)$$

Daraus ergibt sich eine Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  der Anordnung von:

$$\frac{1}{R_{ges,parallel}} = \sum_{i} \frac{1}{R_i}$$
(4.2.43)

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen in einem beliebigen Netzwerk durchläuft man folgende Schritte:

- Einzeichnen der Ströme und Spannungen auf jeder Verbindungsgeraden mittels eines Pfeils. Die Richtung kann beliebig gewählt werden.
- Anwenden der Knotenregel, wobei Ströme die zu einem Knoten hin zeigen addiert und die von ihm weg zeigen subtrahiert werden.
- Anwenden der Maschenregel indem man eine Masche in einem beliebigen Sinn durchläuft. Spannungspfeile, die in dieselbe Richtung zeigen wie der Umlaufsinn werden addiert und die in die entgegengesetzte Richtung zeigen werden subtrahiert. Diese Summe ist gleich einer externe Spannungsquelle, falls vorhanden.
- Für jedes Bauteil wie Widerstand R, Kapazität C oder Induktivität L (siehe unten) auf einer Verbindungsgeraden werden die Verknüpfungen zwischen Strom und Spannung angewendet.

• Es entstehen genauso viele Gleichungen wie unbekannte Ströme und Spannungen. Wenn bei der Lösung dieses Gleichungssystems ein negativer Wert für einen Strom oder eine Spannung herauskommt, bedeutet dies nur das der Strom in umgekehrter Richtung zum eingezeichneten Pfeil fließt bzw. die Spannung in die dem Pfeil entgegen gesetzte Richtung abfällt.

Auch in der Biologie ist Stromfluss ein integraler Bestandteil, wie das Beispiel der Kabelbakterien illustriert.

#### Kabelbakterien

Der Abbau von organischem Material findet meist per Oxidation statt. Eine solche Oxidation ist für den Chemiker ein Elektronentransfer von einem Material auf das Sauerstoffatom das sehr elektronegativ ist. Unter anaeroben Bedingungen fehlt allerdings dieser Sauerstoff weshalb organischen Material nicht verrotten kann. Es gibt aber Bakterien, die durch einen Trick diese umgehen können, indem sie so genannten Stromkabel legen von einem Bereich die die Übergabe an Sauerstoff bedingen, die Atmung, und dem Bereich an dem die Verdauung stattfindet. Ein typisches Beispiel ist der Meeresboden mit einem oberen aeroben und einem tieferen anaeroben Bereich. Kabelbakterien überwinden diesen Bereich. Sie umfassen ungefähr mehrere Tausend Kilometer in den oberen 2 Zentimetern des Meeresboden.



Kabelbakterien als Stromleiter. Quelle: Bild der Wissenschaft.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 4.3 Magnetostatik

Bislang hatten wir die Kraft betrachtet, die *ruhende* Ladungen aufeinander ausüben, die **Coloumb-Kraft**. Im folgenden wollen wir den Fall betrachten, daß sich diese Ladungen relativ zueinander *bewegen* können. Es tritt eine neue Kraft auf, die **Lorenz-Kraft**. Ursache dieser Kraft sind Magnetfelder.

## 4.3.1 Magnetismus

Magnetismus ist ein bekanntes Naturphänomen. Zunächst waren Gesteine bekannt, die je nach Orientierung untereinander eine anziehende oder abstoßende Wirkung haben. Man bezeichnet sie als **Magnete**. Die an- bzw. abstoßende Wirkung eines solchen Permanentmagneten wird durch **Pole** ausgedrückt. Wobei eine Seite des Magneten als **Nordpol** die andere als **Südpol** bezeichnet wird. Die Kraftwirkung ergibt sich gemäß der Regel:

- Gleichnamige Pole stoßen sich ab.
- Ungleichnamige Pole ziehen sich an.

Die Stärke dieser Kraftwirkung kann man wieder mit einem Feld, dem Magnetfeld ausdrücken (siehe Abb. 4.3.1). Per Konvention, treten die Linien eines Magnetfeldes am Nordpol aus dem Körper *heraus*, während sie am **Südpol** in den Körper *eintreten*. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Es gilt<sup>8</sup>:

#### Magnetfeldlinien sind immer geschlossen

Dies ist im Unterschied zu den Feldlinien elektrischer Felder, die von einer positiven zu einer negativen Ladung laufen und dort enden<sup>9</sup>

Wie später noch gezeigt wird, werden Magnetfelder durch bewegte Ladungen erzeugt. In einem Permanentmagneten sind dies zum Beispiel die geordneten Bewegungen der Elektronen in jedem Festkörperatom. Aber auch stromdurchflossene Leitungen üben Kräfte aufeinander aus.

Magnetfelder werden in der Einheit **Tesla** gemessen wobei gilt:

<sup>9</sup>Oftmals wird gesagt, daß Magnetfeldlinien vom Nordpol zum Südpol laufen. Dies ist irreführend, da es suggeriert, daß Magnetfeldlinien einen Anfang und ein Ende besitzen. Demist nicht so. Die Magnetfeldlinien schließen sich im Innern des Magneten.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Es lassen sich mathematische Spezialfälle konstruieren in denen Feldlinien auch ins Unendliche gehen, bzw. aus diesem kommen. Beispiel wäre die Feldlinie auf der z-Achse eines stromdurchflossenen Ringes, oder eine verdrillte Feldlinie in einem Tokamak mit einer nicht rationalen Verscherung (siehe Skript Plasmaphysik). Dies sind allerdings akademische Beispiele. In einem endlichen Universum ist die Betrachtung von Feldlinien, die immer geschlossene sein müssen, ein sehr tragfähiges Bild.



Abbildung 4.3.1: Magnetfeld eines Permanentmagneten. Die Feldlinein terene am Nordpol aus dem Material heraus und am Südpol wieder hinein. Im Innern sind sie geschlossen.

 $1 \text{ Tesla} = 1 \text{ NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}$ 

Eine ältere Einheit ist *Gauss* mit 1 G =  $10^{-4}$  T.

Das bekannteste Magnetfeld ist das der Erde. Im Innern des flüssigen Erdkerns bewegen sich Gesteinsmassen durch Konvektion getrieben. Diese sind teilweise geladen und entsprechen somit neben dem Material- auch einem Stromtransport; ein Magnetfeld entsteht. Die Tatsache, daß ein Planet ein Magnetfeld besitzt ist somit Ausdruck seines flüssigen Kerns! Dieses Erdmagnetfeld hat große Bedeutung. Es schirmt die Erde vor dem Einfluss der einfallenden Teilchens des Sonnenwindes ab, die im magnetischen Feld der Erde abgelenkt werden.

#### 4.3.2 Bewegung einer Ladung im Magnetfeld

Das Vorhandensein von Magnetfeldern wird an der Kraftwirkung auf sich bewegende Ladungen sichtbar. Betrachten wir eine Ladung q, die sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  senkrecht zu einem Magnetfeld  $\vec{B}$  bewegt, wie in Abb. 4.3.2 illustriert. Man beobachtet eine Kraftwirkung, die senkrecht zur Geschwindigkeit als auch zum Magnetfeld orientiert ist. Die Richtung dieser Kraft hängt vom Vorzeichen der Ladung ab.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.3.1}$$

Dies bezeichnet man als **Lorentz-Kraft**. Zusammen mit der Coloumbkraft für die Ladung in einem elektrischen Feld läßt sich der allgemeine Ausdruck ableiten von:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.3.2: Bewegung einer Ladung in einem Magnetfeld B.

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{4.3.2}$$

Die Kraftwirkung auf eine einzelne Ladung läßt sich verallgemeinern auf einen stromdurchflossenen Leiter mit einem Querschnitt A und einer Länge l, wie in Abb. 4.3.3 illustriert. Der Strom I durch diesen Leiter ist:

$$I = nqvA \tag{4.3.3}$$



Abbildung 4.3.3: Lorentzkraft auf einen stromdurchflossenen Leiter.

Auf jede Ladung wirkt die Lorentzkraft. Mit einer Dichte n an Ladungsträger ergibt diese Kraft im Volumen  $A \cdot l$ :

$$\vec{F} = nq \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) Al \tag{4.3.4}$$

Dies läßt sich verkürzen zu:

$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{4.3.5}$$

Wenn wir mit  $\vec{l}$  die Stromrichtung und Länge des Leiters bezeichnen.

Betrachten wir im folgenden die Bewegung eines geladenen Teilchens senkrecht zum Magnetfeld, das sich mit der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  bewegt.

(4.3.7)

Durch die Kraft senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung durchläuft es eine Kreisbahn, die sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Lorentzkraft und Fliehkraft ergibt (siehe Abb. 4.3.4):

$$qv_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R} \tag{4.3.6}$$

Den Radius dieser Kreisbahn bezeichnet man Larmorradius  $R_L$  mit:



Abbildung 4.3.4: Gyrationsbewegung eines Teilchens im Magnetfeld.

Die Zeit, die ein Teilchen für einen Umlauf benötigt ist  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$ . Daraus ergibt sich die Umlauffrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_{\perp}}{R}$  von:

$$\omega_z = \frac{qB}{m} \tag{4.3.8}$$

Dies bezeichnet man als **Zyklotronfrequenz**. Man erkennt, daß diese Zyklotronfrequenz *unabhängig* vom Radius der Kreisbahn ist. Falls sich das Teilchen parallel zum magnetischen Feld bewegt erfährt es keine Kraft und bewegt sich demnach gleichförmig. Insgesamt ergibt sich eine Bewegung in der das Teilchen um die Magnetfeldlinien **gyriert** und sich das Zentrum der Kreisbahn entlang der Magnetfeldlinien bewegt.

Eine Kombination aus elektrischem und magnetischen Feld läßt sich als Geschwindigkeitsfilter von Teilchen nutzen, dem **Wienfilter**. Hierzu

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

durchläuft ein Teilchen der Ladung q einen Bereich mit gekreuztem elektrischem und magnetischem Feld, wie in Abb. 4.3.5 illustriert ist. Aus dem Kräftegleichgewicht sieht man sofort, daß das Teilchen dann *geradlinig* durch die Anordnung tritt, wenn gilt:



**Abbildung 4.3.5:** In einem Wienfilter passiert ein Teilchen ein gekreuztes elektrisches und magnetisches Feld.

$$qE = qvB \tag{4.3.9}$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit des Teilchens zu:

$$v = \frac{E}{B} \tag{4.3.10}$$

Man erkennt, daß dies unabhängig von der Ladung und der Masse des Teilchens ist. Hinter der Anordnung werden über eine Blende nur diejenigen Teilchen aufgesammelt, die geradlinig durch die Anordnung fliegen. Man variiert das elektrische Feld bei konstantem Magnetfeld solange bis dieses Signal maximiert ist. Aus dem Wert des E-Feldes läßt sich dann die Geschwindigkeit ableiten.

Mit der Anordnung eines Wienfilter läßt sich auch elegant das Verhältnis aus Ladung zu Masse eine Teilchens bestimmen. Hierzu verwendet man einen Wienfilter und bestimmt zunächst die Geschwindigkeit des Teilchens  $v_0$ . Anschließend schaltet man das Magnetfeld aus und beobachtet die Ablenkung des Teilchens im elektrischen Feld (siehe Abb. 4.3.6). Die Beschleunigung in y-Richtung läßt sich aus der Bewegungsgleichung ableiten:

$$v_y = a_y t = \frac{qE_y}{m}t \tag{4.3.11}$$

bzw.

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 4.3.6:** Thomson-Experimente zur Bestimmung von q/m eines Teilchens.

$$\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{qE_y}{2m}t^2 \tag{4.3.12}$$

mit  $t = \frac{\Delta x}{v_0}$  ergibt sich schließlich:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_y \left(\frac{\Delta x}{v_0}\right)^2 \tag{4.3.13}$$

wenn wir mit  $\Delta x$  die Wegstrecke entlang der Flugbahn und mit  $\Delta y$ , die Ablenkung nach dem Durchtritt durch die Anordnung bezeichnen. Nachdem  $v_0$ ,  $\Delta x$  und  $E_y$  bekannt sind, kann man aus einer Messung von  $\Delta y$ , das Verhältnis q/m des unbekannten Teilchens ermitteln.

#### Magnetfelder von stromdurchflossenen Anordnungen

Betrachten wir einen Leiter durch den ein Strom I fließt und ermitteln wir im folgenden das Magnetfeld im Abstand  $r_0$ . Aus der rechten-Hand-Regel schließt man sofort, daß das Magnetfeld kreisförmig um den Leiter verläuft. Das Magnetfeld fällt mit 1/r gegenüber dem Leiter ab:

$$B_{Leiter} = \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I \tag{4.3.14}$$

Dies ist analog zur Abhängigkeit des elektrischen Feldes eines geladenen Leiters.

Mit diesem Ausdruck können wir jetzt die Kraft zwischen zwei parallelen Leitern im Abstand r berechnen. Die Kraft auf einen Leiter 2 in dem ein

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Strom  $I_2$  fließt durch das Magnetfeld  $B_1$  des anderen Leiters 1 ist gegeben als:

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1$$
 (4.3.15)

Wir setzen das Magnetfeld ein und bekommen für den Betrag der Kraft:

$$F_2 = \mu_0 I_1 I_2 \frac{l}{2\pi r} \tag{4.3.16}$$

Aus der vektoriellen Ausrichtung der Ströme und den entsprechenden Magnetfeldern können wir folgern: (i) zwei parallele Leiter in denen der Strom in die gleiche Richtung fließt ziehen sich an;(ii) zwei parallele Leiter in denen der Strom in die entgegen gesetzte Richtung fließt, stoßen sich ab.

Betrachten wir einen stromdurchflossenen Ring. Man bekommt ein Magnetfeld in großem Abstand  $z \gg l$  und dem magnetischen Moment  $\mu = I\pi r_0^2$ :

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{z^3}$$
(4.3.17)

Betrachten wir das Magnetfeld einer Spule der Länge L, die N Windungen besitzt. Wie konstruieren einen Weg, der durch die Spule führt und im Unendlichen wieder geschlossen wird. Dieser Weg umfasst die N Leiter, durch die jeweils ein Strom I fließt. D.h. wir bekommen:

$$\oint \vec{B}d\vec{s} = \mu_0 N I \tag{4.3.18}$$

Das Magnetfeld im Unendlichen ist Null, d.h. dieser Beitrag zu dem Wegintegral verschwindet. Betrachtet man den Grenzfall einer unendlichen langen Spule wird das Integral zu:

$$BL = \mu_0 NI \tag{4.3.19}$$

und wir bekommen das Magnetfeld im Innern einer Spule von:

$$B_{Spule} = \mu_0 I \frac{N}{L} \tag{4.3.20}$$

## 4.4 Zeitlich veränderliche Felder

In der Elektro- und der Magnetostatik haben wir stationäre Probleme behandelt. Im folgenden wollen wir den allgemeineren Fall betrachten, bei der sich die Felder mit der Zeit ändern können.

## 4.4.1 Induktion

#### Faraday'sches Induktionsgesetz

Betrachten wir einen Magneten, der durch eine Leiterschleife bewegt wird. Man beobachtet eine Spannung an den Enden dieser Schlaufe der Größe (siehe Abb. 4.4.1):

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F}$$
(4.4.1)

Dies bezeichnet man als **Faraday'sches Gesetz** mit  $U_{ind}$  als der *indu*zierten **Spannung**. Das negative Vorzeichen drückt aus, daß die Spannung immer einer Änderung des magnetischen Flußes entgegen wirkt. D.h. diese Spannung treibt einen Strom, der seinerseits ein Magnetfeld erzeugt, daß der Änderung des magnetischen Flußes entgegen wirkt.

Das Flächenintegral über das Magnetfeld bezeichnet man als **magneti**schen Fluß:

$$\Phi_{mag} = \int_{Fl\"ache} \vec{B} \cdot d\vec{F}$$
(4.4.2)

Somit läßt sich das Faraday'sche Gesetz auch einfach schreiben als:

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} \tag{4.4.3}$$

Die induzierte Spannung ist identisch mit dem Integral über das elektrische Feld entlang des Leiters.

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = U_{ind} \tag{4.4.4}$$

Nachdem wir ein *zeitabhängiges* Problem betrachten, muß das elektrische Feld nicht länger konservativ sein und das geschlossene Integral darf einen Wert verschieden von Null annehmen. Damit verliert auch das elektrostatische Potential seine Bedeutung, das ja explizit aus der Bedingung abgeleitet wurde, daß die Arbeit im elektrischen Feld unabhängig von der Wahl des Weges ist.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 4.4.1:** Wird eine Magnet durch einen Ring bewegt, so wird dort eine Spannung induziert.

Mit dem Stokes'schen Satz können wir das Linienintegral umwandeln in:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = \int_{Fl\ddot{a}che} \mathbf{rot}\vec{E}d\vec{F}$$
(4.4.5)

bzw:

$$U_{ind} = \int_{Fläche} \mathbf{rot} \vec{E} d\vec{F}$$
(4.4.6)

Damit ergibt sich das Faraday'sche Gesetz in seiner differentiellen Form von:

$$\mathbf{rot}\vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B} \tag{4.4.7}$$

In der Elektrostatik gilt:

$$\mathbf{rot}\vec{E} = 0 \tag{4.4.8}$$

Wie läßt sich das Faraday'sche Gesetz anschaulich beschreiben? Die Änderung des magnetischen Flußes erzeugt zunächst eine Spannung. Diese Spannung treibt einen Strom, der wiederum ein Magnetfeld erzeugt, der der Flußänderung *immer entgegen* wirkt. Dies bezeichnet man als **Lenz'sche Regel**:

Ein Stromfluß wird immer in diejenige Richtung induziert, so daß das erzeugte Magnetfeld der Flußänderung in der Schleife entgegen wirkt.

Auf obiges Beispiel angewendet bedeutet dies: (i) bevor der Magnet in die Leiterschleife bewegt wurde, war der magnetische Fluß, der durch diese Schleife ging gering; (ii) bewegt man den Magneten hinein, so wird ein Stromfluß induziert dessen Magnetfeld versucht, diesen *geringen* magnetischen Fluß durch die Schleife aufrechtzuerhalten indem das erzeugte Magnetfeld dem äußeren entgegen wirkt.

Für den Fall, daß der Widerstand R der Leiterschleife Null ist (Bsp. Supraleiter) kann ein beliebig großer Strom erzeugt werden, der dafür sorgt daß der magnetische Fluß durch die Schleife sich *nicht* ändert. Man spricht in diesem Fall auch von einer perfekten Erhaltung des magnetischen Flusses.

$$\Phi_{mag} = \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F} \tag{4.4.9}$$

Dieser "Widerstand" gegen eine Flußänderung wird auch als Kraft sichtbar, wie wir an dem Beispiel einer Rechteckschleife veranschaulichen wollen, durch das teilweise ein magnetische Feld dringt (siehe Abb. 4.4.3). Wir bewegen die Schleife mit der Geschwindigkeit v aus dem Feld heraus, wobei sich der magnetische Fluß, der durch diese Schleife tritt, ändert.

Die Kraft auf ein Stück der Länge l dieses Leiters ist allgemein gegeben als:

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \tag{4.4.10}$$

Aus der Abb. 4.4.3 ist ersichtlich, das lediglich die Kraft auf das Stück der Breite b sich nicht heraus hebt. Die Änderung des magnetischen Flußes erzeugt eine induzierte Spannung  $U_{ind}$ , die gemäß dem Widerstand des Drahtes einen Strom treibt.

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{4.4.11}$$

Die Richtung des Stromes wirkt entsprechend der Lenz'schen Regel, der Änderung des magnetischen Flußes durch die Schleife entgegen: wenn die Schleife aus dem Magnetfeld heraus bewegt wird, wird ein Strom induziert, der ein Magnetfeld erzeugt, daß in dieselbe Richtung zeigt wie das äußere; wenn die Schleife in das Magnetfeld hinein bewegt wird, wird ein Strom induziert, der ein Magnetfeld erzeugt, daß in entgegen gesetzte Richtung zeigt wie das äußere.

Wenn wir mit dem Ort x den Anteil der Leiterschleife beschreiben, der sich an der Grenze zum magnetfeld-freien Raum befindet, bekommen wir einen magnetischen Fluß  $\Phi = Bbx$ . Die Zeitableitung ist:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.4.2: Kraft auf eine Leiterschleife, die aus einem Magnetfeld heraus- bzw. hinein geschoben wird: Beim Herausziehen wird in der Leiterschleife ein Strom induziert. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld das in dieselbe Richtung zeigt wie das äußere Magnetfeld. Beim Hineinschieben wird in der Leiterschleife ein Strom induziert, der ein Magnetfeld erzeugt, das dem äußeren Magnetfeld entgegen gerichtet ist. In beiden Fällen wirkt ein Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter, die entgegen der Bewegungsrichtung orientiert ist.

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bb\frac{dx}{dt} = Bbv \tag{4.4.12}$$

Das induziert eine Spannung:

$$U_{ind} = -Bbv \tag{4.4.13}$$

mit  $U_{ind} = RI$  ergibt sich

$$I = -\frac{1}{R}Bbv \tag{4.4.14}$$

D.h. insgesamt wirkt eine Kraft entgegen der x-Richtung von:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$F = IlB = -\frac{1}{R}B^2b^2v (4.4.15)$$

Diese bremsende Kraft ist umso größer je schneller die Schleife bewegt wird. Ist der Widerstand R groß, so ist die Kraft F hingegen klein, da kein Strom getrieben werden kann.<sup>10</sup> Das Induktionsgesetz soll jetzt an einer Reihe von Beispielen illustriert werden.

#### • Mitnahme von Magnetfeld

Betrachten wir eine Leiterschleife, die sich in einem Magnetfeld befindet (siehe Abb.4.4.4). Wenn wir diese Leiterschleife aus dem Feld heraus bewegen, wird ein Strom induziert, der ein zusätzliches Magnetfeld erzeugt, das versucht den magnetischen Fluß in dieser Schleife konstant zu halten. Überlagert man das externe Magnetfeld und das erzeugte Magnetfeld, so erscheint es als würde das Magnetfeld durch die Bewegung der Spule mitgenommen. Wenn man die Spule ganz aus dem Magnetfeld heraus bewegt hat, so wird eine freie stromdurchflossenen Leiterschleife erzeugt. Dieser Strom bleibt natürlich nur bestehen, solange er nicht gemäß einem endlichen Widerstand R der Leiterschleife exponentiell abfällt. Bei perfekten Leitern (R = 0 bei Supraleitern oder voll-ionisierten dünnen Plasmen im interstellaren Medium) kann sich Materie und magnetischer Fluß allerdings nicht unabhängig voneinander bewegen. Man bezeichnet dies als eingefrorenen Fluß. Dieser Vorgang erklärt zum Beispiel die Existenz von Magnetfeldern im Universum fernab von Sternen: abströmende Materie, die an der Oberfläche von Sternen mit dem Magnetfeld in Berührung kommt bewegt sich durch das Universum und transportiert somit auch Magnetfeld.

#### • Erzeugung hoher Magnetfelder

Für die Erzeugung sehr hoher Magnetfelder kann man die Erhaltung des magnetischen Flußes ausnutzen. Hohe *stationäre* Magnetfelder lassen sich mit supraleitenden Spulen erzeugen, wobei allerdings die Supraleitung nur bis zu Feldstärken von ca. 10..20 T aufrecht erhalten werden kann. In konventionellen Spulen können Magnetfelder bis zu 100 T erzeugt werden, bevor die magnetischen Kräfte zu einer mechanischen Zerstörung der Spule führen. Noch höhere Magnetfelder bis zu 1000 T lassen sich nur mit einer *Implosionstechnik* erzielen (siehe Abb.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Bei einem Supraleiter mit R = 0 wäre die Kraft unendlich groß. Allerdings ist die Anwendung des Ohmschen Gesetzes zur Beschreibung des Stromflusses in einem Supraleiter nicht möglich. Der Strom in einer supraleitenden Leiterschleife stellt sich so ein, daß der magnetische Fluß perfekt erhalten bleibt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 4.4.3:** Mitnahme von Magnetfeld durch eine Spule, die aus einem Magnetfeld heraus bewegt wird.

4.4.2): hierzu betrachtet man eine Spule mit Radius  $r_0$  die einen Strom *I* trägt die ein Magnetfeld  $B_0$  und eine magnetischen Fluß  $\Phi_0 = B_0 r_0^2 \pi$ erzeugt<sup>11</sup>. Durch Sprengstoff läßt sich diese Spule schlagartig auf einen Radius  $r_1$  komprimieren, wobei der magnetische Fluß  $\Phi_0$  erhalten bleiben muß. D.h es werden Ströme induziert um ein Magnetfeld  $B_1$  zu erzeugen, daß der Bedingung  $\Phi_0 = B_1 r_1^2 \pi$  genügt. Wenn  $r_1$  sehr klein wird, muß  $B_1$  stark ansteigen. Diese *destruktive* Methode zur Erzeugung von hohen Magnetfeldern bedingt natürlich, daß die Phänomene, die man untersuchen möchte, schnell genug gemessen werden können. Prinzipiell würde diese Erzeugung hoher Magnetfelder auch funktionieren, wenn man die Spule langsam komprimiert. Allerdings würde der induzierte Strom entsprechend dem Widerstand R der Spule mit einer Zeitkonstante exponentiell abfallen. Diese Kompression muß also schneller ablaufen als die Dissipation des induzierten Stromes.

#### • Magnetisches Umformen

Gepulste Magnetfelder werden dazu genutzt um Material umzuformen. Dazu wird zum Beispiel eine Hülse in eine Spule eingebaut. Ändert man den Strom in der Spule so induziert man einen Strom in der Hülse, gemäß Abb. 4.4.5. Dieser Strom erzeugt eine Kraft, die radial nach innen gerichtet ist und diese Hülse komprimiert (gegensinnige Ströme stoßen sich ab). Durch diese Art der Umformung werden zum Beispiel Metallhülsen auf Kabel aufgepresst.

#### • Wirbelstrombremse

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Der Fluß einer Ringspule wird exakt durch das Integral  $\Phi = \int_{Flaeche} \vec{B}(r) \cdot d\vec{F}$  berechnet, da B(r) sich mit r ändert. Der vereinfachte Ausdruck  $Br_0^2\pi$  dient hier nur der Abkürzung der Argumentation.



Abbildung 4.4.4: Durch die Implosion einer Spule lassen sich wegen der Flusserhaltung sehr hohe Magnetfelder erzeugen.



**Abbildung 4.4.5:** Durch eine gepulstes Magnetfeld läßt sich per Induktion Material verformen.

Die Lenz'sche Regel wird bei einer Wirbelstrombremse ausgenutzt. Hierbei durchläuft eine leitende Bremsscheibe einen Spalt eines Magneten. Wenn ein neuer Abschnitt dieser Schiebe in den Magneten eintritt, werden **Wirbelströme** induziert, um den magnetischen Fluß  $\Phi = 0$  möglichst aufrecht zu erhalten. Damit bewegt sich ein stromdurchflossener Leiter durch ein Magnetfeld und es wirkende eine Kraft, die die Scheibe abbremst. Durch eine Unterteilung der Scheibe können die Wirbelströme unterbrochen werden und die bremsende Wirkung fällt geringer aus.

#### • Kraft auf eine Leiterschleife

Bewegt man einen Magneten durch eine Leiterschleife die as Pendel aufgehängt ist, so versucht sie diesem Magneten auszuweichen. Nachdem der magnetische Fluß durch die Schleife zunächst Null ist, wird ein

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.4.6: Prinzip einer Wirbelstrombremse.

Strom induziert, der genau diesen Zustand aufrechterhalten will, d.h. Spule und Magnet stoßen sich ab.

## • Magnetische Levitation

Bewegt man einen Leiter über ein Magnetfeld, so werden Wirbelströme induziert, die zu einer abstoßenden Wirkung führen, Der bewegte Leiter schwebt. Dies wird als **magnetische Levitation** bezeichnet, die mittels eines Kreisels über einem Permanentmagneten illustriert werden kann. Nach einem ähnlichen Prinzip könnte man auch eine Magnetschwebebahn realisieren, die durch ihre Vorwärtsbewegung Wirbelströme erzeugt, die ein Schweben der Bahn bewirken. Allerdings hängt bei modernen Magnetschwebebahnen (Transrapid) der Wagen in einem geregelten Magnetfeld, wobei eine anziehende Kraftwirkung eingestellt werden muß. Über Induktion wird lediglich die berührungslose Leistungsübertragung von stationären Magneten in der Fahrbahn zur Sekundärspule im Fahrzeug realisiert.

## Selbstinduktion und Gegeninduktion

Das Faraday'sche Gesetz betrachtet die Induktion einer Spannung in z.B. in einer Spule durch die Änderung des magnetischen Flußes, der diese Spule durchflutet. Wenn wir eine beliebige Geometrie betrachten ist der fließende Strom und der erzeugte magnetische Fluß verknüpft via

#### Magnetenzephalografie (MEG)

In der Magnetenzephalografie werden Gehirnströme sichtbar gemacht, durch die Magnetfelder, die sie erzeugen. Wegen der geringen Ströme sind die Magnetfelder auch auserordentlich klein im Bereich von  $10^{-15}$  T. Durch spezielle Quanteninterferenzsensoren (SQUID superconducting quantum interference device) lassen sich diese sehr kleine Felder sichtbar machen. Aus der zeitabhängigen Antwort lassen sich so Bereich im Gehirn im Gehirn lokalisieren in denen gedacht wird. So lassen sich Gehirnoperationen planen um z.B. einen Tumor zu entfernen ohne wichtige Bereiche zu schädigen.



$$\Phi_{mag} = \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F} = LI \tag{4.4.16}$$

Man bezeichnet L als die **Induktivität**, die in der Einheit **Henry** gemessen wird (1 H = VsA<sup>-1</sup>). Nach dem Faraday'schen Gesetz gilt:

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_{mag} = -L\frac{dI}{dt}$$
(4.4.17)

D.h. die Induktivität gibt an wie groß die induzierte Spannung wird bei einer gegebenen Änderung des Stromes als Ursache dieser Spannung. Dies ist ähnlich zur Kapazität, die angibt, wie groß die gespeicherte Ladung bei

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.4.7: Schaltet man den Strom in einer Spule ein, so wird eine Spannung induziert die diesem Stromfluß entgegen wirkt.

vorgegebener Spannung wird. Das negative Vorzeichen drückt aus, das die Spannung immer der Stromänderung entgegen wirkt.

Im folgenden wollen wir einige Induktivitäten berechnen.

#### • Induktivität einer Spule

Wir betrachten eine Spule mit N Windungen der Länge L. Das Magnetfeld im Innern war gegeben als:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \tag{4.4.18}$$

Der magnetische Fluß  $\Phi_{mag}$ , der durch N Windungen der Fläche  $F_0$  dringt ist:

$$\Phi_{mag} = BF_0 N \tag{4.4.19}$$

Damit ergibt sich

$$\Phi_{mag} = \mu_0 \frac{N}{L} I F_0 N \tag{4.4.20}$$

Mit dem Volumen der Spule  $V = LF_0$  können wir schreiben:

$$\Phi_{mag} = \mu_0 V \left(\frac{N}{L}\right)^2 I \tag{4.4.21}$$



Abbildung 4.4.8: Selbstinduktivität einer Spule.

D.h. die Induktivität einer Spule ist:

$$L_{Spule} = \mu_0 V \left(\frac{N}{L}\right)^2 \tag{4.4.22}$$

## • Koaxialkabel

Betrachten wir ein Koaxialkabel in dem der Strom I auf dem Innenleiter mit Radius a in die eine und auf dem Außenleiter mit Radius b in die andere Richtung fließt. Das Magnetfeld im Innern am Ort r ist:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
(4.4.23)

Der magnetische Fluß ergibt sich über Integration von (siehe Abb. 4.4.6):

$$\Phi_m = \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F} = l \int_a^b B(r) dr = l \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$
(4.4.24)

Damit bekommen wir:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4.4.25}$$

Es ergibt sich die Induktivität eines Koaxialkabels von:

$$L_{Koaxialkalbel} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4.4.26}$$

206

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 4.4.9: Selbstinduktivität eines Koaxialkabels.

Neben der Selbstinduktion existiert auch die **Gegeninduktion**, die den Fall betrachtet, daß die Änderung des magnetischen Fluß, der in einer Anordnungen (z.B. Spule 1) erzeugt wird in einer anderen Anordnung (z.B. Spule 2) eine Spannung induziert. Betrachten wir zwei Spulen 1 und 2 mit den Windungen  $N_1$  und  $N_2$ . Der Strom  $I_1$  in Spule 1 erzeugt einen magnetischen Fluß  $\Phi$  in Spule 2, der in  $N_2$  Windungen wirkt (Beispiel gemeinsamer Eisenkern). Man definiert eine **Gegeninduktivität**  $L_{12}$  gemäß:

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi = L_{21} I_1 \tag{4.4.27}$$

Falls sich der Strom in der Spule 1 ändert, so erzeugt er eine induzierte Spannung  $U_{ind,2}$  in Spule 2 von:

$$-U_{ind,2} = \frac{d\Phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = L_{21} \frac{dI_1}{dt}$$
(4.4.28)

Aus Symmetriegründen erzeugt eine Stromänderung in Spule 2 eine induzierte Spannung  $U_{ind,1}$  in Spule 1 gemäß:

$$-U_{ind,1} = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = L_{12} \frac{dI_2}{dt}$$
(4.4.29)

Berechnen wir die Gegeninduktivität für zwei ineinander liegende Spulen der Länge L mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  und den Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ . In der großen Spule fließt der Strom  $I_1$  und erzeugt einen Fluß  $\Phi_{21}$  in der kleineren Spule. Das Magnetfeld im Innern der großen Spule ist:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 \tag{4.4.30}$$

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 4.4.10:** Gegeninduktivität zwischen zwei Spule, die ineinander liegen mit jeweils unterschiedlichen Radien  $r_1$  und  $R_2$  und Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ .

Dies erzeugt einen Fluß in der kleinen Spule:

$$\Phi_{21} = N_2 r_2^2 \pi \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 \tag{4.4.31}$$

Damit wird die Gegeninduktivität zu:

$$L_{12} = \frac{N_1}{L} \frac{N_2}{L} L r_2^2 \pi \mu_0 = \mu_0 \frac{N_1}{L} \frac{N_2}{L} V_{kleine} \quad Spule \tag{4.4.32}$$

Es läßt sich analog zeigen, daß gilt:

$$L_{12} = L_{21} \tag{4.4.33}$$

Diese Gegeninduktivitäten werden in der Regel für die Beschreibung von Transformatoren verwendet (siehe unten).

#### 4.4.2 RL-Stromkreise

Das Faraday'sche Induktionsgesetz hat große Auswirkungen auf des Verhalten von Stromkreisen, die mit zeitabhängigken Strömen betrieben werden. Dies soll am einfachen Beispiel des Einschaltens einer Spule illustriert werden.

Betrachten wir einen RL-Stromkreis wie in Abb. 4.4.11 illustriert. Die Spannungen, die über den Widerstand R und die Induktivität L abfallen sind:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$U_1 = IR \tag{4.4.34}$$

$$U_2 = -U_{ind} (4.4.35)$$

Nach der Maschenregel setzt sich die von außen angelegte Spannung  $U_0$  zusammen aus:

$$U_0 = IR - U_{ind} = IR + L\frac{dI}{dt}$$
(4.4.36)



Abbildung 4.4.11: Einschalten einer Spule.

Die induzierte Spannung wirkt immer der äußeren Spannungsquelle entgegen. D.h. die Spannung, die den Strom durch den Widerstand treibt, ist effektiver geringer als  $U_0$ :

$$\underbrace{\left(U_0 - L\frac{dI}{dt}\right)}_{U_{eff}} = IR \tag{4.4.37}$$

Wie läßt sich dies illustrieren. Vor dem Einschalten ist der Strom gleich Null und damit der magnetische Fluß in der Spule gleich Null. Die induzierte Spannung versucht, diesen Zustand aufrecht zu erhalten: nach dem Einschalten ist die Änderung des Stromes groß und es wird eine große Spannung induziert, die  $U_0$  entgegen wirkt. Zum Zeitpunkt t = 0 ist  $U_2 = U_0$ . D.h. die Spannungsdifferenz  $U_1$  nahe Null und der Absolutwert des Stromes  $I \simeq 0$ . Der Strom steigt langsam an und mit sinkender  $\left|\frac{dI}{dt}\right|$  sinkt auch die induzierte

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Spannung, die dem Stromfluß entgegen steht. Es ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$
(4.4.38)

D.h. der Strom steigt nur langsam an und erreicht erst lange nach dem Einschalten den Strom, den  $U_0 = RI$  vorgibt. Bei Gleichstrom wirkt die Spule wie ein normaler Leiter.



**Abbildung 4.4.12:** Stromvariation beim Einschalten einer Spule in Abb. 4.4.8.

#### Vertiefung - Ausschalten einer Spule

Beim Ausschalten der Spule beit=0ist die äußere Spannungsquelle $U_0$ gleich Null(t>0) und wir bekommen:

$$0 = IR - U_{ind} = IR + L\frac{dI}{dt}$$

$$(4.4.39)$$

Dies läßt sich lösen und man erhält für den Strom ein einfaches exponentielles Abklingen:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{4.4.40}$$

Vor dem Moment des Abschaltens fließt zunächst ein Strom der ein Magnetfeld in der Spule erzeugt. Nach dem Abschalten wird eine Spannung induziert, die versucht diesen magnetischen Fluß aufrecht zu erhalten. D.h. der Strom verschwindet nicht instantan mit dem Abschalten, sondern fällt nur exponentiell ab. Dies führt zur Frage woher dieser Strom geliefert wird, wo doch die Spannungsquelle/Stromquelle

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

abgeschaltet wurde! Die Lösung liegt in der Betrachtung der Spannungen, die sich einstellen.

Betrachten wir dazu einen etwas erweiterten Stromkreis wie in Abb. 4.4.13 illustriert. Die Spule selbst habe einen Eigenwiderstand  $R_L$  und parallel zur Spule sei ein Widerstand  $R_0$  geschaltet<sup>a</sup>. Zum Zeitpunkt t < 0 liegt die Spannung  $U_0$  an und in den beiden Zweigen fließt ein Strom  $I_1$  und  $I_2$ . Der Widerstand  $R_0$  ist in der Regel sehr groß im Vergleich zu  $R_L$ , so daß  $I_2 \gg I_1$  gilt. Diese Ströme sind mit den Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  verknüpft wie:

$$U_1 = R_0 I_1 \tag{4.4.41}$$

$$U_2 = I_2 R_L - U_{ind} (4.4.42)$$

Nach dem Abschalten der Spannungsquelle, verwenden wir die Knoten- und die Maschenregel und erhalten:

$$I_1 = -I_2 \tag{4.4.43}$$

$$-U_1 + U_2 = 0 (4.4.44)$$

Wenn wir die Ströme und Spannung einsetzen, bekommen wir mit  $U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$ 

$$I_2 \left( R_0 + R_L \right) + L \frac{dI_2}{dt} = 0 \tag{4.4.45}$$

Diese Differentialgleichung läßt sich lösen und man bekommt für den Strom  $I_2$ :

$$I_2(t) = I_2(t=0) \exp\left(-\frac{R_0 + R_L}{L}t\right)$$
(4.4.46)

Der Strom zum Zeitpunkt t = 0 ist  $I_2(t = 0) = \frac{U_0}{R_L}$ . Dieser Strom stellt sich vor dem Abschalten ein, da die Spannung  $U_0$  sowohl über  $R_0$  als auch über die  $R_L$  abfallen muß ( $U_{ind} = 0$  für den Gleichstromfall vor dem Abschalten). Die induzierte Spannung ist gegeben als:

$$U_{ind} = I_2(t) = I_2 \left( R_0 + R_L \right) = U_0 \frac{R_0 + R_L}{R_L} \exp\left(-\frac{R_0 + R_L}{L}t\right)$$
(4.4.47)

Damit ergibt sich die Spannung  $U_2$  zum Zeitpunkt t = 0 aus Gl. 4.4.42:

$$U_2 = -U_0 \frac{R_0}{R_L} \tag{4.4.48}$$

D.h. nach dem Abschalten einer positiven Spannung  $U_0$  entsteht eine negative Spannungsspitze, die umso größer ist, je größer der Unterschied der Widerstände  $R_0$ und  $R_L$  ist. Wie läßt sich dies anschaulich verstehen? Nach dem Abschalten erfordert die Lenz'sche Regel, daß der Strom durch die Spule  $I_2$  möglichst gut erhalten bleibt. Nachdem die externe Spannungsquelle abgeschaltet wird, kann der Strom nur noch über den Widerstand  $R_0$  von Masse her gezogen werden. D.h. der Strom  $I_1$  dreht sich im Vorzeichen um und die Spannung  $U_2$  muß soweit negativ werden, daß der Strom

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

 $I_2$  über den Widerstand  $R_0$  nachgeliefert wird. Wenn der Widerstand  $R_0$  klein ist, entstehen sehr hohe Spannungen, die auch zu einer Zerstörung von Bauteilen führen kann!



Abbildung 4.4.13: Anderung von Strom und Spannung beim Ausschalten einer Spule. Die eine Seite des Stromkreises liege auf Masse. Vor dem Abschalten ist die Spannung am Eingang des Stromkreises auf z.B. 10 V. Nach dem Ausschalten wird eine stark negative Spannung induziert und der Strom  $I_1$  dreht seine Richtung um.

Solche Spannungsspitzen werden zum Beispiel beim Zünden von Leuchtstoffröhren genutzt. In jeder Leuchtstoffröhre befindet sich eine kleine Spule als Starter. Zunächst fließt ein hoher Strom durch diese Spule. Parallel zur Leuchtstoffröhre, fließt dieser Strom über einen Bimetallstreifen ab. Erwärmt sich dieser Bimetallstreifen, öffnet dieser und der Stromfluß wäre unterbrochen. Allerdings bildet sich eine hohe induzierte Spannung, die versucht diesen Stromfluß durch die Spule weiter aufrecht zu erhalten. Die Spannungen von mehreren kV reichen dann aus um das Plasma in der Leuchtstoffröhre zu zünden und der Strom kann wieder fließen. Ähnliches wird auch bei der Zündspule in einem Auto ausgenutzt.

 $^{a}$ Dieser Widerstand kann auch ein Innenwiderstand der Spannungsquelle sein

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# Kapitel 5

# Optik

## 5.1 Licht und Materie

## 5.1.1 Der Brechungsindex

Wenn elektromagnetische Wellen durch Materie laufen, überlagert sich eine Primärwelle mit Sekundärwellen, die durch **Streuung** der Primärwelle an den Atomrümpfen entsteht. Bei dieser Streuung tritt allerdings eine kleine Zeitverzögerung auf, da wie bei einer erzwungenen Schwingung die anregende Kraft (Primärwelle) und die resultierende Amplitude (Sekundärwelle) in der Resonanz um 90° gegeneinander verschoben sind. Überlagert man die Primärwelle und alle Sekundärwellen miteinander, so erscheint einem die Lichtausbreitung im Medium *verlangsamt*, wie in Abb. 5.1.1 an der kürzeren Wellenlänge ersichtlich. Dies bedeutet allerdings *nicht*, daß die Lichtgeschwindigkeit eines Photons sich reduziert. Die Verlangsamung ist nur scheinbar, da sie durch die Absorption und Emission von Lichtteilchen bei der Streuung der Wellen an den Atomen verursacht wird.<sup>1</sup> Die Verlangsamung der Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. der Phasengeschwindigkeit wird durch den **Brechungsindex** ausgedrückt. Dieser ist definiert als:

$$n = \frac{c_{Vakuum}}{c_{Materie}} = \sqrt{\epsilon\mu}$$
(5.1.1)

Formal kann man dies auch erhalten indem man die Phasengeschwindigkeit einer Lichtwelle mit den Ersetzungen

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Es ist sogar gelungen *langsames Licht* in besonderen Formen von Materie, den Bose-Einstein-Kondensaten, zu erzeugen, bei denen die Lichtgeschwindigkeit bis auf 17 Meter pro Sekunde reduziert wurde.

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$$
 (5.1.2)

$$\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu \tag{5.1.3}$$

wie folgt definiert:

$$c_{Vakuum} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{5.1.4}$$

$$c_{Materie} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon}} \tag{5.1.5}$$

Der Brechungsindex ist mit der relativen Dielektrizitätskonstante und der Permeabilität verknüpft wie:

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \tag{5.1.6}$$

In der Regel sind die meisten Materialien der Optik unmagnetisch, so daß  $\mu \simeq 1$  gilt. In diesem Fall reduziert sich dieser Zusammenhang zu:

$$\boxed{n = \sqrt{\epsilon}} \tag{5.1.7}$$

Die Tatsache, daß sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit verringert, läßt sich in der Formulierung einer ebenen Welle einfach einführen indem man die Phasenlage  $\vec{kr}$  mit dem Brechungsindex *n* multipliziert.

$$E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \to E_0 e^{i(\omega t - n\vec{k} \cdot \vec{r})}$$
(5.1.8)

Das Konzept des Brechungsindex ist allerdings noch leistungsfähiger. Bislang hatten wir die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit betrachtet und nicht die Möglichkeit der Abschwächung des Lichtes durch Absorption. Dies kann berücksichtigt werden in dem man den Brechungsindex formal als komplexe Zahl  $\tilde{\mathbf{n}}$  definiert:

$$\tilde{\mathbf{n}} = n - \imath \kappa \tag{5.1.9}$$

wobei der Realteil n die Änderung der Phasengeschwindigkeit und der Imaginärteil  $\kappa$  die Absorption beschreibt. Letzteres wird einsichtig, wenn wir die Abnahme der Intensität des Lichtes beim Durchgang durch ein Medium ansehen. Wenn wir für das elektrische Feld formal einen Ansatz mit einem komplexen Brechungsindex  $\tilde{\mathbf{n}}$  wählen bekommen wir:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{\mathbf{n}}kz)} = E_0 e^{i(\omega t - nkz)} e^{-\kappa kz}$$
(5.1.10)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.1.1:** Die Ausbreitung von Wellen in Materie ist eine Überlagerung von Primärwellen und Sekundärwellen.

D.h. die Amplitude enthält jetzt einen *reellen* Exponentialterm  $e^{-\kappa kz}$ , der die Dämpfung der Amplitude auf einer Wegstrecke z beschreibt und einen *imaginären* Anteil der die Phasenverschiebung durch die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit ausdrückt.

In einer Messung wird immer die **Intensität** auf einem Detektor nachgewiesen. Die Abschwächung der Intensität beim Durchgang durch ein Material der Dicke  $\Delta z$  ist dabei definiert als:

$$I = I_0 e^{-\alpha \Delta z} \tag{5.1.11}$$

Dies bezeichnet man als das Lambert-Beer'sche Gesetz<sup>2</sup>.  $\alpha$  bezeichnet den sog. Absorptionskoeffizienten in der Einheit  $m^{-1}$ .

Wie ist jetzt  $\alpha$  mit  $\kappa$  verknüpft? Die Intensität war:

$$I = c\epsilon_0 E^2 \tag{5.1.12}$$

Wenn wir den Ansatz für  $E = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{\mathbf{n}}\vec{k}\vec{r})}$  einsetzen und die Gleichungen vergleichen erkennen wir daß:

 $<sup>^2\</sup>mathrm{Es}$ gilt nicht bei Vielfachreflexionen in dünnen Filmen! Hier müssen die Wellenpakete kohärent überlagert werden (siehe unten).

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\alpha = 2\kappa k = \frac{4\pi}{\lambda}\kappa \tag{5.1.13}$$

## 5.1.2 Dispersion und Absorption

Falls die Medien sehr dünn sind (z.B. Gase) gilt  $\tilde{\mathbf{n}} \simeq 1$ . In dieser Näherung lassen sich der Real- und Imaginärteil des Brechungsindex aus  $\tilde{\mathbf{n}}^2 = \epsilon$  annähern zu:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{q^2 n}{m_e \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$
(5.1.14)

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{q^2 n}{m_e \epsilon_0} \frac{\gamma \omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$
(5.1.15)

Ein typischer Frequenzverlauf des Real- und Imaginärteils des Brechungsindex ist in Abb. 5.1.2 gezeigt. Man erkennt, daß der Brechungsindex mit zunehmender Frequenz kleiner wird. An den Absorptionsfrequenzen eines Materials wie bei Rotationen von freien Molekülen (Mikrowelle), bei der Schwingung von Molekülen und Festkörpern (Infrarot), bei optischen Anregungen der Valenzelektronen (sichtbares Licht) und bei der Anregung von Elektronen innerer Atomschalen (Röntgenbereich) entstehen charakteristische Verläufe des Realteils des Brechungsindex und entsprechende Peaks im Imaginärteil des Brechungsindex.

Prinzipiell sind Imaginärteil und Realteil des Brechungsindex noch subtiler verknüpft durch das *Kausalitätsprinzip*, das besagt, daß ein Atom/Molekül/Festkörper nur dann polarisiert werden kann *nachdem* eine em-Welle mit ihm in Wechselwirkung trat. Dies klingt trivial, erzeugt aber eine zusätzliche Beziehung zwischen n und  $\kappa$ , die **Kramers-Kronig-Beziehungen**<sup>3</sup>.

Die Brechungsindex nimmt wird mit steigender Frequenz immer kleiner und erreicht den Wert 1 bei unendlich hohen Frequenzen. Dies läßt sich mit einem mechanischen Analogon verstehen: bei sehr hohen Frequenzen erfolgt die Oszillation des elektrischen Feldes der Lichtwelle so schnell, daß die Elektronen aufgrund ihrer Trägheit dieser Oszillation nicht mehr folgen können. D.h. sie nehmen auch keine Energie aus der Welle auf und die em-Welle kann ungehindert passieren. Im Limes "sieht" die em-Welle also die Materie gar nicht mehr und der Brechungsindex muß dann 1 sein. Bei niedrigeren Frequenzen können diejenigen Anregungen an der Verzögerung der sich

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Für Details sehen sie bitte im Skript "Schichtdiagnostik in der Plasmatechnik"

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum


Abbildung 5.1.2: Realteil und Imaginärteil des Brechungsindex.

ausbreitenden Lichtwelle teilnehmen, die der Oszillation der Welle "folgen" können. D.h. im sichtbaren Bereiche können die Valenzelektronen aber auch der inneren Schalenelektronen folgen. Der Brechungsindex ist im sichtbaren Licht durch die Absorption der Valenzelektronen bestimmt; der Verlauf des Brechungsindex ist allerdings um einen gewissen Betrag gegenüber 1 verschoben nach oben verschoben, da im sichtbaren ein Untergrund existiert, der durch die Verzögerung der em-Welle durch die Wechselwirkung mit den inneren Schalenelektronen hervorgerufen wird. Analog dazu beinhaltet, der Brechungsindex für die Anregung im Infraroten einen Untergrund, der durch die Valenzelektronen und die inneren Schalenelektronen erzeugt wird.

Im Bereich der Absorption läßt sich zudem ein Material künstlich erzeugen (photonische Kristalle) dessen Brechungsindex negativ wird, sog. **Metamaterialien**. Diese Materialien haben außerordentliche Eigenschaften hinsichtlich der Lichtbrechung.

Die Ausbreitung von Wellen in Medien wird durch zwei Geschwindigkeiten charakterisiert: (i) die **Phasengeschwindigkeit** bezeichnet die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines definierten Wellenberges; (ii) die **Gruppen**- **geschwindigkeit** die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines ganzen Wellenpaketes. Beide Geschwindigkeiten sind definiert als:

$$v_{Phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \tag{5.1.16}$$

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( v_{Phase} k \right)$$
(5.1.17)

Nachdem wir Geschwindigkeiten betrachten ist hier immer der Realteil des Brechungsindex zu verwenden. Wir bekommen den allgemeine Zusammenhang von:

$$v_{Gruppe} = v_{Phase} + k \frac{dv_{Phase}}{dk}$$
(5.1.18)

Im Vakuum ändert sich die Phasengeschwindigkeit nicht mit der Wellenzahl ( $v_{Phase} = c$ ) und Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit sind identisch. Formt man somit ein Wellenpaket (um zum Beispiel Information bei der optischen Nachrichtenübertragung zu kodieren), so bleibt ein solches Wellenpaket über lange Zeit erhalten. In einem Medium allerdings kann sich die Phasengeschwindigkeit mit der Wellenlänge ändern und Gruppenund Phasengeschwindigkeit unterscheiden sich. D.h. wenn man ein Wellenpaket erzeugt, so läuft dies mit der Zeit auseinander und eine ursprünglich kodierte Information geht verloren. Dies hat eine große Auswirkung auf die Realisierung der optischen Nachrichtentechnik.

Wie beeinflußt jetzt der Brechungsindex das Verhältnis zwischen Phasenund Gruppengeschwindigkeit? Dazu formen wir die Gleichung um:

$$v_{Gruppe} = v_{Phase} + k \frac{d}{dk} \left(\frac{c}{n}\right)$$
  
$$= v_{Phase} - k \frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk}$$
  
$$= v_{Phase} - k \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega} \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{v_{Gruppe}}$$
(5.1.19)

(5.1.20)

Und lösen mit  $\omega = \frac{kc}{n}$  nach der Gruppengeschwindigkeit auf:

$$v_{Gruppe} = \frac{v_{Phase}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$$
(5.1.21)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Falls der Brechungsindex mit der Frequenz steigt  $(\frac{dn}{d\omega} > 0)$ , so ist die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Phasengeschwindigkeit man spricht von **normaler Dispersion**. Falls der Brechungsindex mit der Frequenz sinkt  $(\frac{dn}{d\omega} < 0)$ , so ist die Gruppengeschwindigkeit größer als die Phasengeschwindigkeit und man spricht von **anormaler Dispersion** (siehe Abb. 5.1.3).



**Abbildung 5.1.3:** Im Bereich der Absorption tritt anormale Dispersion auf, d.h. der Brechungsindex sinkt mit der Frequenz des Lichtes.

In der Nachrichtentechnik wird die anormale Dispersion geschickt genutzt, da man aus einer Kombination unterschiedlicher Materialien die Unterschiede in den Phasengeschwindigkeiten einzelner Frequenzanteile ausgleichen kann und so Wellenpakete erzeugt, die nicht mit der Zeit auseinander laufen.<sup>4</sup>

# 5.1.3 Brechung und Reflexion

Bislang haben wir die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen innerhalb von Medien betrachtet. Beim Übergang von Wellen zwischen verschiedenen Medien können allerdings **Brechung** und **Reflexion** auftreten.

### Grenzfläche zwischen zwei Medien

Betrachten wir dazu eine Transversalwelle, die unter einem Winkel  $\alpha$  zur Oberflächennormalen auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2 einfällt mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . Es entsteht eine Welle, die reflektiert wird und die Oberfläche unter einem Winkel  $\alpha'$  zur Oberflächennormalen

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Erzeugung von Solitonen.

verläßt, sowie ein Teil der Welle der die Grenzfläche durchdringt dabei aber gebrochen wird und sich in eine Richtung mit einem Winkel  $\beta$  zur Oberflächennormalen ausbreitet. Die Lichtstrahlen des einfallenden, reflektierten und gebrochenen Lichtes liegen alle in einer Ebene, der **Einfallsebene**. Die elektrischen Felder der einzelnen Transversalwellen können unterteilt werden in einen Anteil parallel zur Einfallsebene (Index p)und einen senkrecht zur Einfallsebene (Index s). Im folgenden werden nur die Gleichungen zur Beschreibung der parallelen Komponenten der einfallenden ( $E_e$ ), der reflektierten ( $E_r$ ) und der gebrochenen Welle ( $E_e$ ) abgeleitet. Wir setzen ebene Wellen an, die sich durch ihre Amplituden ( $A_e, A_r, A_g$ ), ihre Frequenzen ( $\omega_e$ ,  $\omega_r, \omega_g$ ) und ihre Wellenvektoren ( $\vec{k_e}, \vec{k_r}, \vec{k_g}$ ) unterscheiden können:

$$E_e = A_e^{i(\omega_e t - \bar{k}_e \vec{r})} \tag{5.1.22}$$

$$E_r = A_r^{i(\omega_r t - k_r \vec{r})} \tag{5.1.23}$$

$$E_g = A_q^{i(\omega_g t - k_g \vec{r})} \tag{5.1.24}$$

Die Vektoren des elektrischen und magnetischen Feldes seien wie in Abb. 5.1.4 orientiert. Die Bedingungen für elektrische und magnetische Felder an der Grenzfläche zweier Medien hatten wir schon in der Elektrostatik und Magnetostatik abgeleitet. Diese besagten:



**Abbildung 5.1.4:** Elektrische Felder parallel und senkrecht zu einer Einfallsebene.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2} \tag{5.1.25}$$

$$B_{\perp,1} = B_{\perp,2} \tag{5.1.26}$$

$$\epsilon_1 E_{\perp,1} = \epsilon_2 E_{\perp,2} \tag{5.1.27}$$

$$\frac{B_{\parallel,1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel,2}}{\mu_2} \tag{5.1.28}$$

Hierbei beziehen sich die Indizes  $\parallel$  und  $\perp$  auf die Komponente bezüglich der *Grenzfläche*, während sich die Indizes p und s auf die Komponenten bezüglich der *Einfallsebene* beziehen.

#### • Frequenz und Einfalls- bzw. Ausfallswinkel

Die Komponenten des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche müssen außerhalb und innerhalb der Grenzfläche gleich sein. Wenn wir mit  $E_e$  die Komponente der einfallenden Welle, mit  $E_r$  die Komponente der reflektierten Welle und mit  $E_g$  die Komponente der gebrochenen Welle bezeichnen, bekommen wir als Randbedingung:

$$E_{e,\parallel} + E_{r,\parallel} = E_{g,\parallel} \tag{5.1.29}$$

Die Beitrag der Amplituden der Welle parallel zur Oberfläche ist:

$$A_{e,\parallel}e^{i\left(\omega_{e}t - \vec{k}_{e}\vec{r}\right)} + A_{r,\parallel}e^{i\left(\omega_{r}t - \vec{k}_{e}\vec{r}\right)} = A_{g,\parallel}e^{i\left(\omega_{g}t - \vec{k}_{e}\vec{r}\right)}$$
(5.1.30)

Die komplexe Exponentialfunktion beschreibt die Aufspaltung des elektrischen Feldes in Real- und Imaginärteil. Damit Gleichung 5.1.30 für einen Ort auf der Grenzfläche immer erfüllt ist, müssen wir zwei Bedingungen fordern:

#### - unabhängig von t

Wir wählen einen bestimmten Ort  $\vec{r} = 0$  auf der Grenzfläche. Auch jetzt muß Gleichung 5.1.30 für alle Zeiten t gelten. Daher müssen wir für die Frequenzen der drei Anteile der Welle fordern:

$$\omega_e = \omega_r = \omega_g \tag{5.1.31}$$

D.h. die Frequenz der Welle ändert sich nicht (die Farbe des Lichtes bleibt gleich). Es ändert sich lediglich die Wellenlänge, wie oben schon eingeführt, bei der Betrachtung von Primär und Sekundärwellen.

### – unabhängig von $\vec{r}$ innerhalb der Grenzfläche

Eine ähnlich Betrachtung können wir auch für die Phasen der Wellen anstellen. Wenn wir mit  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_g$  die entsprechenden Wellenvektoren bezeichnen, so müssen die Phasen für alle Ort  $\vec{r}$ innerhalb der Grenzfläche für t = 0 gleich sein. D.h. es muß gelten:

$$\vec{k}_e \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_g \vec{r} \tag{5.1.32}$$

Das Skalarprodukt zwischen den Wellenvektoren und dem Ortsvektor $\vec{r}$ ergibt:

$$|\vec{k}_e|\sin\alpha = |\vec{k}_r|\sin\alpha' = |\vec{k}_g|\sin\beta \qquad (5.1.33)$$

Nachdem der Wellenvektor über  $k = n \frac{c}{\omega}$  mit dem Brechungsindex verknüpft ist, bekommen wir:

$$n_1 \sin \alpha = n_1 \sin \alpha' = n_2 \sin \beta \tag{5.1.34}$$

D.h. man erkennt sofort daß

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \tag{5.1.35}$$

gilt: *Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel*. Zusätzlich ergibt sich auch das sog. **Snellius'sche Brechungsgesetz**:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \tag{5.1.36}$$

Das Snellius'sche Brechungsgesetz als berühmtestes Ergebnis der Optik wurde zunächst empirisch gefunden. Alternativ kann man es auch nach dem **Fermat'sches Prinzip** ableiten:

Ein Lichtstrahl nimmt immer den schnellsten Weg durch ein optisches System.

Betrachten wir dazu die Abbildung 5.1.5. Die Zeit  $\Delta t$ , die Licht von Punkt A nach Punkt B benötigt ist:

$$\Delta t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} \tag{5.1.37}$$

In den jeweiligen Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend dem Brechungsindex:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$c_1 = \frac{c}{n_1} \tag{5.1.38}$$

$$c_2 = \frac{c}{n_2} \tag{5.1.39}$$

Damit bekommen für die Zeitspanne  $\Delta t$  den Ausdruck:

$$\Delta t = \frac{n_1}{c}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$
(5.1.40)



Abbildung 5.1.5: Prinzip von Fermat.

Die minimale Zeitspanne ergibt sich aus der Suche nach dem Minimum für  $\Delta t$  nach dem Extremalprinzip. D.h. die erste Ableitung setzen wir zu Null, was gleichbedeutend mit der Bedingung:

$$\frac{n_1}{c} \underbrace{\frac{d}{dx}\sqrt{a^2 + x^2}}_{\sin \alpha} = -\frac{n_2}{c} \underbrace{\frac{d}{dx}\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}_{-\sin \beta}$$
(5.1.41)

ist. Daraus ergibt sich wieder das Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \tag{5.1.42}$$

### Einschub - Amplituden

#### • Amplituden

Als nächstes wollen wir das Verhältnis der Amplituden des Lichtes betrachten. Hierzu betrachten wir eine Polarisation des Lichtes parallel zur Einfallsebene. Die Komponenten des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche müssen erhalten bleibe. D.h. die Komponenten außerhalb und innerhalb des Mediums ergeben die Bedingung aus Gl. 5.1.30.



Elektrische und magnetische Felder für elektromagnetische Wellen, die in der Einfallsebene polarisiert sind.

$$A_{e,p}\cos\alpha - A_{r,p}\cos\alpha = A_{q,p}\cos\beta \tag{5.1.43}$$

Das Minuszeichen vor dem zweiten Term der linken Seite berücksichtigt die Orientierung der Feldstärkevektoren, wie in Abb. 5.1.3 illustriert. Das magnetische Feld zeigt aus der Blattebene heraus, d.h. der Vergleich der Vektoren ist in diesem Fall einfach und man bekommt als Bedingung:

$$\frac{B_e}{\mu_1} + \frac{B_r}{\mu_1} = \frac{B_g}{\mu_2} \tag{5.1.44}$$

für den Fall, daß das Material unmagnetisch ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) ist, vereinfacht sich dieser Zusammenhang zu:

$$B_e + B_r = B_q \tag{5.1.45}$$

Die Amplituden des magnetischen Feldes und des elektrischen Feldes sind über den Brechungsindex miteinander verknüpft gemäß:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$B| = \frac{n}{c}|E| \tag{5.1.46}$$

D.h. die Randbedingung aus der Betrachtung des magnetischen Feldes läßt sich umschreiben zu:

$$n_1 A_{e,p} + n_1 A_{r,p} = n_2 A_{g,p} \tag{5.1.47}$$

Wir definieren den **Reflexions-**  $r_p$  und **Transmissionskoeffizienten**  $t_p$  als das Verhältnis der Amplituden des elektrischen Feldes des reflektierten/gebrochenen zum einfallenden Licht:

$$r_p = \frac{A_{r,p}}{A_{e,p}}$$
 (5.1.48)

$$t_p = \frac{A_{g,p}}{A_{e,p}}$$
(5.1.49)

Wenn wir diese neuen Größen einsetzen, bekommen wir zwei Gleichungen für zwei Unbekannte  $r_p$  und  $t_p.$  Diese ergeben:

$$\cos\alpha - r_p \cos\alpha = t_p \cos\beta \tag{5.1.50}$$

$$n_1 + r_p n_1 = n_2 t_p \tag{5.1.51}$$

Wenn wir diese auflösen, erhalten wir schließlich die sogenannten **Fresnel-Gleichungen** für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der elektrischen Feldstärken, die parallel zur Einfallsebene orientiert sind.

$$r_p = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta}$$
(5.1.52)

sowie

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \tag{5.1.53}$$

Aus einer ähnlichen Ableitung lassen sich die Reflexionskoeffizienten für Licht, das *senkrecht* zur Einfallsebene polarisiert ist, ableiten:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \tag{5.1.54}$$

sowie

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \tag{5.1.55}$$

Die Fresnelkoeffizienten beschreiben in korrekter Weise das Verhältnis der Amplituden für transmittiertes und reflektiertes Licht. Die Vorzeichen beziehen sich auf die Konvention in der die Vektoren in Abb. 5.1.3 eingezeichnet wurden. Bei senkrechtem Einfall zum Beispiel wird  $r_p$  für Licht, das parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, zu:

$$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \tag{5.1.56}$$

D.h.  $r_p$  ist positiv. Die Vektoren des einfallenden und des reflektierenden Lichtes zeigen allerdings in die *entgegen gesetzte* Richtung, d.h. das Licht erleidet für den Fall das  $n_2 > n_1$  gilt, einen **Phasensprung** von  $\pi$ . Dies gilt in gleicher Weise für die Komponente die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist. Hier würden die Feldstärkevektoren in Abb. 5.1.3 aus der Ebene heraus zeigen. Der Fresnelkoeffizient wird:

$$r_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{5.1.57}$$

für  $n_2 > n_1$  negativ, d.h. die Richtung des Feldstärkevektors dreht sich um, d.h. das Licht erleidet wieder einen Phasensprung von  $\pi$ .

Dieser Zusammenhang läßt sich zusammenfassen in der Aussage, das Licht bei der Reflexion an einem dichteren Medium unter senkrechtem Einfall ein Phasensprung von  $\pi$  auftritt.

#### **Reflexion**, Transmission

Aus den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lassen sich jetzt die Faktoren für die Intensitäten, die sog. **Reflexion** und **Transmission**, berechnen, die man mit einem Detektor misst.

Die Intensität im Vakuum war definiert als:

$$I = \epsilon_0 c E^2 \tag{5.1.58}$$

Daraus wird die Intensität in Materie via:

$$I = \epsilon_0 \epsilon \frac{c}{n} E^2 \tag{5.1.59}$$

mit n und  $\epsilon$  als den Materialkonstanten. Die Reflexion R ist das Verhältnis aus reflektierter zu einfallender Intensität. Durch die Verwendung einer komplexen Formulierung für die Feldstärke wird der Ausdruck  $E^2 \rightarrow EE^*$ :

$$R = \frac{I_{reflektiert}}{I_{einfallend}} = \frac{E_r E_r^*}{E_e E_e^*}$$
(5.1.60)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Wir setzen die Reflexionskoeffizienten ein  $\left(r = \frac{E_r}{E_e}\right)$  und bekommen für die beiden Orientierungen parallel und senkrecht zur Einfallsebene:

$$R_s = r_s r_s^* \tag{5.1.61}$$

$$R_p = r_p r_p^* \tag{5.1.62}$$



Abbildung 5.1.6: Abhängigkeit der Reflexion vom Einfallswinkel. Für Licht das in der Einfallsebene polarisiert ist entsteht beim sog. Brewsterwinkel  $R_p = 0$ .

Die Reflexion in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ist in Abb. 5.1.6 gezeigt. Man erkennt, daß die Reflexion  $R_s$  senkrecht zur Einfallsebene, mit dem Einfallswinkel  $\alpha$  ansteigt. Die Reflexion  $R_p$  parallel zur Einfallsebene, hingegen, wird an einem bestimmten Winkel, dem **Brewsterwinkel**, gleich Null. Dieser Winkel ergibt sich aus der Forderung, daß zwischen der Richtung des reflektierten Lichtes und des gebrochenen Lichtes jeweils 90° liegen. In diesem Fall müssten die Dipole, die im Material durch das einfallende Licht angeregt werden, genau entlang der Dipolachse emittieren. In diese Richtung ist die abgestrahlte Intensität allerdings gleich Null (siehe Diskussion zum Hertz'schen Dipol). Damit wird kein Licht reflektiert. Dies ist in Abb. 5.1.6 illustriert. Der Grenzwinkel bei dem die Reflexion verschwindet ist gegeben durch:

$$180^{\circ} - \alpha_B - \beta = 90^{\circ} \tag{5.1.63}$$

mit  $\alpha_B + \beta = 90^\circ$  und  $n_1 \sin \alpha_B = n_2 \sin \beta$  folgt die Vorschrift zur Brechung des Brewsterwinkel von:

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{5.1.64}$$

Bei der Berechnung der Transmission müssen wir berücksichtigen, daß wir die Intensität in zwei unterschiedlichen Medien betrachten, und daß die Richtung des Energieflusses sich ändert. Die unterschiedlichen Materialien werden durch  $\epsilon$  und n berücksichtigt. Die Faktoren  $\cos \beta$  und  $\cos \alpha$  projizieren die Ausbreitungsrichtung auf die Grenzflächennormale.

$$T = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 \frac{c}{n_2} E_g E_g^* \cos \beta}{\epsilon_0 \epsilon_1 \frac{c}{n_1} E_e E_e^* \cos \alpha}$$
(5.1.65)

Damit bekommen wir für die Transmission:

$$T = \frac{n_2 \cos \beta E_g E_g^*}{n_1 \cos \alpha E_e E_e^*}$$
(5.1.66)

Mit dem Verhältnis  $t = \frac{E_g}{E_e}$  ergibt sich schließlich:

$$T_s = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} t_s t_s^* \tag{5.1.67}$$

$$T_p = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} t_p t_p^* \tag{5.1.68}$$

Vergleicht man die Formeln für Reflexion und Transmission, so kann man ableiten:

$$T_s + R_s = 1 \tag{5.1.69}$$

### Totalreflexion

Fällt das Licht auf eine Grenzfläche von einer Seite auf der das Medium einen höheren Brechungsindex besitzt als auf der anderen Seite, so kann man eine Situation konstruieren, bei der das gebrochene Licht genau in Richtung der Grenzfläche abgelenkt würde, d.h.  $\beta = 90^{\circ}$ :

$$n_1 \sin \alpha_g = \sin 90^\circ n_2 \tag{5.1.70}$$

In einem solchen Fall kann das Licht nicht in das andere Medium übertreten, sondern es tritt **Totalreflexion** auf, d.h. das Licht wird *nur* reflektiert. Diese Totalreflexion wird in vielen Anwendungen für das Führen von Licht in transparenten Strukturen ausgenutzt. Der Grenzwinkel  $\alpha_g$ , ab dem Totalreflexion auftritt, ist gegeben als:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\boxed{\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1}} \tag{5.1.71}$$

# 5.1.4 Polarisation

Durch optische Materialien läßt sich jetzt der Polarisationszustand von Licht manipulieren. Hierfür existieren zahlreiche Methoden.

# Polarisation durch Absorption

Eine einfache Methode um polarisiertes Licht zur erzeugen ist die Verwendung einer Struktur mit geometrischer Vorzugsrichtung wie ein lineares Gitter, ein gestrecktes Polymer etc (siehe Abb. 5.1.7). Nur linear polarisiertes Licht, daß in einer Richtung senkrecht zu dieser Vorzugsrichtung polarisiert ist, kann diesen Polarisator ungehindert passieren. Licht, das parallel zur der Vorzugsrichtung polarisiert ist, wird bevorzugt absorbiert. D.h. das elektrische Feld der Lichtwelle kann zum Beispiel an die Polymermoleküle ankoppeln und wird dabei absorbiert.



**Abbildung 5.1.7:** Polarisation von Licht bei der Transmission durch einen Gitter- oder Folienpolarisator.

Materialien, deren Absorption von der Richtung in der das elektrische Feld polarisiert ist, abhängt, bezeichnet man als **dichroitisch**.

# Polarisation durch Reflexion

Eine der einfachsten Methoden zur Manipulation der Polarisation ist die Ausnutzung der Gesetz für Lichtbrechung. Wie oben gezeigt, ist das Licht, das unter dem Brewsterwinkel reflektiert wird, senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, während das transmittierte Licht beide Anteile parallel und senkrecht polarisiert enthält. Dies wird oftmals ausgenutzt, wie an zwei Beispielen illustriert wird:

### • Fenster für Gaslaser

Bei der Konstruktion von Lasern zur Lichtverstärkung wird Licht zwischen zwei Spiegeln reflektiert und in einem Lasermedium verstärkt. Dieses Lasermedium ist eine Gasentladung in einem Entladungsrohr, das mit Fenster abgeschlossen ist. Damit die Transmission durch diese Fenster *verlustfrei* stattfindet, werden sie gemäß dem Brewsterwinkel schräg auf dem Entladungsrohr angeordnet. Dadurch wird das Licht das parallel zur Einfallsebene angeordnet ist, durch diese Fenster nicht reflektiert sondern vollständig transmittiert. Gerade diese Polarisationsrichtung wird bevorzugt verstärkt. Damit wird allerdings auch das emittierte Laserlicht polarisiert.

#### • Fotografieren durch Fensterscheiben

Will man durch eine Fensterscheibe in einen dunkleren Raum fotografieren, wird das Bild oft durch die Reflexion des Umgebungslichtes überstrahlt. Hier kann man es sich zunutze machen, daß das reflektierte Licht teilweise polarisiert ist. Wenn man durch eine Fensterscheibe fotografiert, positioniert man sich so, daß die Reflexion des Umgebungslichtes unter dem Brewsterwinkel erfolgt (siehe Abb. 5.1.8). Ein Polarisator der, senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, *unterdrückt* diesen Reflex, während das Licht senkrecht zur Einfallsebene, das von einem Objekt hinter der Fensterscheibe stammt, zum Beobachter gelangt.



Abbildung 5.1.8: Durch einen Polarisator kann man die Reflexion des Umgebungslichtes bei dem Fotografieren durch eine Fensterscheibe unterdrücken.

# 5.2 Geometrische Optik - Axiome

Zur Beschreibung von optischen Systemen wie Mikroskopen, Fernrohren etc. wird die geometrische Optik benutzt. Diese ist anwendbar, wenn drei Axiome erfüllt sind:

• Lichtstrahlen sind gerade.

Die geradlinige Lichtausbreitung gilt nur für den Fall, daß Beugungsphänomene keine Rolle spielen. Ansonsten ist das Huygens'sche Prinzip exakt anzuwenden. D.h. dieses Axiom fordert, daß die Ausdehnung des optischen System sehr viel größer als die Wellenlänge  $\lambda$  ist.

• keine Wechselwirkung der Lichtstrahlen untereinander

Lichtstrahlen können untereinander Wechselwirkung im Sinne von positiver und destruktiver Interferenz. Auch dieser Fall soll ausgeschlossen werden. Positive und destruktive Interferenz fordert, daß die Phase zwischen zwei Lichtwegen eine eindeutige Größe ist. Diese Phase bleibt allerdings nur über eine bestimmte Länge, der Kohärenzlänge, erhalten (siehe unten). Bei normalem weißen Licht (kein Laserlicht) ist die Kohärenzlänge in der Regel kleiner als die Ausdehnung der optischen Systeme und die Wechselwirkung der Lichtstrahlen untereinander kann vernachlässigt werden. Ein Gegenbeispiel sind dünne optische Systeme, wie z.B. Seifenblasen bei denen Interferenzeffekte durch unterschiedliche Farben sichtbar werden.

• Das Snellius'sche Brechungsgesetz gilt

Ein optisches System muß die Lichtstrahlen zusammenfassen und wieder an einem Ort bündeln. Für die Beschreibung dieser Ablenkung von Lichtstrahlen soll das Snellius'sche Brechungsgesetz gelten. D.h. doppelbrechende Materialien werden nicht betrachtet.

In der geometrischen Optik wird in der Regel eine **Abbildung** beschrieben, bei der Lichtstrahlen, die von einem **Objekt** in alle Richtungen ausgehen, durch ein **optisches System** gebrochen und wieder zu einem **Bild** zusammengeführt werden. Dies ist in Abb. 5.2.9 verdeutlicht.



Vielstrahlinterferenz bei einem Morphofalter. Quelle: Tierchenwelt.

# 5.3 Optische Abbildungen, Linsen

Zur Berechnung der Abbildungseigenschaften von zum Beispiel einer Grenzfläche, benötigen wir mehrere Kenngrößen (siehe Abb. 5.3.10): zum einen den Abstand a des Objektes von der Grenzfläche an der die ausgehenden Lichtstrahlen gebrochen werden und der Abstand b des erzeugten Bildes von der Grenzfläche. Als Grenzflächen betrachten wir im folgenden nur *sphärische* Grenzflächen, die durch eine Radius R gekennzeichnet sind. Diese sphärischen Grenzflächen haben eine große Bedeutung, da sie technisch mit entsprechenden Schleifvorrichtungen leicht herzustellen sind. Allerdings besitzen sie bei genauerer Betrachtung Abbildungsfehler, wie unten noch erläutert wird.

Alle optischen Elemente werden entlang einer Achse angeordnet, der **optischen Achse**, die durch die Scheitelpunkte der sphärischen Grenzflächen geht. Man unterscheidet prinzipiell zwischen **konkaven** und **konvexen** Grenzflächen. Bei konkaven Grenzflächen zeigt die Krümmung dem Lichtstrahl entgegen, bei konvexen umgekehrt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.2.9: Ein optisches System bildet ein Objekt auf ein Bild ab, d.h. alle Lichtstrahlen die von einem Punkt des Objektes ausgehen werden in eindeutiger Weise an einem Punkt P des Bildes zusammengeführt.

Fällt ein Lichtstrahl parallel zur optischen Achse auf die Grenzfläche, so wird er in der Linse gebrochen und schneidet danach die optische Achse an einem charakteristischen Punkt, dem **Brennpunkt**. Den Abstand dieses Punktes zu der Grenzfläche bezeichnet man als **Brennweite**.

Ein Bild läßt sich leicht geometrisch konstruieren indem man zunächst zwei Strahlen konstruiert: (i) den Mittelpunktstrahl durch den Mittelpunkt des Kreises, der senkrecht durch die Grenzflächen geht und somit nicht gebrochen wird. (ii) einen achsen-parallelen Strahl, der an der Grenzfläche gebrochen wird und die Symmetrieachse des optischen System am Brennpunkt schneidet. Am Schnittpunkt dieser beiden Strahlen befindet sich das Bild des Objektes. Dies ist in Abb. 5.3.10 illustriert.

Für die Berechnung der Abbildungseigenschaften benötigen wir jetzt eine Vorschrift zur Berechnung der Brennweite in Abhängigkeit von der Form des optischen Systems, sowie einen Zusammenhang zwischen Objekt- und Bildweite und dieser Brennweite.

# 5.3.1 Abbildung einer gekrümmten Grenzfläche

Betrachten wir zunächst eine gekrümmte, sphärische Grenzfläche, die zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  trennt. Im folgenden wollen wir den Brennpunkt bestimmen und konstruieren einen achsen-nahen parallelen Strahl. Gemäß der Zeichnung 5.3.11 können wir die Winkel setzen:

$$h = R\sin\alpha \simeq f\sin\gamma \tag{5.3.72}$$



**Abbildung 5.3.10:** Kenngrößen einer optischen Abbildung: a Abstand Objekt – Grenzfläche; b Abstand Grenzfläche – Bild; f Brennweite; n Brechungsindex; R Krümmungsradius Grenzfläche.

Die Winkel stehen in einem Zusammenhang von:

$$\beta + \gamma + (180^{\circ} - \alpha) = 180^{\circ} \tag{5.3.73}$$



**Abbildung 5.3.11:** Gekrümmte Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$ .

Für die Brechung an der Grenzfläche gilt:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \tag{5.3.74}$$

234

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Somit haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Da wir annehmen, daß alle Strahlen sehr nahe an der optischen Achse verlaufen können wir für kleine Winkel immer sin  $x \to x$  nähern und erhalten schließlich:

$$f = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \tag{5.3.75}$$

In einem zweiten Schritt benötigen wir einen Zusammenhang zwischen der Objektweite und der Bildweite. Dazu betrachten wir Abbildung 5.3.12. Wir können die Winkel in zwei Dreiecken bestimmen. Die Winkelsumme im Dreieck AMP ergibt:



Abbildung 5.3.12: Abbildung eines Punkts A auf einen Punkt B durch Brechung am Punkt P der Grenzfläche.

$$\epsilon + (180^{\circ} - \alpha) + \delta = 180^{\circ} \tag{5.3.76}$$

sowie im Dreieck MPB:

$$\beta + \gamma + (180^{\circ} - \delta) = 180^{\circ} \tag{5.3.77}$$

Nachdem wir achsennahe Strahlen betrachten sind alle Winkel sehr klein und wir können immer sin  $x \to x$  setzen und bekommen eine vereinfachte Form des Brechungsgesetzes von:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \tag{5.3.78}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Größe	Randbedingung
a	$\oplus$ falls $a$ links von der Grenzfläche
b,f	$\oplus$ falls $b,f$ rechts von der Grenzfläche
R	$\oplus$ falls Mittelpunkt $R$ rechts von der Grenzfläche

**Tabelle 5.1:** Vorzeichen im Abbildungsgesetz. Falls eine Randbedingungnicht erfüllt ist, wird jeweils das Vorzeichen umgedreht

Die Höhe h des Punktes P an der Grenzfläche an der gebrochen wird ist  $\sin \epsilon a$ . Auch hier wird  $\sin x \to x$  ersetzt und wir bekommen den Zusammenhang:

$$\epsilon a = \gamma b = \delta R \tag{5.3.79}$$

Wir bekommen wieder 4 Gleichungen für vier unbekannte Winkel, die wir auflösen können zu:

$$\left|\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f}\right|$$
(5.3.80)

Dieses Brechungsgesetz kann sehr allgemein verwendet werden, allerdings müssen dabei die Vorzeichen beachtet werden. Alle Vorzeichen sind positiv, falls die Abbildung so wie in Abb. 5.3.12 konstruiert wurde. Falls die Bildund Objektweite auf der jeweils anderen Seite der Grenzfläche liegen, drehen sich die Vorzeichen um. Dies ist in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Die Leistungsfähigkeit der Vorzeichen-Konvention ist an der Abbildung einer konkaven Fläche illustriert. Hier wird der Krümmungsradius negativ, was eine negative Bildweite *b* bedingt. D.h. das Bild entsteht links von der Grenzfläche. Dies ist in Abb. 5.3.13 illustriert. Dieses Bild ist allerdings ein **virtuelles** Bild, da es nur ein Betrachter wahrnimmt, der von der rechten Seite durch die Zerstreuungslinse blickt. Bei einem virtuellen Bild im Gegensatz zu einem reellen Bild ist es nicht möglich einen Schirm oder Photopapier an diese Stelle zu platzieren um das Bild aufzunehmen<sup>5</sup>.

### 5.3.2 Dünne Linsen

Betrachten wir jetzt eine dünne Linse die durch zwei gekrümmte Grenzflächen im Abstand d zueinander gebildet wird. Zeigen die Krümmungen zueinander

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Bei der Betrachtung durch eine Lupe entsteht auch ein virtuelles Bild allerdings wird dies durch das menschliche Auge des Betrachter wieder auf ein reelles Bild auf der Netzhaut abgebildet (siehe unten).

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.3.13:** Geometrische Konstruktion der Abbildung eines Objektes am Ort A. Bei einer konvexen Fläche entsteht ein reelles Bild, bei einer konkaven Fläche ein virtuelles.

sprich von einer **Sammellinse**, zeigen sie entgegen gesetzt, spricht von einer **Zerstreuungslinse**. Im folgenden wollen wir zunächst eine Sammellinse betrachten (siehe Abb. 5.3.14).

Bei dünnen Linsen ist  $d \ll b, b'$  und wir bekommen:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$
(5.3.81)

Die Brennweite läßt sich einfach ableiten, wenn man den Objektpunkt a ins Unendliche verlegt. Man bekommt:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$
(5.3.82)

Als Beispiel berechnen wir eine dünne Linse mit dem Krümmungsradius  $R_1 = 10$  cm und  $R_2 = -15$  cm. Man beachte, daß  $R_2$  negativ gesetzt werden muß, da der Mittelpunkt links von der Grenzfläche liegt. Für einen Brechungsindex von 1.5 bekommen wir dann eine Brennweite von f = 12 cm.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.3.14:** Abbildung eines Objektes am Ort A durch eine dünne Linse auf eine Bild am Ort B.

Zusammenfassend bekommen wir für dünne Linsen mit Brechungsindex n in Atmosphäre ( $n_{Umgebung} = 1$ ) die Abbildungsgleichung für dünne Linsen:

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$
(5.3.83)

Nachdem man sowohl a als auch b ins Unendliche legen kann, erkennt man daß die Brennweite f auf *beiden* Seiten der Linse *identisch* ist.

Diese gleiche Brennweite einer Linse auf beiden Seiten gilt nicht mehr für den Fall, daß unterschiedliche Medien auf beiden Seiten der Linse vorliegen<sup>6</sup>. Wir betrachten noch einmal den obigen Fall einer dünnen Linse mit Brechungsindex  $n_2$ , diesmal aber mit einem Brechungsindex  $n_1$  und  $n_3$  der Medien vor und nach der Linse. Die Abbildung durch die erste Grenzfläche in Abb. 5.3.13 liefert wieder:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \tag{5.3.84}$$

Die Abbildung durch die zweite Grenzfläche liefert:

$$-\frac{n_2}{b'-d} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$
(5.3.85)

Wir addieren wieder beide Gleichung und bekommen:

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Bekanntestes Beispiel ist das Aug, bei der die Linse auf einer Seite von Atmosphäre, aber auf der anderen Seite von dem Glaskörper im Innern des Auges begrenzt ist.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_3}{b} = \left(\frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}\right) + \frac{n_2 d}{b'(b' - d)}$$
(5.3.86)

bzw. für  $d \ll b'$ 

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_3}{b} = \left(\frac{n_2 - n_1}{R_1} - \frac{n_2 - n_3}{R_2}\right)$$
(5.3.87)

Wenn man jetzt wieder  $n_1 = n_3 = 1$  setzt, bekommt man wieder Gl. 5.3.81. Allerdings ist die Brennweite der Linse vor und hinter der Linse *nicht* mehr gleich, da für  $b \to \infty$  und  $a \to \infty$  jeweils unterschiedliche Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  resultieren.

Die Abbildungseigenschaften einer Linse in einer gleichförmigen Umgebung ( $n_{Umgebung}$ =const.) lassen sich geometrisch ermitteln. Hierzu konstruiert man zunächst eine **Mittelebene** in der dünnen Linse. Vom Objekt gehen jetzt drei Strahlen aus, die am Ort des Bildes in charakteristischer Weise wieder zusammenlaufen. Diese drei Strahlen werden am Beispiel einer Sammellinse illustriert:

- Mittelpunktstrahl: Ein Lichtstrahl geht direkt durch Mitte der Linse. Bei genauer Betrachtung wird ein solcher Strahl allerdings an den beiden Grenzflächen gebrochen und dabei parallel versetzt, wie in Abb. 5.3.15 illustriert ist. Diese Versetzung ist gerade bei dünnen Linsen vernachlässigbar. Falls die Linse auf beiden Seiten durch unterschiedlichen Materialien begrenzt ist, ist die Anwendung des Mittelpunktstrahl nicht mehr möglich, da nicht nur ein Versatz des Mittelpunktstrahls beim Durchgang durch die Linse auftritt sondern auch eine Brechung! In diesem Fall können nur die nächsten beiden Strahlen benutzt werden.
- achsen-paralleler Strahl: Ein Lichtstrahl geht parallel zur optischen Achse bis zur Mittelebene und von dort durch den *hinteren* Brennpunkt.<sup>7</sup>
- **Brennpunktstrahl**: Ein Lichtstrahl geht durch den *vorderen* Brennpunkt und von dort zur Mittelebene. Danach wird dieser zu einem achsenparallelen Strahl

Alle drei Strahlen treffen sich wieder in einem Punkt und legen so den Ort der Abbildung fest.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Die Bezeichnung vorne und hinten bezieht sich explizit auf eine Sammellinse (siehe unten).



Abbildung 5.3.15: Konstruktion der Abbildung durch die Verwendung der Mittelebene einer dünnen Linse. Der parallele Versatz  $\delta$  des Lichtstrahls beim Durchgang durch die Mitte der Linse kann vernachlässigt werden.

Wie läßt sich jetzt die Vergrößerung/Verkleinerung bei der Abbildung beschreiben? Betrachten wir dazu zunächst das prinzipielle Verhalten in Abhängigkeit vom Abstand a des Objektes zur Linse mit Brennweite f, wie wir es von einer Konstruktion der Abbildung ableiten können (siehe Abb. 5.3.16):  $(a \gg f)$  falls a sehr viel größer als f ist, wird das Objekt verkleinert; (a = 2f) falls a doppelt so groß wie f ist, wird das Objekt 1:1 dargestellt; (2f > a > f) falls a zwischen f und 2f liegt, wird das Objekt vergrößert. (a < f); falls a kleiner als f wird, entsteht ein vergrößertes virtuelles Bild. Dieser Fall ist in jeder Lupe realisiert bei der das Objekt immer innerhalb der Brennweite liegt und der Betrachter ein vergrößertes virtuelles Bild beobachtet.

Die Vergrößerung läßt sich aus dem Strahlensatz ableiten, wenn man zwei Dreiecke (siehe Abb. 5.3.17) betrachtet: y bezeichnet die Ausdehnung des Objektes im Abstand a, während y' die Ausdehnung des Bildes im Abstand b bezeichnet:

$$\frac{y}{|y'|} = \frac{a}{b} \tag{5.3.88}$$

Man definiert die Vergrößerung M der Abbildung gemäß:

$$M = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = \frac{f}{f-a} = -\frac{f}{x}$$
(5.3.89)

Falls M negativ ist, wird das Bild bei der Abbildung umgedreht.

Zur Illustration der Abbildungsgesetze ist in Abb. 5.3.18 noch einmal eine Zerstreuungslinse gezeigt. Die Berechnung der Brennweite ergibt:

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.3.16:** Vergößerung bzw. Verkleinerung des Bildes je nach Abstand a des Objektes von der Linse mit Brennweite f. Falls a < f wird entsteht nur ein virtuelles Bild (optische Anwendung Lupe).

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{5.3.90}$$

Wir betrachten den Fall, daß beide Radien gleich sein sollen. Der Mittelpunkt von Krümmungsradius  $R_1$  liegt allerdings *links* von der Grenzfläche und wir müssen  $R_1 = -|R|$  einsetzen. Der Mittelpunkt vom Krümmungsradius  $R_2$  liegt rechts von der Grenzfläche und wir können  $R_2 = |R|$  setzen. Damit bekommen wir:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) = -(n-1)\frac{2}{R}$$
(5.3.91)

D.h. die Brennweite wird *negativ*, damit liegt der Brennpunkt *links* von der Grenzfläche. Mit diesem Brennpunkt, können wir jetzt wieder die Abbildung konstruieren: Dabei führen wir einen achsenparallelen Strahl bis zur

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.3.17: Vergrößerung eines Objektes der Ausdehnung y bei der Abbildung durch eine Linse der Brennweite f auf ein Bild der Ausdehnung y'.

Mittelebene der Linse und von dort zum Brennpunkt<sup>8</sup> Der Mittelpunktstrahl geht durch den Mittelpunkt der Linse. Am Schnittpunkt dieser beiden Geraden entsteht das Bild des Objektes. Dieses Bild ist ein *virtuelles Bild*, wie in Abb. 5.3.18 veranschaulicht ist. Auch der dritte Strahl läßt sich konstruieren: dabei gehen wir von dem Objekt zu dem zweiten Brennpunkt, der jetzt aber *rechts* von der Zerstreuungslinse liegt. Am Schnittpunkt dieses Strahl mit der Mittelebene, konstruieren wir einen achsen-parallelen Strahl der die ersten beiden Strahlen wieder am selben Punkt schneidet!



Abbildung 5.3.18: Beispiel der Abbildung durch eine Zerstreuungslinse.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Dies ist im Gegensatz zu einer Sammellinse bei der der Strahl zu einem hinteren Brennpunkt, hinter der Linse, lief.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Vergrößerung ist durch das Verhältnis aus Bild zu Objektweite gegeben. Aus der Abb. 5.3.18 erkennt man, daß die Bildweite links von der Linse liegt, d.h. b = -|b|. Damit wird die Vergößerung:

$$M = -\frac{b}{a} = \frac{|b|}{|a|} > 0 \tag{5.3.92}$$

größer als Null und das Bild bleibt *aufrecht*.

# 5.3.3 Kombination von Linsen

In einer Optik werden in der Regel mehrere Linsen kombiniert. Zur Konstruktion der entsprechenden Abbildung müssen wir das Abbildungsgesetz mehrfach anwenden. Betrachten wir dazu zwei Linsen mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ , die den Abstand d voneinander entfernt sind (siehe Abb. 5.3.19). Für die Konstruktion der Abbildung verwenden wir den achsen-parallelen Strahl und den Brennpunktstrahl für jede der beiden Linsen separat. Mit der Abbildung durch die erste Linse konstruieren wir zunächst ein **Zwischenbild**, das dann nachfolgend durch die zweite Linse abgebildet wird. Dies beschreibt nicht die wahre Fortsetzung der beiden Strahlen durch die erste Linse in ihrer Verlängerung durch die zweite Linse. Dies ist aber auch nicht notwendig, da *alle Strahlen* vom Zwischenbild auf das Bild abgebildet werden und man für die Konstruktion, immer die passenden Strahlen wie Mittelpunktstrahl und Brennpunktstrahl wählen kann.<sup>9</sup>.

Für die Berechnung der Abbildung können wir mehrere Gleichungen aufstellen:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \tag{5.3.93}$$

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} \tag{5.3.94}$$

$$b_1 + a_2 = d \tag{5.3.95}$$

Eine Brennweite des Gesamtsystems f können wir definieren, wenn wir die Objektweite als Abstand von der *ersten* Linse mit der Bildweite als Abstand von der *zweiten* Linse verknüpfen. Formal ergibt dies:

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Dies bezieht sich auf die Ableitung der Abbildungsgesetze. Der wahre Strahlengang des Lichtes verläuft natürlich immer geradlinig, wobei Strahlen zwar formal das Bild erzeugen, aber in einer realen Optik zum Beispiel die zweite Linse gar nicht mehr erreichen können (Beispiel Vignettierung).



Abbildung 5.3.19: Abbildung eines Objektes durch zwei Linsen im Abstand d voneinander, wobei der Abstand größer als die Brennweiten ist. Es entsteht ein reelles Zwischenbild, das durch die zweite Linse abgebildet wird.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f} \tag{5.3.96}$$

Man kann 4 Gleichungen für 4 Unbekannte  $a_1, b_1, a_2$  und  $b_2$  auflösen und bekommt als Ausdruck für die *gemeinsame* Brennweite f:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$
(5.3.97)

Falls  $d \ll f_1, f_2$  ist, kann der letzte Term vernachlässigt werden und wir bekommen für die gesamte Brennweite für *i* eng benachbarte Linsen:

$$\frac{1}{f} = \sum_{i} \frac{1}{f_i} \tag{5.3.98}$$

Die geometrische Konstruktion einer Abbildung bei der die Linsen eng zusammen stehen (d.h.  $d \ll f_1, f_2$ ) erfolgt analog. Allerdings muß man die Strahlen geschickt wählen. Zunächst wird in einem ersten Schritt, ein Zwischenbild durch die Abbildung durch Linse 1 erzeugt, wobei Linse 2 vernachlässigt wird. In einem zweiten Schritt werden zwei Strahlen konstruiert, die bei der Abbildung durch Linse 2, zu diesem Zwischenbild führen: dies ist ein Strahl durch den Mittelpunkt der zweiten Linse und ein Strahl der zwischen beiden Linsen parallel zur Achse verläuft und danach durch den Brennpunkt der zweiten Linse führen muß. Am Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entsteht das Bild nach der zweiten Linse. Dieses zweistufige Vorgehensweise ist in Abb. 5.3.20 illustriert.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.3.20: Abbildung eines Objektes durch zwei Linsen im Abstand d voneinander, wobei der Abstand kleiner als die Brennweiten ist. Es entsteht ein virtuelles Zwischenbild.

# 5.4 Optische Abbildungen, Spiegel

Spiegel sind im Prinzip sehr leistungsfähige optische Systeme, da das Reflexionsgesetz *unabhängig vom Brechungsindex* immer fordert, daß Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel ist. Zudem finden Spiegel immer dann ihren Einsatz, wenn Medien in Transmission zu stark absorbieren (Spiegel für die Abbildung von Röntgenstrahlen). Mit Spiegeln lassen sich auch sehr große und damit lichtstarke optische Systeme realisieren, wie man an den typischen Aufbauten astronomischer Teleskope ablesen kann.

# 5.4.1 Ebene Spiegel

Die einfachste Anordnung ist ein ebener Spiegel. Hierbei sieht der Betrachter ein *virtuelles* Bild, wie in Abb. 5.4.21 verdeutlicht ist. Gleichzeitig ist die Objektweite immer gleich der Bildweite.

# 5.4.2 Sphärische Spiegel

In Analogie zu sphärischen Linsen behandeln wir im folgenden zunächst sphärische Spiegel. Eine konkave Form, der **Hohlspiegel**, ist in Abb. ?? illustriert. Ein achsen-paralleler Strahl wird am Punkt P eines Spiegels mit Krümmungsradius R (Mittelpunkt M) reflektiert und trifft die optische Achse bei dem Brennpunkt F. Aus der Skizze ist ersichtlich, daß das Dreieck



Abbildung 5.4.21: Ein einfacher Spiegel erzeugt ein virtuelles Bild am Ort P'.

PFM ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Die Strecke  $\overline{FM}$  ist nach dem Cosinussatz:

$$\overline{FM} = R\left(1 - \frac{1}{2\cos\alpha}\right) \tag{5.4.99}$$

Für kleine Winkel  $\alpha$  ist  $\cos \alpha \rightarrow 1$ . D.h. es gilt.

$$\overline{FM} = \frac{1}{2}R\tag{5.4.100}$$

Damit wird auch die Brennweite f, als der Abstand vom Scheitelpunkt der Grenzfläche zum Brennpunkt, zu:

$$f_{Hohlspiegel} = \frac{R}{2} \tag{5.4.101}$$

D.h. der Brennpunkt bei sphärischen Hohlspiegeln ist gleich dem halben Radius. Wie entsteht jetzt eine Abbildung?. Dazu betrachten wir Abb. 5.4.23 bei der ein Punkt P über Reflexion an einem Spiegel auf den Punkt P'abgebildet werden soll. Diese Reflexion soll in einem Abstand h von der optischen Achse stattfinden. Gemäß der Abb. 5.4.23 können wir folgende Zusammenhänge ableiten:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.4.22: Brennpunkt F für einen Hohlspiegel mit Radius R.

$$\tan\gamma = \frac{h}{a} \tag{5.4.102}$$

$$\tan\beta = \frac{h}{b} \tag{5.4.103}$$

$$\sin\delta = \frac{h}{R} \tag{5.4.104}$$

$$\gamma + \beta = 2\delta \tag{5.4.105}$$

Dies sind 4 Gleichungen für 4 unbekannte Winkel, die sich lösen lassen. Man bekommt wieder:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \tag{5.4.106}$$

D.h. Abbildungsgesetz gilt sowohl für Linsen als auch für Spiegel. Welche Vergrößerung entsteht jetzt durch eine Abbildung in einem Hohlspiegel? Dazu konstruieren wir geometrisch das Bild am Punkt P', analog zur Vorgehensweise bei Linsen (siehe Abb. 5.4.24). Die Vergrößerung des Objektes mit Ausdehnung y zu einem Bild der Ausdehnung y' ist gemäß dem Strahlensatz:

$$\frac{y'}{y} = \frac{R-b}{a-R}$$
 (5.4.107)

mit Gl. 5.4.106 ergibt sich:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \tag{5.4.108}$$

Das Minuszeichen drückt aus, daß sich das Bild umdreht.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.4.23:** Abbildung eines Objektes durch einen Hohlspiegel mit Radius R.



Abbildung 5.4.24: Konstruktion des Bildes von einem Objekt vor einem Hohlspiegel.

# 5.5 Optische Instrumente

Optische Instrumente dienen dazu Objekte in der Natur vergrößert bzw. verkleinert darzustellen und abzubilden. Maßstab dafür ist zunächst die natürliche Wahrnehmung, die in unserem Auge stattfindet.

# 5.5.1 Das Auge

Das Auge besteht aus Hornhaut, Linse, Glaskörper und der Netzhaut auf der das Bild wahrgenommen wird. Im entspannten Zustand liegt der Brennpunkt auf der Netzhaut und ein Gegenstand im Unendlichen wird scharf abgebildet. Bei Gegenständen, die näher liegen muß die Abbildungseigenschaften physiologisch geändert werden: bei den meisten Säugetieren wird

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



die Krümmung der Linse verändert; bei Fischen ändert sich der Abstand von Linse zu Netzhaut; bei Raubvögeln ändert sich die Krümmung der Hornhaut.

Falls der Brennpunkt im entspannten Zustand des Auges *nicht* auf der Netzhaut liegt, spricht man von **Weitsichtigkeit** oder **Kurzsichtigkeit** (siehe Abb. 5.5.26). Diese Fehlsichtigkeit läßt sich durch eine entsprechende **Bril-**le korrigieren. Dabei kombiniert man die Brennweite der Augenlinse mit der Brennweite einer Brille:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{Brille}} + \frac{1}{f_{Auge}}$$
(5.5.109)

Diese Formel ist nur bei geringem Abstand zwischen Brille und Auge zulässig und beschreibt richtigerweise eigentlich Kontaktlinsen.

### • kurzsichtig

Bei Kurzsichtigkeit liegt der Brennpunkt vor der Netzhaut. D.h. die Brennweite der Linse ist zu klein. Das bedeutet, das der Wert für  $1/f_{Brille} < 0$  werden muß, damit der Wert für f größer wird. Damit ist die Brille eine Zerstreuungslinse. Kurzsichtige Menschen werden im Alter meist normalsichtig, da mit der Abnahme der Bindegewebespannung auch der Augenmuskel nachlässt und die zu starke Krümmung der Linse im Ruhezustand nicht mehr aufrecht erhalten wird.



Abbildung 5.5.25: Das Auge.

• weitsichtig



Abbildung 5.5.26: Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit.

Bei Weitsichtigkeit liegt der Brennpunkt hinter der Netzhaut. D.h. die Brennweite der Linse ist zu groß. Das bedeutet, dass der Wert für  $1/f_{Brille} > 0$  werden muß, damit der korrekte Wert für f resultiert. Damit ist die Brille eine Sammellinse. Viele Menschen werden im Alter weitsichtig, da das Nachlassen der Augenmuskeln den Brennpunkt zu weit nach hinten verlagert.

Die Brennweiten werden oftmals nicht in Brennweiten direkt gemessen sondern in **Dioptrien** D angegeben, wobei die Definition gilt:

$$D = \frac{1}{f} \tag{5.5.110}$$

Damit wird Gleichung 5.5.109 zu:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$D = D_{Auge} + D_{Brille} \tag{5.5.111}$$

Die Dioptrien des gesunden menschlichen Auges ist ungefähr +58.6 D, wobei die Hornhaut mit 43 D und die Linse mit 19 D (von Luft umgeben) beiträgt<sup>10</sup>

Optische Instrumente, die ein Objekt vergrößern, werden mit einem Vergrößerungsfaktor V gekennzeichnet. Dieser Vergrößerungsfaktor vergleicht den Winkel  $\epsilon_0$  unter dem ein Objekt *ohne* optisches Instrument erscheint mit dem Winkel  $\epsilon$  unter dem ein Objekt *mit* dem optischen Instrument erscheint. Unter normalen Bedingungen kann ein Mensch einen Gegenstand bis zu einer Sehweite  $s_0$  von 25 cm scharf stellen. Fall der Gegenstand eine Ausdehnung von y besitzt, ist der Öffnungswinkel:

$$\epsilon_0 = \frac{y}{s_0} \tag{5.5.112}$$

Die Vergrößerung V ist dann als das Verhältnis der Öffnungswinkel definiert:

$$V = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{5.5.113}$$

Den genauen Wert der Vergrößerung für einige Instrumente wollen wir uns im folgenden anschauen.

# 5.5.2 Die Lupe

Das einfachste optische Instrument ist die Lupe. Der Gegenstand ist in der Regel zwischen Linse und Brennpunkt platziert. Es entsteht ein virtuelles Bild des Objektes im Abstand L. Damit werden die Winkel unter dem das Bild erscheint zu:

$$\epsilon_0 = \frac{y}{s_0} \tag{5.5.114}$$

$$\epsilon_0 = \frac{y'}{L} \tag{5.5.115}$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Man sieht, daß die Summe der Dioptrien von Linse und Hornhaut in diesem Fall nicht 58 ergibt, da die Ableitungen oben von der Annahme ausgegangen sind, daß die optischen Elemente von beiden Seiten von Luft begrenzt sind. Dies ist beim Auge nicht der Fall, da die Linse von einer Seite durch den Glaskörper begrenzt wird. Berechnet man die Dioptrien der Linse für den Fall unterschiedlicher Medien auf beiden Seiten der Linse, so erhält man in der Summe tatsächlich 58 Dioptrien.

Was eine Vergrößerung bedingt von:

$$V = \frac{y'}{y} \frac{s_0}{L}$$
(5.5.116)

Für das Verhältnis der Größen des Objektes y und Bildes y' bemühen wir den Strahlensatz und bekommen:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \tag{5.5.117}$$

Mit dem Ausdruck

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{5.5.118}$$



Abbildung 5.5.27: Erzeugung eines virtuellen Bildes y' bei der Betrachtung eines Objektes der Ausdehnung y durch eine Lupe.

bekommen wir für die Vergößerung schließlich:

$$V = \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{s_0}{L} \tag{5.5.119}$$

Die Lupe befinde sich in einem Abstand l vom Auge. Die Bildweite ist formal negativ b = -(L - l), da sie sich links von der Linse befindet. Mit  $f = \frac{1}{D}$  ergibt sich:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum
$$V = \frac{s_0}{L} \left[ 1 + D(L - l) \right]$$
(5.5.120)

Falls wir das Objekt genau im Brennpunkt platzieren a = f wird  $L \rightarrow \infty$ , d.h. das virtuelle Bild entsteht im Unendlichen und in das Auge fallen parallele Strahlen ein. Damit kann das Auge entspannt das Bild wahrnehmen und dieser Abstand wird als angenehm empfunden. Für diesen Fall ist das Verhältnis der Vergrößerung:

$$V_{Lupe} = s_0 D \tag{5.5.121}$$

# 5.5.3 Das Mikroskop

Bei einer Lupe ist somit die Vergrößerung, unter der das Bild als angenehm wahrgenommen wird festgelegt durch die möglichen Brennweiten, die realisierbar ist. Je größer die Dioptrien bzw. kleiner die Brennweiten sind, desto größer wird das Bild dargestellt. Allerdings wir der Krümmungsradius sehr groß, so daß der Brennpunkt schon innerhalb der Linse liegen müsste, was die Möglichkeiten einer Lupe stark begrenzt. Aus diesem Grund verwendet man für größere Vergrößerungen ein **Mikroskop**, das aus einer Kombination von zwei Linsen besteht, dem **Objektiv** und dem **Okular**. Das Objektiv erzeugt zunächst ein vergrößertes Zwischenbild, das dann mit dem Okular ähnlich einer Lupe beobachtet wird. Dazu betrachten wir den Strahlengang, wie er in Ab. **??** illustriert ist. Die Abbildung durch die erste Linse ist:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{5.5.122}$$

Die Öffnungswinkel für das Objekt ohne optisches Instrument und mit optischem Instrument sind:

$$\epsilon = \frac{y'}{f_2} \tag{5.5.123}$$

$$\epsilon_0 = \frac{y}{s_0} \tag{5.5.124}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \tag{5.5.125}$$

Für die Ableitung der Vergrößerung wollen wir die Vorzeichen nicht betrachten und leiten als Öffnungswinkel ab:

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\epsilon = \frac{yb}{af_2} \tag{5.5.126}$$

Die Vergrößerung beim Mikroskop wird somit:

$$V_{Mikroskop} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{bs_0}{af_2} \tag{5.5.127}$$

Wenn wir das Objekt, wie bei der Lupe, wieder in die Nähe des Brennpunktes des Objektiv setzen und das Zwischenbild in den Brennpunkt der zweiten Linse, bekommen wir mit  $a \simeq f_1$  und  $d = b + f_2$  parallele Strahlen, die in das Auge des Betrachters eintreten.



Abbildung 5.5.28: Das Mikroskop.

$$V_{Mikroskop} = \frac{(d - f_2) s_0}{f_1 f_2}$$
(5.5.128)

## 5.5.4 Das Fernrohr

Bei einem Mikroskop ist der Abstand des Objektes vom Objektiv sehr klein und eine starke Vergrößerung wird angestrebt. Bei einem Fernrohr stellt sich die entgegen gesetzt Fragestellung, da das Objekt sich im Unendlichen befindet: ein Fernrohr oder Teleskop soll einen parallelen Lichtstrahl abbilden. Dazu verwendet man zwei Linsen deren Brennpunkte *zusammenfallen*. Für diese Anordnung existieren im wesentlichen zwei Typen:

#### • Astronomisches Fernrohr, Kepler

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Bei einem astronomischen Fernrohr gilt für den Abstand der beiden Linsen (siehe Abb. 5.5.29):

$$d = f_1 + f_2$$
(5.5.129)

Abbildung 5.5.29: Das astronomische Fernrohr (Kepler). Die Punkte auf einem Strahl des Strahlengangs illustrierten, daß sich die Orientierung des Bildes umdreht.

Die Größe des Zwischenbildes h läßt sich mit den beiden Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  verknüpfen wie:

$$\epsilon_0 = \frac{h}{f_1} \tag{5.5.130}$$

$$\epsilon = \frac{h}{f_2} \tag{5.5.131}$$

Man erkennt eine Vergößerung der Form:

$$V_{Fernrohr} = \frac{f_1}{f_2} \tag{5.5.132}$$

Das entstandene Bild steht allerdings auf dem Kopf, was allerdings für die astronomische Beobachtung kein Nachteil ist.

### • Terrestrisches Fernrohr, Galileo

Bei einem terrestrischen Fernrohr gilt für den Abstand der beiden Linsen:

$$d = f_1 - f_2 \tag{5.5.133}$$

wobei die zweite Linse eine Zerstreuungslinse ist. Die Vergößerung ist identisch zu dem des astronomischen Fernrohrs allerdings ist das Bild diesmal aufrecht, wie in Abb. 5.5.30 illustriert ist.



Abbildung 5.5.30: Das terrestrische Fernrohr (Galileo). Die Punkte auf einem Strahl des Strahlengangs illustrierten, daß das Bild aufgerichtet bleibt.

# 5.5.5 Die Kamera

Eine Kamera ist eine der häufigsten optischen Instrumente des täglichen Lebens. Das Objektiv einer Kamera ist in der Regel durch seine **Brennweite** und seine sogenannte **Lichtstärke** charakterisiert. Die Lichtstärke ist über den Raumwinkel definiert, den das Objektiv von den Strahlen abbildet, die vom Objekt ausgehen. Dazu betrachten wir per Definition die Oberfläche einer Kugel mit Radius Brennweite. Ein Objektiv mit einem Durchmesser D deckt davon nur einen Teil ab. D.h. der Raumwinkel, den das Objektiv erfasst ist:

$$\Omega = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{4\pi f^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{D}{f}\right)^2 \tag{5.5.134}$$

Die Größe  $\frac{D}{f}$  bezeichnet man dann als **Lichtstärke** zum Beispiel 1:1.3. Je größer die Lichtstärke ist desto mehr Licht wird eingefangen und eine entsprechende Kamera kann auch bei schlechten Lichtverhältnissen eingesetzt werden.

Die Abbildung eines Objektes mit einer Kamera wird zudem noch durch die sog. Schärfentiefe charakterisiert, die sich durch eine Begrenzung des

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Strahlengang mittels einer Blende beeinflussen läßt. Betrachten wir dazu Abb. 5.5.31: mit einer Linse (od. Objektiv) mit Durchmesser *a* wird zunächst genau *eine* Entfernung des Objektes zur Kamera scharf abgebildet. Punkte, die dahinter oder davor liegen werden auf Punkte vor bzw. hinter der Bildebene scharf gestellt. Die Beurteilung der Schärfe hängt allerdings von der maximal möglichen Auflösung des Films ab: Objekte können zwar formal unscharf sein, wenn diese Unschärfe jedoch nicht größer als die Korngröße in der Filmemulsion ist (oder die Rezeptorgröße im menschlichen Auge), wird das Bild nicht als unscharf *wahrgenommen*.

Wenn wir als Maß für die Schärfe einer Abbildung die maximale Ausdehnung in der Bildebene als  $\Delta z$  bezeichnen, so können wir gemäß Abb. 5.5.31 Strahlen konstruieren, die innerhalb von  $\Delta z$  die Bildebene treffen, aber aus einem *Entfernungsbereich*  $\Delta x$  vom Objekt stammen. Dieser Bereich  $\Delta x$  ist die **Schärfentiefe**. Der Bereich  $\Delta x$  wird kleiner mit größerer Ausdehnung *a* der Linse. Durch die Begrenzung des Strahlengangs durch eine Blende kann die Schärfentiefe der Abbildung erhöht werden. Diese Blenden (3.4, 8, 11, 16, 22 ...) werden immer analog zu der Lichtstärke angegeben:

$$Blende = \frac{f}{D} \tag{5.5.135}$$



Abbildung 5.5.31: Die Schärfentiefe.

#### Auge

Das Auge besteht aus Hornhaut, Linse, Glaskörper und der Netzhaut auf der das Bild wahrgenommen wird. Im entspannten Zustand liegt der Brennpunkt auf der Netzhaut und ein Gegenstand im Unendlichen wird schaft abgebildet. Bei Gegenständen, die näher liegen muß die Abbildungseigenschaften physiologisch geändert werden: bei den meisten Säugetieren wird die Krümmung der Linse verändert; bei Fischen ändert sich der Abstand von Linse zu Netzhaut; bei Raubvögeln ändert sich die Krümmung der Hornhaut. Falls der Brennpunkt im entspannten Zustand des Auges *nicht* auf der Netzhaut liegt, spricht man von Weitsichtigkeit oder Kurzsichtigkeit. Die Richtigsichtigkeit wird so eingestellt, dass die Dioptrine (=1/Brennweite) wieder zu einer richtigen Abbildung auf der Netzhaut führt.

$$D = D_{Auge} + D_{Brille}$$

Die Dioptrien des gesunden menschlichen Auges ist ungefähr +58.6 D, wobei die Hornhaut mit 43 D und die Linse mit 19 D (von Luft umgeben) beiträgt.



# 5.6 Beugung

Bislang haben wir bei der Interferenz zwei oder mehrere diskrete Lichtstrahlen überlagert und die Auslöschung bzw. Addition der Feldstärken betrachtet. Das zugrunde liegende Superpositionsprinzip und das Huygens'sche Prinzip läßt sich jedoch auch auf Objekte endlicher Ausdehnung wie Spalte und Blenden anwenden bei denen das Interferenzprinzip auf unendliche viele Huygens'sche Kugelwellen anzuwenden ist. Dies bezeichnet man als **Beugung**. Betrachten wir dazu einen einzelnen Spalt oder Blende auf die eine ebene Lichtwelle einfällt. Diese ebene Welle läßt sich als Überlagerung von Kugelwellen eindeutig darstellen. Wenn diese Welle eine Blende durchtritt, müssen wir auch hinter dieser Blende wieder die ausgehenden Kugelwellen überlagern. Man erkennt allerdings, daß gerade am Rand dieser Blende auch Wellen entstehen, die sich nicht mehr in Richtung der ursprünglichen Richtung der ebenen Welle ausbreiten, sondern die Blende unter einem bestimmten Winkel wieder verlassen. Sie werden *gebeugt*! Für diese Beugung existieren zwei Grenzfälle, wie in Abb. 5.6.32 illustriert ist:



Abbildung 5.6.32: Fresnel- und Fraunhoferbeugung.

#### • Fresnel-Beugung

Bei der **Fresnelbeugung** überlagert man die einzelnen Huygens'schen Kugelwellen exakt und erhält so ein Beugungsbild. Die Fresnelbeugung betrachtet somit ganz allgemein die Lichtausbreitung sei es als *parallele* Lichtstrahlen (ebene Wellen) aber auch als *divergente* Lichtstrahlen. Dies ist wichtig für das Beugungsbild im Nahbereich einer Struktur.

#### • Fraunhofer-Beugung

Bei der Fraunhoferbeugung betrachten wir das Beugungsbild in großer Entfernung von der Blende. Hierbei betrachten wir ebene Wellen, die auf eine Blende einfallen und diese im wesentlichen auch wieder als ebene Wellen verlassen. D.h. sowohl für den Abstand der Quelle von der Blende S als auch des Schirmes P kann man als Faustformel benutzen:

$$S, P \ge \frac{d^2}{\lambda} \tag{5.6.136}$$

mit d der Ausdehnung der Blende und  $\lambda$  der Wellenlänge des betrachteten Lichtes.

Das Beugungsbild beim Übergang von Fresnel- zu Fraunhoferbeugung bei der Abbildung einer Blende ist in Abb. 5.6.33 gezeigt. Man erkennt, daß bei kleinem Abstand ein direktes Abbild der Öffnung sichtbar wird und nur in den Randbereichen Maxima und Minima erkennbar werden. Erst bei großem Abstand beobachtet man ein Beugungsbild. Die exakte Form der Öffnung läßt sich daraus nicht mehr ableiten.

# 5.6.1 Beugung am Spalt

Betrachten wir noch einmal eine Welle, die allerdings aus einem räumlich begrenzten Bereich emittiert wird. Dies kann zum Beispiel der Durchgang einer ebenen Welle durch einen Spalt der Breite d sein. Dazu verteilen wir zunächst N Punktquellen auf einer Strecke der Länge d, die bei gleicher Frequenz und Phase Kugelwellen aussenden. Wir suchen die Amplitude  $x(\alpha)$  der Welle an einem Ort P im Abstand r unter einem Winkel  $\alpha$  zur Normalen der Ebene des Spaltes liegt. Bei der Superposition der N Punktquellen (Index n = 1..N) ist insbesondere die Phase  $\Delta \varphi$  der Punktquellen untereinander wichtig. Nachdem  $d \ll r$  gelten soll, ist der Unterschied in den Entfernungen  $r_1$  bis  $r_N$  der einzelnen Punktquellen sehr klein, so daß die Abhängigkeit der Kugelwellen gemäß 1/r durch eine einzige Amplitude a (a = f(r)) gut genähert ist. Was allerdings nicht vernachlässigt werden darf, ist die *Phasenverschiebung*  $\Delta \varphi_n$  der einzelnen Punktquellen untereinander. Damit ist die Beugungsbedingung:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.6.33:** Je nach Abstand geht die Fresnelbeugung in die Fraunhoferbeugung über.

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \left[ N\pi \sin \alpha \frac{\delta d}{\lambda} \right]}{\sin^2 \left[ \pi \frac{\delta d}{\lambda} \sin \alpha \right]}$$
(5.6.137)

Die Verlauf des Beugungsbildes in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$  ist in dem Beispiel Fraunhoferbeugung in Abb. 5.6.33 illustriert.

## 5.6.2 Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Das Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes ist durch die Beugung begrenzt. Diese kann nicht unterschritten werden (bis auf Spezialfälle, siehe unten). Betrachten wir dazu die Abbildung von zwei Punkten im Abstand  $\Delta x$  durch eine Linse (siehe Abb. 5.6.34). Jeder einzelne Punkt erzeugt als Abbild nicht exakt einen Punkt, sondern ein charakteristisches Beugungsbild. Beide Beugungsbilder werden nur dann getrennt, wenn das Maximum der Beugung des einen Punktes in das erste Minimum der Beugungsbildes des zweiten Punktes fällt. Aus Gl. 5.6.137 läßt sich damit der minimale Abstand (Abstand Maximum zum ersten Minimum) von:

$$\delta_{minimal} = 1.22 \frac{\lambda}{d} b \tag{5.6.138}$$

ableiten mit d der Ausdehnung der Linse und b dem Abstand der Linse

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

von dem Schirm (siehe Abb. ??).

Mit dem Abbildungsgeset<br/>zy'/y=-b/aergibt sich wegen  $y=\Delta x$  und<br/>  $y'=\delta_{minimal}$ :

$$\frac{\delta_{minimal}}{\Delta x} = -\frac{b}{a} \tag{5.6.139}$$

Bei der Vergrößerung durch eine Linse (wie bei einer Lupe oder einem Mikroskop) wird das Objekt oftmals in dem Brennpunkt platziert, d.h. die Objektweite a = f. Damit bekommen wir für die Auflösung  $\Delta x$ :



**Abbildung 5.6.34:** Durch die Beugungsbegrenzung läßt sich höchstens ein Objekt der Ausdehnung  $\Delta x$  auf dem Schirm trennen.

$$\Delta x = f1.22\frac{\lambda}{d} \tag{5.6.140}$$

Die Beugungsbegrenzung läßt sich auch als Winkel ausdrücken unter dem ein Objekt unter einem Mikroskop aufgenommen wird. Mit  $2\sin \alpha = d/f$ ergibt sich (Abb. 5.6.35):

$$\Delta x = 1.22 \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \tag{5.6.141}$$

Dieses **Auflösungsvermögen** läßt sich erhöhen, wenn man zwischen Linse und Objekt eine Flüssigkeit mit Brechungsindex n einfügt (Immersionsmikroskopie). Dabei verkürzt sich die Wellenlänge um den Faktor n und man bekommt für das Auflösungsvermögen eines Mikroskops:

$$\Delta x_{Mikroskop} = 1.22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha}$$
(5.6.142)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.6.35: Beugungsbegrenzung eines Mikroskops bei dem sich zwischen Objektiv und Objekt ein Immersionsöl befindet.

Der Ausdruck  $n \sin \alpha$  wird auch als **numerische Apertur** (N.A.) bezeichnet. Damit wird

$$\Delta x = 0.61 \frac{\lambda}{N.A.} \tag{5.6.143}$$

Bei einer Abbildung von Objekten im Unendlichen ist die Definition der Auflösung als Strecke  $\Delta x$  nicht sinnvoll. Deshalb definiert man hier einen minimalen Winkel  $\Theta_{minimal} = \frac{\delta_{min}}{f}$ , der mit b = f aufgelöst werden kann. Setzt man dies in Gl. 5.6.138 ein, so erhält man das **Raleigh-Kriterium** (siehe Abb. 5.6.36):

$$\Theta_{minimal,Fernrohr} = 1.22 \frac{\lambda}{d} \tag{5.6.144}$$

Man erkennt, daß der minimale Winkel, der aufgelöst werden kann, mit der Größe des Objektives d immer kleiner wird. D.h. die Auflösung steigt. Dies wird in der sogenannten **Very Long Baseline Interferometry** ausgenutzt. Hier wird das Signal von einem Array weit entfernter Teleskope aufgenommen. Korreliert man Signale die zu gleichen Zeiten ankommen (konstruktive Interferenz), bekommt man eine Auflösung mit einem d das dem maximalen Abstand der einzelnen Teleskope untereinander entspricht. In allen Fällen steigt zwar die Auflösung, die Signalstärke bleibt jedoch gering, da die Ausammelfläche durch die begrenzte Fläche der einzelnen gekoppelten Teleskope klein bleibt.

Die Beugungsbedingung legt das maximal mögliche Auflösungsvermögen aller vergrößernden Instrumente fest. In speziellen Fällen ist es allerdings



Abbildung 5.6.36: Minimaler Öffnungswinkel, der in einem Fernrohr noch getrennt werden kann, das Raleigh-Kriterium.

gelungen, diese Beugungsbegrenzung zu *unterschreiten*. Ein Beispiel ist die **Fluoreszenz-Mikroskopie**, in der ein Farbstoff in einem Objekt angeregt wird und man das Fluoreszieren dieses Farbstoffes beobachtet (z.B. markierte Zellen in der Biologie).

Durch eine besondere Form der Anregung bzw. Abregung der Fluoreszenz mit Licht unterschiedlicher Frequenz läßt sich jetzt die Beugungsbegrenzung umgehen. Betrachten wir dazu ein Beispiel bei der die Fluoreszenz durch grünes Licht angeregt und durch rotes Licht wieder abgeregt wird. Das Objekt wird mit beiden Lichtquellen gleichzeitig beleuchtet (siehe Abb. 5.6.37): (i) falls nur die grüne Lichtquelle leuchtet beobachtet man im Mikroskop Fluoreszenz. Die Auflösung der Bilder ist durch die Beugungsbegrenzung bei  $\lambda_{gruen}$  begrenzt; (ii) falls beide Lichtquellen gleiche Intensität haben, so tritt keine Fluoreszenz auf, da die Anregung durch das grüne Licht durch das rote Licht wieder vernichtet wird.

Allerdings ist die letzte Aussage nicht ganz richtig, da die Beugungseigenschaften von grünem und rotem Licht *unterschiedlich* sind: grünes Licht hat eine schmäleres Beugungsmaximum als das rote (wg.  $\lambda_{grün} > \lambda_{rot}$ ). Betrachtet man zum Beispiel die Abbildung eines Punktes in grünem und rotem Licht, so überwiegt im Zentrum die Intensität des grünen und die Fluoreszenz wird nicht vollständig unterdrückt, während in den Flanken die Intensität des roten überwiegt und die Fluoreszenz effizient abgeregt wird (siehe Abb. 5.6.38). Hier liegt der Trick bei der STED-Mikroskopie (STED...Stimulated Emission Depletion). Man justiert die Intensität der Lichtquellen derart, daß *nur* im zentralen Bereich, die grüne Intensität wirklich größer als die rote wird, damit läßt sich der Bereich, der fluoresziert, bis auf wenige Å eingrenzen und man bekommt Bilder mit einer Auflösung, die weit unter der

② A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.6.37: Fluoreszenz-Mikroskop.

normalen Beugungsgrenze liegen.



Abbildung 5.6.38: STED Stimulated Depletion Microscopy.

# 5.7 Interferenz

# 5.7.1 Michelson-Interferometer

Eine prominente Anwendung der Interferenz ist das Michelson-Interferometer. Hierbei wird das Licht einer Quelle durch einen Strahlteiler auf zwei Wege E1 und E2 aufgespalten, an Spiegeln reflektiert und mit demselben Strahlteiler wieder zusammengeführt und auf einem Detektor abgebildet (siehe Abb. 5.7.39).



Abbildung 5.7.39: Michelson-Interferometer: über einen halbdurchlässigen Spiegel wird das Licht auf zwei Interferometerarme aufgeteilt, zurück geworfen und mit einem Detektor gemessen. Verschiebt man einen Spiegel um eine Strecke  $\Delta s$ , so beobachtet man Minima und Maxima auf einem Detektor.

Die Amplituden des einfallenden Lichtes  $E_e$  und der Anteile  $E_1$  und  $E_2$ , die die jeweiligen Strahlengänge durchlaufen (bei der jeder Strahl einmal von dem Strahlteiler reflektiert und einmal transmittiert wurde) ergeben:

$$E_e = A_e \cos(\omega t - kz) \tag{5.7.145}$$

$$E_1 = \sqrt{R}\sqrt{T}A_e\cos(\omega t + \varphi_1) \tag{5.7.146}$$

$$E_2 = \sqrt{T}\sqrt{RA_e}\cos(\omega t + \varphi_2) \tag{5.7.147}$$

mit T und R der Transmission bzw. Reflexion des Strahlteilers.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind die jeweiligen Phasenlagen. Auf dem Detektor wird die Intensität gemessen als Quadrat der Summe der beiden Feldstärken und man bekommt:

$$I = \epsilon_0 c \left( E_1 + E_2 \right)^2 = c \epsilon_0 RT A_e^2 \left[ \cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2) \right]^2 \quad (5.7.148)$$

Im zeitlichen Mittel entsteht die Intensität der Form:

$$\bar{I} = I_0 RT \left[ 1 + \cos \Delta \varphi \right] \tag{5.7.149}$$

266

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Man erkennt, daß diese Intensität von dem Unterschied der Phasen  $\Delta \varphi$  abhängt:

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k \Delta s \tag{5.7.150}$$

Bringt man jetzt einen Gegenstand in einen der beiden Interferometerarme, so ändert sich die Phasenverschiebung und das Signal auf dem Detektor ändert sich.

Michelson-Interferometer finden heute eine große Anwendung als sog. **Fourier-Transformations-Spektrometer**. Dies soll zunächst an dem einfachen Fall diskutiert werden, bei dem die Quelle eine einzige Wellenlänge bzw. Frequenz  $\omega_0$  emittiert. In dem Michelson-Interferometer wird ein Spiegel mit der Geschwindigkeit v bewegt, so daß die Phase  $\Delta \varphi = k\Delta s = kvt$ zeitabhängig wird. Demzufolge beobachte man eine zeitliche Änderung der Intensität auf dem Detektor:

$$\bar{I}(t) = I_0 RT \left[ 1 + \cos(kvt) \right]$$
(5.7.151)

Mit  $ck = \omega_0$  ergibt sich:

$$\bar{I}(t) = I_0 RT \left[ 1 + \cos(\omega_0 \frac{v}{c} t) \right]$$
(5.7.152)

Die Fourier-Transformation dieses Signals liefert jetzt die Frequenz des einfallenden Lichtes  $\omega_0$  sowie dessen Intensität zurück. Der Faktor v/ctransformiert die hohe Frequenz  $\omega_0$  in eine niedrige herunter, die von herkömmlicher Messelektronik erfasst werden kann. Dieses Verfahren läßt sich auch auf eine Quelle anwenden, die viele Frequenzen gleichzeitig emittiert (weißes Licht). Die Fourier-Transformation des erhaltenen Interferogramms beinhaltet jetzt die Intensitäten bei allen Frequenzen. Bringt man eine Probe in den Strahlengang beobachtet man eine Dämpfung genau bei denjenigen Frequenzen, bei denen die Bestandteile der Probe (Schwingungsanregung von Molekülbindungen) die Strahlung der Quelle absorbieren.

#### Interferenz dünner Schichten

Bislang haben wir die Überlagerung von zwei einzelnen Lichtstrahlen betrachtet. Allerdings existieren zahlreiche Systeme bei denen die Überlagerung einer Vielzahl von Lichtstrahlen die beobachtbaren Effekte erklärt, die **Vielstrahlinterferenz**. Bekanntestes Beispiel ist die Interferenz dünner Schichten. Betrachten wir dazu eine dünne Schicht der Dicke d, die sehr viel dünner als die Kohärenzlänge sei. Diese Schicht besitze einen Brechungsindex  $n_2$  und ist auf der einen Seite durch ein Medium mit Brechungsindex  $n_1$  und auf der anderen Seite durch ein Medium mit Brechungsindex  $n_3$  begrenzt. Im folgenden wollen wir nur die Reflexion betrachten. Betrachten wir zunächst zwei Wellenzüge, die im reflektierten Licht die Amplitude  $A_1$  und  $A_2$  besitzen, wie in Abb. 5.7.40 angedeutet. Wie ist die Phasenverschiebung zwischen diesen beiden? Dazu betrachten wir die beiden optischen Wege:



**Abbildung 5.7.40:** Interferenz zwischen zwei Strahlen die einmal an der Oberseite der Schicht reflektiert werden  $(A_1)$  und einmal an der Rückseite der Schicht reflektiert werden  $(A_2)$ .

### • Weg in der Schicht

Der Weg durch die Schicht und zurück zur Oberseite läßt sich aus dem Winkel  $\beta$  und der Dicke *d* der Schicht berechnen zu:

$$Weg_2 = 2d \frac{1}{\cos \beta} \tag{5.7.153}$$

#### • Weg des reflektierten Strahls

Der Weg des an der Oberfläche reflektierten Strahls  $A_1$ , bis er auf gleicher Höhe wie Strahl  $A_2$  liegt ist:

$$Weg_{1} = \sin \beta Weg_{2} \cos(90^{\circ} - \alpha)$$
$$= \sin \beta \frac{2d}{\cos \beta} \sin \alpha$$
$$= \sin \beta \frac{2d}{\cos \beta} \sin \beta \frac{n_{2}}{n_{1}}$$
(5.7.154)

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Im letzten Schritt haben wir das Snellius'sche Brechungsgesetz ausgenutzt.

Der Unterschied der optischen Wege wird damit:

$$n_{2} \operatorname{Weg}_{2} - n_{1} \operatorname{Weg}_{1} = \frac{2dn_{2}}{\cos\beta} - n_{1} \sin\beta \frac{2d}{\cos\beta} \sin\beta \frac{n_{2}}{n_{1}}$$
$$= \frac{2dn_{2}}{\cos\beta} - 2n_{2}d \sin^{2}\beta \frac{1}{\cos\beta}$$
$$= 2n_{2}d \cos\beta \qquad (5.7.155)$$

Die Phasenverschiebung beziffern wir als  $2\Delta$  und bekommen:

$$2\Delta = 2kn_2d\cos\beta \tag{5.7.156}$$

Diese Phasenverschiebung kann noch modifiziert werden durch die Phasensprünge  $\phi$  bei der Reflexion an dem jeweiligen dichteren Medium. Dies hängt allerdings von der genauen Beschaffenheit der Brechungsindizes  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  ab:

$$2\Delta = 2kn_2d\cos\beta + \phi \tag{5.7.157}$$

D.h. wir bekommen einen kompakten Ausdruck für die Phasenverschiebung, der nur von den Eigenschaften der Schicht 2 abhängt obwohl Weg 1 im Medium 1 läuft.

Für die korrekte Vielstrahlinterferenz müssen wir allerdings nicht nur zwei Strahlen überlagern, sondern im Prinzip unendlich viele (siehe Abb. 5.7.41). Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind die Fresnelkoeffizienten, wobei die Reihenfolge der Indizes angeben von welcher Seite das Licht auf die Grenzflächen trifft. Die Amplituden der einzelnen Anteile  $A_i$  sind wie folgt:

Mit der Abkürzung F der Form:

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \tag{5.7.158}$$

erhalten wir schließlich die sog. Airy-Funktionen für die Reflexion:

$$R_{ges} = \frac{F\sin^2\Delta}{1+F\sin^2\Delta}$$
(5.7.159)

und die Transmission

$$T_{ges} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \Delta}$$
(5.7.160)

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 5.7.41:** Interferenz eines dünnen Filmes der Dicke d und dem Brechungsindex  $n_2$ .

Man erkennt sofort, daß R + T = 1 gilt. Der Verlauf der Airy-Funktion für Transmission ist in Abb. 5.7.42 gezeigt. Man erkennt, daß für bestimmte Phasen  $\Delta$  die Transmission Maxima besitzt, d.h. die einzelnen Amplituden  $A_n$  überlagern sich konstruktiv. Man erkennt zudem, daß man auf der Basis der Vielstrahlinterferenz einen dünnen Film konstruieren kann der Licht *perfekt* transmittiert, da für bestimmte Phasen T = 1 und R = 0 gilt<sup>11</sup>. Die Maxima der Transmission werden prägnanter, wenn die Reflexion der einzelnen Flächen R größer wird, was gleichbedeutend mit einem großen Wert für F ist. Dies läßt sich anschaulich verstehen: je besser die Flächen reflektieren, desto mehr Vielfachreflexionen tragen zur Summe bei und die Unterscheidung zwischen konstruktiver und destruktiver Interferenz werden immer schärfer. Wird zum Beispiel bei einer hohen Reflexion R, die Phase nicht exakt getroffen, so ist die Phasenverschiebung der ersten beiden Strahlen zwar noch klein und es tritt nur schwache destruktive Interferenz auf. Wenn man allerdings zu einer Komponente mit großem n geht, summieren sich die kleinen Phasenverschiebungen auf (jeweils ein Faktor  $2\Delta$  dazu) und der destruktive Anteil gewinnt.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Bei einer einfachen Grenzfläche bekommt man immer eine endliche Reflexion und Transmission, da der Unterschied im Brechungsindex an der Grenzfläche immer einen Fresnel-Koeffizienten ungleich Null bedingt!

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 5.7.42: Airy-Funktion beschreibt die Transmission als Funktion der Phasenverschiebung  $\Delta$ . R gibt die Reflexion der einzelnen Grenzflächen an.

# Kapitel 6

# Atom- und Kernphysik

Mit der Jahrhundertwende zum zwanzigsten Jahrhundert erfolgte eine umwälzende Neuordnung der Physik, der Beginn der *modernen Physik*. Zum Ausgang des 19ten Jahrhundert war die Mechanik durch die Newton'schen Gesetze und die Elektrodynamik durch die Maxwell-Gleichungen erfolgreich beschrieben worden. Demnach versuchte man diese erfolgreichen Konzepte auf den Mikrokosmos zu übertragen, was misslang.

Erst die Quantenphysik schaffte es diesen Widerspruch aufzulösen und in beeindruckender Weise bis heute die mikroskopische Natur der Materie zu erklären (siehe Abb. 6.0.1). Diese Entwicklung begann zunächst durch die formale Einführung des Wirkungsquantums h durch *Planck*, um die Energieabgabe der Wände eines Hohlraums bei Temperatur T zu beschreiben. *Einstein* postulierte dann, daß nicht nur die Energieabgabe dieser Oszillatoren als quantisiert zu betrachten ist, sondern das das elektromagnetische Feld im Hohlraum selbst als zusammengesetzt aus Lichtquanten zu beschreiben ist. Der experimentelle Nachweis, daß diese formale Behauptung richtig ist, erfolgte erst Jahre später durch die Beobachtung des *Compton*-Effektes. Gleichzeitig zeigten Beugungsexperimente mit Elektronen, daß man ihnen eine Wellennatur zuschreiben kann. *deBroglie* verknüpfte den klassischen Impuls eines Teilchens mit einer Wellenlänge, der deBroglie-Wellenlänge. Diese Befunde zeigen daß Lichtteilchen, die Photonen, als auch Materieteilchen sowohl Teilchen als auch Wellencharakter haben können.

Parallel dazu, wurde die Struktur der Atome durch die Streuexperimente von *Rutherford* weiter aufgeklärt, der feststellt, daß die positive Ladung im Atomkern lokalisiert ist.

Ausgehend von diesen Beobachtungen formulierte *Bohr* sein Atommodell, der postulierte, daß die Elektronen auf kreisförmigen Bahnen um den Atomkern laufen. Nachdem die Elektronen eine Wellennatur besitzen, bildet sich auf einer Kreisbahn eine stehende Welle. Durch diese Randbedingung können die Radien der Kreisbahnen deshalb nur diskrete Werte annehmen. Übergänge der Elektronen zwischen den Bahnen führen zur Lichtemission und -absorption, was die Linienstrahlung erklärt. Bei genauerer Analyse dieser Linien beobachtete man jedoch eine Feinstruktur, d.h. eine kleine Aufspaltung. Sommerfeld löste dies indem er postulierte, daß die Elektronen keine Kreisbahnen sondern unterschiedliche Ellipsenbahnen um den Atomkern beschreiben. Elektronen, die eine besondere exzentrische Ellipse durchlaufen bewegen sich weit weg von dem positiven Atomkern und sind dadurch schwächer gebunden als Elektronen, die nahezu kreisförmig um den Atomkern laufen. Diese Unterschiede bewirken unterschiedliche Bindungsenergien und dementsprechend eine Verschiebung der Emissions- bzw. Absorptionslinien. Die kreisförmigen Elektronenbahnen im Bohr'schen Atommodell bzw. in ihrer Sommerfeld'schen Erweiterung sind allerdings im Widerspruch zur Elektrodynamik, die von einer beschleunigten Ladung (Kreisbahn) die Abgabe von Strahlung nötig macht. Demnach würden die Elektronen Energie verlieren und in den Kern stürzen.



Abbildung 6.0.1: Entwicklung der Quantenphysik Anfang des 20ten Jahrhunderts

Die Widersprüche im Bohr'sche Atommodell wurden aufgelöst, durch die Arbeiten von *Heisenberg*, der nicht das Atom selbst sondern die Observablen, d.h. die beobachtbaren Messgrößen in den Vordergrund stellte. Zeitgleich postulierte *de Broglie*, daß auch Teilchen durch Wellen beschrieben werden können, den Materiewellen. Durch die Entwicklung der Quantenmechanik von *Schrödinger* und *Heisenberg* wurde ein geschlossene Mathematik zur Beschreibung der Quantenwelt entwickelt aus der sich auf natürliche Weise die Quantisierung der Atomniveaus ergibt.

Die konsequente Weiterführung dieser Beschreibung unter Berücksichtigung relativistischer Korrekturen und der Quantisierung des Strahlungsfeldes erlaubt es eine präzise Beschreibung atomarer Niveaus und damit der Linienemission.

# 6.1 Atome

# 6.1.1 Masse eines Atoms

Der Ausdruck *Atom* kommt aus dem Griechischen für *atomos* dem Unteilbaren. Schon im 19ten Jahrhundert entwickelten die Chemiker durch die Betrachtung von chemischen Reaktionsabläufen eine Präzisierung des Atombegriffs. Zwei Beobachtungen waren dabei maßgeblich:

# • Gesetz der konstanten Proportionen für die Massen (Dalton)

Wenn chemische Verbindungen eine Reaktion eingehen, so stehen die Massen der Ausgangssubstanzen immer in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander.

14 gr. N<sub>2</sub> + 16 gr. O<sub>2</sub> 
$$\rightarrow$$
 30 gr. NO

In diesem Beispiel muß man für die vollständige Synthese von NO immer Stickstoff und Sauerstoff im Massenverhältnis 14:16 zusammen bringen.

# • Gesetz der konstanten Proportionen für Volumina (Gay-Lussac)

Wenn gasförmige chemische Verbindungen eine Reaktion eingehen, so stehen ihre Volumina in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander.

$$1 \text{ Vl. } N_2 + 1 \text{ Vl. } O_2 \rightarrow 2 \text{ Vl. } NO$$
$$2 \text{ Vl. } H_2 + 1 \text{ Vl. } O_2 \rightarrow 2 \text{ Vl. } H_2O$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Avogadro fasste diese Beobachtungen zusammen indem er postulierte, daß alle Verbindungen sich aus *Molekülen* zusammen setzen, die ihrerseits aus *Atomen* aufgebaut sind. Eine chemische Reaktion ist demnach eine Reaktion von Molekülen oder Atomen untereinander bei der ein Produkt entsteht, daß einer neues Kombination der Atome in den Ausgangssubstanzen entspricht. Auf der Basis der ganzzahligen Massenverhältnisse vermutete man, daß die Atome der Elemente ihrerseits aus Wasserstoff aufgebaut sind.

Für die Umrechnung der Masse einer Substanz in eine Anzahl an darin enthaltenen Molekülen definierte Avogadro die Einheit des **Mol**:

Ein Mol einer gasförmigen Verbindung nimmt ein Volumen von 22.4 l ein. Seine Masse entspricht dem Molekulargewicht (= molare Masse) der Verbindung.

Die heute gültige Definition des Mols entspricht der Teilchenmenge, wie sie in 12 Gramm reinen Kohlenstoff <sup>12</sup>C enthalten sind. Die **molare Masse** M beträgt demnach 12 Gramm. Die Zahl der Teilchen in einem Mol ist gegeben durch die **Avogadro-Konstante**  $N_A$ :

$$N_{\rm A} = 6.022 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1} \tag{6.1.1}$$

Daraus läßt sich die atomare Masseneinheit **amu** ableiten (amu - atomic mass unit):

$$1amu = \frac{1}{12}C - Atom = 1.66055 \cdot 10^{-27} kg$$
 (6.1.2)

Im Periodensystem ist oft der Mittelwert der Atom-Masse angegeben, der sich aus der Mittelung über die Isotop-Häufigkeit des betreffenden Elementes bestimmt. So liegt 1% des Kohlenstoffs in der Natur als <sup>13</sup>C vor. Demnach ist die Masse im Periodensystem als 12.01 angegeben.

Wie bestimmt man nun diese Avogadro-Konstante und damit die Masse eines Atomes.

Ausgangspunkt der Bestimmung der Avogadro-Konstante und damit der Masse eines Atoms ist das allgemeine Gasgesetz. Betrachtet man ein Mol eines Stoffes, das bei Normaldruck p ein Volumen  $V_M$  einnimmt, so ergibt sich:

$$pV_M = N_A k_B T = RT \tag{6.1.3}$$

Das Produkt aus Avogadro-Konstante  $N_A$  und Boltzmann-Konstante  $k_B$  bezeichnet man als **Gaskonstante** R. Für die Bestimmung von  $N_A$  gibt es mehrere Verfahren, die entweder R und  $k_B$  bestimmen oder direkt  $N_A$  messen können.

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 6.1.2 Größe eines Atoms

Die Größe von Atomen läßt sich in analoger Weise auch aus Röntgenbeugung ableiten. Allerdings ist die Größe eines Atoms nicht scharf definiert. Der genaue Wert hängt von der Art der Messmethode ab. Zur Messung der Atomgröße werden in der Regel Streuexperimente durchgeführt. Die Winkelverteilung in einem solchen Streuprozeß hängt von den Streupartnern und damit von der Art der Wechselwirkung ab. Dieser Zusammenhang ist kompliziert, da zum Beispiel die Wechselwirkung von zwei neutralen Teilchen oder von zwei geladenen Teilchen eher Informationen über die *Reichweite* der Wechselwirkung als über die eigentliche Größe des Atoms liefert.

Im allgemeinen kann man ein Streuexperiment durch die Messung der Abschwächung eines Gasstrahls in einem definierten Volumen bestimmen (siehe Abb 6.1.2). Ein Maß für die Abschwächung eines Teilchenstrahls, der eine Teilchenmenge N enthält in einem Gastarget der Dichte n ist:

$$\Delta N = -nA\Delta x\sigma N \frac{1}{A} \tag{6.1.4}$$

der Term  $nA\Delta x$  entspricht der Gesamtzahl der Teilchen im Streuvolumen.  $\sigma$  ist der sog. **totale Wirkungsquerschnitt** (Trefferfläche bei der Streuung stattfindet).

$$\frac{\Delta N}{\Delta x} = -n\sigma N \tag{6.1.5}$$



Abbildung 6.1.2: Den Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  für Atomstreuung bestimmt man durch die Abschwächung eines Atomstrahls in einem Gastarget.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Lösung dieser Differentialgleichung zur Bestimmung der Teilchenmenge nach der Transmission durch ein Streuvolumen der Länge L ist:

$$N = N_0 e^{-n\sigma L} \tag{6.1.6}$$

Aus einer Messung von N und  $N_0$  erhält man bei bekanntem n und L, den Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  und damit den Durchmesser eines Atoms.

# 6.2 Ionen und Elektronen

# 6.2.1 Begriffsbildung

Beim radioaktiven Zerfall und bei Leuchterscheinungen in Gasen (=Plasmen) beobachtete man, daß man die entstehenden Bestandteile durch äußere elektrische und magnetische Felder beeinflussen kann.

#### • Radioaktivität

Je nach Element und Zerfallskette können beim radioaktiven Zerfall  $\alpha$ -Teilchen (positiv geladene Heliumkerne) oder  $\beta$ -Teilchen (Elektronen) entstehen, die in einem Magnetfeld jeweils anders abgelenkt werden.

## • Plasmen

Plasmen sind teilweise oder vollständig ionisierte Gase. Bei einem Kontakt von Plasmen mit umgebenden Wänden können dort Ionen mit hoher Energie auftreffen. Bei diesem Prozeß können zum einen Sekundärelektronen erzeugt werden, die die Oberfläche verlassen und in dem elektrischen Feld zwischen Plasma und Oberfläche beschleunigt werden (**Kathodenstrahlen** = Elektronen). Zum anderen können die auftreffenden Ionen durch einen Kanal in der Kathode das Plasma verlassen (**Kanalstrahlen** = pos. Ionen). Die erzeugten hochenergetischen Elektronen und Ionen erzeugen dann eine Leuchterscheinung auf einem Phosphorschirm (siehe Abb 6.2.3).

Diese Experimente zeigten zunächst, daß sich Atome aus unterschiedlich geladenen Bestandteilen zusammensetzen. Diese besitzen ein stark unterschiedliches Ladungs-zu-Masse-Verhältnis, wie es sich aus der Ablenkung im Magnetfeld ableiten läßt (siehe unten).



Abbildung 6.2.3: Bei Plasmen kann man hochenergetische Teilchenstrahlen beobachten. Oben: Kathodenstrahlen bestehen aus Sekundärelektronen, die an der Kathode durch auftreffende Ionen ausgelöst werden. Unten: Kanalstrahlen bestehen aus hochenergetischen Ionen, die durch einen Kanal in der Kathode treten.

# 6.2.2 Ladung eines Elektrons

Die Elementarladung eines Elektrons wurde zum ersten Mal durch den **Millikan**-Versuch bestimmt (siehe Abb. 6.2.4). Hierbei werden geladene Öltröpfchen in einem Kondensator eingefangen und durch ein Gegenfeld im Gleichgewicht mit der Schwerkraft gehalten.

Die Schwerkraft eines Öltröpfchens mit Radius R in Umgebungsluft ist gegeben als:

$$F_{unten} = \frac{4\pi}{3} R^3 \left(\rho_{Oel} - \rho_{Luft}\right) g \tag{6.2.7}$$

Dem Sinken der Tröpfchen entgegen gerichtet ist die Reibungskraft. Stokes-Reibung ergibt:

$$F_{oben} = 6\pi\eta R v \tag{6.2.8}$$

 $\eta$  ist die Viskosität von Luft und v die Geschwindigkeit des Öltröpfchens. In einem ersten Schritt beobachtet man die Sinkgeschwindigkeit v eines

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.2.4: Millikan-Versuch zur Bestimmung der Elementarladung

Oltröpfchens, in dem Kondensator an dem keine Spannung anliegt. Daraus läßt sich der Tröpfchen-Radius R bestimmen:

$$R = \left(\frac{9\eta v}{2g\left(\rho_{Oel} - \rho_{Luft}\right)}\right)^{1/2} \tag{6.2.9}$$

Anschließend legt man ein Gegenfeld an, das die Tröpfchen in Ruhe hält (v = 0):

$$ne\vec{E} = (\rho_{Oel} - \rho_{Luft}) \,\vec{g} \frac{4\pi}{3} R^3$$
 (6.2.10)

Für eine Bestimmung der Elementarladung auf der linken Seite von Gl. 6.2.10, benötigt man jetzt noch die Anzahl der Ladungen auf einem Öltröpfchen. Durch eine äußere Licht-Quelle ändert man den Ladungszustand der Öltröpfchen (Photoeffekt) und beobachtet die Spannung  $\Delta U$ , die man zusätzlich benötigt, um das Tröpfchen wieder in die Gleichgewichtslage zu bekommen.

$$\frac{n+\Delta n}{n} = \frac{U+\Delta U}{U} \tag{6.2.11}$$

Der kleinste Werte von  $\Delta U$  entspricht einer Änderung des Ladungszustandes um  $\Delta n = 1$ . Damit ergibt sich:

$$1 = n \frac{\Delta U}{U} \tag{6.2.12}$$

Daraus läßt sich n bestimmen und in Gl. 6.2.10 einsetzten. Damit ergibt sich schließlich für die Elementarladung:

$$e = \frac{1}{n|\vec{E}|} \left(\rho_{Oel} - \rho_{Luft}\right) g \frac{4\pi}{3} R^3 \tag{6.2.13}$$

Den Wert der Elementarladung, der sich daraus bestimmt ist:

$$e = 1.602177 \cdot 10^{-19} C \tag{6.2.14}$$

# 6.2.3 Masse eines Elektrons

Die Masse eines Elektrons läßt sich aus seiner Trajektorie in einem Magnetfeld bestimmen falls die Ladung bekannt ist (siehe Abb. 6.2.5). Die Lorentzkraft ist gegeben als:

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{6.2.15}$$

In einem gleichförmigen Magnetfeld gilt das Kräftegleichgewicht:

$$m\frac{v^2}{R} = evB \tag{6.2.16}$$

Man beschleunigt einen Elektronenstrahl auf die Geschwindigkeit v durch eine Beschleunigungsspannung U

$$v = \left(\frac{2eU}{m}\right)^{1/2} \tag{6.2.17}$$

und beobachtet den Krümmungs-Radius des abgelenkten Elektronenstrahl im Magnetfeld:

$$R = \frac{mv}{eB} \tag{6.2.18}$$

Daraus ergibt sich das Verhältnis aus Elementarladung und Masse:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{R^2 B^2} \tag{6.2.19}$$

Bei bekannter Elementarladung ergibt sich als Elektronenmasse:

$$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} kg$$

## 6.2.4 Struktur der Atome

Es wurde gezeigt, daß Atome aus positiven und negativen Ladungsträgern bestehen, wobei die negativen Ladungsträger sehr viel leichter sind. Die innere Struktur bzw. Verteilung dieser Ladungsträger im Atom selbst wird durch

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.2.5: Fadenstrahlrohr zur Bestimmung der Elektronenmasse

Streuexperimente bestimmt: die Winkelverteilung gestreuter Teilchen ist charakteristisch für das Wechselwirkungspotential (hier Coloumb-Potential) und die Massenverteilung im Atom.

Betrachten wir zunächst die Streuung eines geladenen Projektils (Masse  $m_1$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_1$ , Ort  $r_1$ ) an einem ruhenden Atom (Masse  $m_2$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}_2 = 0$ , Ort  $r_2$ ). Ein Beispiel ist die Streuung von zwei Ladungen q und Q für die das an einem Coloumb-Potential gilt. Mit einem Abstandsgesetz für dieses Potential gemäß:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} e^2 qQ \qquad (6.2.20)$$

hierbei ist q die Ladung des Projektils und Q die Ladung des Atomkerns. Es ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2 q Q}{4\pi\epsilon_0 \mu v_1^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \propto \frac{1}{E_0^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$
(6.2.21)

Diese Formel für Streuung eines Projektils der Ladung q und dem einem Coloumb-Potential einer Punktladung mit Ladung Q bezeichnet man als **Rutherford-Streuung** (Der Winkel  $\Theta$  ist der Streuwinkel im Schwerpunktsystem).

Diese Art der Streuung tritt in der Natur oft auf und wird deshalb auch für zahlreiche Anwendungen in der Technik genutzt. Betrachtet man zum Beispiel schnelle geladene Teilchen, die in ein Material eindringen, so hat die Trajektorie eine sehr charakteristische Form: beim Eindringen selbst haben diese Teilchen eine sehr hohe Energie; wegen der  $1/E_0^2$ -Abhängigkeit ist der Wirkungsquerschnitt zunächst und die Ablenkung der Teilchen damit klein - die Trajektorie ist sehr geradlinig. Wenn die Teilchen weiter in das Material eindringen werden sie langsamer, womit aber auch der Wirkungsquerschnitt sehr stark ansteigt. Dadurch werden die Teilchen immer stärker gestreut und verlieren dabei umso mehr kinetische Energie. Nachdem dieser Zusammenhang stark nicht-linear ist (nämlich  $1/E_0^2$ ) werden schnelle Teilchen in einem Material in einem relativ genau definierten Tiefenbereich sehr stark abgebremst und somit dort deponiert. Man spricht von **Implantati**on. Diese Art der Wechselwirkung wird in der Halbleiterindustrie sowie in der Medizintechnik ausgenutzt (z.B. lokale Behandlung von Tumoren mittels Protonenstrahlen).

Beim Rutherford-Modell benutzt man direkt die Formel für die Streuung an einer Punktladung. Dieses Model ist in guter Übereinstimmung mit den Streuexperimenten (siehe Abb. 6.2.6). Erst bei sehr kleinen Stoßparametern, bzw. großen Streuwinkeln, ist ein kleine Abweichung von Gl. 6.2.21 beobachtbar. Rutherford schloss daraus, daß die positive Ladung im Kern lokalisiert ist, der allerdings eine endliche Ausdehnung hat, was an der Abweichung bei  $\Theta = \pi$  sichtbar wird (bei Streuung an Elektronen gibt Gl. 6.2.21 die Experimente bis zu b = 0 richtig wieder). Der Kernradius skaliert wie:

$$r_{Kern} = r_0 A^{1/3} \tag{6.2.22}$$

mit A der Zahl der Nukleonen im Kern;  $r_0 = 1.3 \cdot 10^{-15} m$ 



Abbildung 6.2.6: Winkelverteilung gestreuter Teilchen nach dem Rutherford-Modell.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 6.3 Photonen

Zu Beginn des 20ten Jahrhunderts taten sich Widersprüche auf bei der Anwendung der Gesetze der Elektrodynamik auf bestimmte Fragestellungen. Die Geburt der Quantenphysik geschah mit der Einführung des Planck'schen Wirkungsquantum zur konsistenten Beschreibung der Hohlraumstrahlung. Dieses zunächst theoretische Konstrukt zur Quantisierung der Energieabgabe von Atomen wurde übertragen auf die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, den Photonen. Das duale Konzept von Teilchen- und Wellencharakter von Photonen wurde nachfolgend auf Materie übertragen.

Gegen Ende des 19ten Jahrhunderts waren die Elektrodynamik und die Thermodynamik die etabliertesten und erfolgreichsten Theorien. Es stellte sich heraus, daß man die Gültigkeit bzw. Verbindung beider Theorien mit der Betrachtung der Hohlraumstrahlung überprüfen könnte. Nach klassischer Vorstellung bestehen die Wände eines Hohlraums aus einzelnen Oszillatoren, die wie ein Hertz'scher Dipol elektromagnetische Strahlen aussenden. Die Energie dieser Oszillatoren und damit auch ihre Abstrahlung sollte nach dem Gleichverteilungssatz der Thermodynamik von der Temperatur abhängen. Nach dieser Vorstellung sollte sich die Energie im elektromagnetischen Feld einfach aus der Wandtemperatur des Hohlraums ableiten können. Genau hier stößt man allerdings auf Widersprüche, die erst durch die Quantenphysik aufgelöst werden konnten.

Elektromagnetische Felder waren bekannt als Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum. Diese entsprechen Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten gemäß der Dispersion:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{6.3.23}$$

bzw.

$$\omega = ck \tag{6.3.24}$$

mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  und dem Wellenvektor  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Die Energiedichte dieser Wellen in einem Hohlraum bei einer Temperatur *T* konnte Planck zum ersten Mal korrekt ableiten.

$$w_{\nu}(\nu)d\nu = \bar{w}dn = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}} - 1} d\nu$$
(6.3.25)

Dies bezeichnet man als **Planck'sches Strahlungsgesetz**. Dieses Gesetz gibt die spektrale Energiedichte eines Hohlraums bei der Temperatur T über den gesamten Frequenzbereich richtig wieder (siehe Abb. 6.3.7).

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.3.7: Energiedichte der Hohlraumstrahlung gemäß dem Planck'schen Strahlungsgesetz.

Das Planck'sche Strahlungsgesetz kann jetzt übereinstimmend mehrere Gesetzmäßigkeiten konsistent erklären:

#### • Rayleigh-Jeans-Gesetz

Oben wurde erwähnt, daß das Raleigh-Jeans-Gesetz für sehr kleine Frequenzen das Experiment gut wiedergibt. Führt man eine Näherung  $h\nu \ll k_B T$  durch, ergibt sich wieder das Raleigh-Jeans Gesetz:

$$w_{\nu}(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT$$
 (6.3.26)

#### • Stefan-Boltzmann-Gesetz

Die abgestrahlte Leistung eines Körpers bei Temperatur T wurde empirisch durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben ( $P = \sigma T^4$   $[Wm^{-2}]$ ). Dieses Gesetz läßt sich durch Integration über den gesamten Frequenzbereich ableiten. Die Energiedichte in dem Hohlraum ergibt sich aus:

$$w(T) = \int_{\nu=0}^{\infty} w_{\nu}(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$
(6.3.27)

mit  $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ 

$$w(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$
(6.3.28)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

man erkennt, daß die Energiedichte in dem Hohlraum mit  $T^4$  skaliert. Die abgestrahlte Leistung (= Emissions-Vermögen) für ein Wandelement des Hohlraums (im Gleichgewicht mit der Hohlraumstrahlung) entspricht der Strahlungsdichte S, integriert über den Halbraum  $2\pi$ . Es ergibt sich:

$$P^* = S(T)2\pi = \frac{c}{4\pi}w(T)2\pi$$
(6.3.29)

Betrachtet man allerdings die Abstrahlung durch eine Öffnung des Hohlraums, ist die Oberfläche nicht im Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld, da die Strahlung nur von der Seite des Hohlraumes einfällt, aber nicht aus der Umgebung von aussen. Nachdem ein Halbraum fehlt, ist die abgestrahlte Leistung pro Flächenelement eines schwarzen Körpers gegeben als:

$$P = \frac{1}{2}P^* = \frac{c}{4}w(T) = \sigma T^4 \qquad [Wm^{-2}]$$
(6.3.30)

mit  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ 

## • Wien'sches Verschiebungsgesetz

Wien beobachtete, daß das Produkt aus Wellenlänge am Maximum der abgestrahlten Leistung mit der Temperatur des Hohlraums immer einen konstanten Wert annimmt (siehe Abb. 6.3.8):

$$\lambda_m T = \text{const.} \tag{6.3.31}$$

Um dieses Gesetz abzuleiten, transformieren wir die Frequenzabhängigkeit in eine Wellenlängenabhängigkeit. Man erhält:

$$w(\lambda)_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi}{c^3}h\frac{c^3}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}} - 1}\frac{c}{\lambda^2}d\lambda \qquad (6.3.32)$$

Für die Umwandlung von  $\nu$  in  $\lambda$  gilt zu beachten, daß auch  $d\nu$  umgewandelt werden muß<sup>1</sup>. Das Maximum dieser Energiedichte legt die Wellenlänge  $\lambda_m$  fest. Aus der Bedingung:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Zunächst gilt  $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$ . Zudem müssen aber auch noch die Integrationsgrenzen umgedreht werden. Deshalb wird direkt  $d\nu$  mit  $\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$  ersetzt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.3.8: Das Produkt aus der Wellenlänge am Maximum der Energiedichteverteilung und der Temperatur des Hohlraums ist konstant gemäß dem Wien'schen Verschiebungsgesetz.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{8\pi}{c^3} h \frac{c^3}{\lambda^3} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \frac{c}{\lambda^2} \right) = 0 \tag{6.3.33}$$

ergibt sich die Bedingung:

$$5\left(e^{b/\lambda} - 1\right) - b/\lambda e^{b/\lambda} = 0 \tag{6.3.34}$$

mit  $b = hc/(k_B T)$ . Diese Gleichung kann man nach dem Quotienten  $b/\lambda$  auflösen, was der Bedingung  $\lambda_m T = \text{const. entspricht.}$ 

Man erkennt, daß das Planck'sche Strahlungsgesetz eine Reihe von Beobachtungen konsistent erklärt, obwohl anzumerken bleibt, daß Planck sein Wirkungsquantum zunächst nur als theoretisches Hilfsmittel eingeführt hatte.

Anwendungen findet das Planck'sche Strahlungsgesetz vielfach. Zum einen als Kalibriermöglichkeit bei spektral aufgelösten Messungen. Zum anderen als Möglichkeit die Temperatur eines Körpers zu bestimmen durch Vergleich mit der Messung der spektralen Verteilung der Emission. Dies wird verwendet, um die Temperatur glühender Körper berührungslos (Pyrometer) zu messen bzw. um die Oberflächentemperatur von Sternen zu bestimmen. So zeigt sich zum Beispiel, daß die Oberflächentemperatur der Sonne ca. 5800 K beträgt.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

#### Photoeffekt

Der nächste Schritt zu der Entwicklung der Quantenphysik war die Einführung des Photons. Einstein hatte an dem Energiebegriff der Elektrodynamik auszusetzen, daß dort die Energie nicht lokalisiert ist, sondern sich gleichförmig im Raum verteilen sollte (gemäß  $\frac{1}{2}\epsilon_0(E^2 + c^2B^2)$ ). Dies steht im formalen Widerspruch zum Energiebegriff in der klassischen Mechanik bewegter Körper. Er postulierte daraufhin, daß das Strahlungsfeld selbst sich aus Quanten der Energie  $h\nu$ , den **Photonen**, zusammensetzt. Die ist im Unterschied zu sehen zur Planck'schen Hypothese, der nur gefordert hatte, daß die Oszillatoren in der Wand des Hohlraums ihre Energie quantisiert abgeben. Einstein verband die Elektrodynamik und seinen Photonenbegriff indem er postulierte, daß die elektromagnetischen Felder, wie sie aus den Maxwell-Gleichungen folgen, einer Überlagerung von einer Vielzahl von Photonen entsprechen.



**Abbildung 6.3.9:** Beim Photoeffekt werden Elektronen aus dem Festkörper durch einfallende Photonen ausgelöst. Dies führt zu einem Stromfuß in einem externen Stromkreis.

Diese Überlegungen Einsteins zum Photon ermöglichten schließlich auch die konsistente Erklärung des Photoeffekts (siehe Abb. 6.3.9). Einstein postulierte, das genau *ein* Energiequant (= Photon) absorbiert wird, um *ein* Elektron aus einem Festkörper herauszulösen.

Beim Photoeffekt fällt Licht auf einen Festkörper und löst dort Elektronen aus. Dieser Festkörper bildet eine Fläche eines Kondensators, an den ein elektrisches Feld angelegt ist. Je nach Polarität, werden die austretenden Elektronen beschleunigt bzw. abgebremst; es fließt Strom. Bei der Strom-Spannungs-Charakteristik dieser Anordnung beobachtet man charakteristische Messkurven ,wie in Abb. 6.3.10 gezeigt. Ab einer bestimmten Spannung  $-U_0$  setzt ein Strom ein, der bei höherer Spannung schließlich sättigt. Mehrere Beobachtungen wurden gemacht:



Abbildung 6.3.10: Strom-Spannungs-Charakteristik in dem Versuch, wie er in Abb. 6.3.9 gezeigt ist.

- Die minimale Spannung  $-U_0$  oberhalb der ein Stromfluß beobachtet wird, hängt nur von der Frequenz des Lichtes ab, nicht von dessen Intensität.
- Der Strom hängt nur von der Intensität des Lichtes ab.

Diese Beobachtungen konnten durch das Postulat erklärt werden, daß die Energie eines Photons bei dessen Absorption komplett zum Herauslösen des Elektrons aus dem Festkörper aufgewendet wird. Die kinetische Energie (die das Elektron benötigt, um z.B. in einem elektrischen Gegenfeld im Kondensator die andere Elektrode zu erreichen) ist abhängig von dem Elektrodenmaterial. Dies läßt sich ausdrücken als:

$$E_{kin} = h\nu - \Phi_A \tag{6.3.35}$$

 $\Phi_A$  bezeichnet man als **Austrittsarbeit**. Diese Arbeit wird *mindestens* benötigt, um ein Elektron aus dem Festkörper herauszulösen.

Für den Punkt, an dem der Strom einsetzt, ist die kinetische Energie der Elektronen gerade so groß, daß sie gegen das Gegenfeld gemäß  $-U_0$  anlaufen können und die andere Elektrode erreichen. D.h. für das Einsetzen des Stromes an der Spannung  $-U_0$  gilt

$$-eU_0 = h\nu - \Phi_A \tag{6.3.36}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum
Trägt man jetzt die Werte für das Einsetzen der Spannung gegen die Frequenz der Photonen  $\nu$  auf, so bekommt man aus der Steigung der Geraden eine Bestimmungsgleichung für das Planck'sche Wirkungsquantum (siehe Abb. 6.3.11).



**Abbildung 6.3.11:** Bestimmung des Planck'schen Wirkungsquantums h und der Austrittsarbeit  $\Phi_A$  durch den Photoeffekt.

# 6.4 Materiewellen

Wie kann man die Wellennatur eines Teilchens formal fassen? Als Ansatz wählt man zunächst den einer ebenen Welle. In unserem Fall entspricht dies der sog. **Materiewelle**:

$$\Psi = Ce^{i(\omega t - kx)} = Ce^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \tag{6.4.37}$$

Im Unterschied zu Photonen, haben Materiewellen allerdings eine sog. **Dispersion**, d.h. die Frequenz der Welle hängt von der Wellenlänge ab. Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus:

$$v_{Phase} = \frac{\omega}{k} \tag{6.4.38}$$

Im Fall von Licht ist die Beziehung von  $\omega$  und k gegeben als  $\omega = ck$ . Im Fall von Teilchen ist allerdings die Beziehung gegeben als:

$$E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \rightarrow \qquad v_{Phase} = \frac{\hbar k}{2m} \qquad (6.4.39)$$

d.h. die Phasengeschwindigkeit einer Materiewelle *ändert* sich mit der Wellenlänge (Bei Lichtwellen ergibt sich wegen  $\omega/k = c$  als Phasengeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit, unabhängig von der Wellenlänge).

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

(6.4.40)

Vergleicht man die Phasengeschwindigkeit mit der Teilchengeschwindigkeit  $v_{\text{Teilchen}} = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$  so stellt man fest, daß die Phasengeschwindigkeit nur der halben Teilchengeschwindigkeit entspricht  $v_{phase} = \frac{1}{2}v_{\text{Teilchen}}$ .

Um die Lokalisierung eines Teilchens im Raum wiederzugeben, daß sich mit  $v_{Teilchen}$  bewegt, ist es nahe liegend Teilchen nicht durch eine ebene Welle sondern durch ein **Wellenpaket** darzustellen (siehe Abb. 6.4.12):

 $\Psi = \sum_{j} c_j e^{i(\omega_j t - k_j x)}$ 

Abbildung 6.4.12: Eine Materiewelle sollte idealerweise als Wellenpaket vorstellen, um der Lokalisierung des Teilchens Rechnung zu tragen.

Ein Wellenpaket sei im Impulsraum durch die Überlagerung von ebenen Wellen in einem Bereich  $k_0 \pm \Delta k/2$  definiert:

$$\Psi(x,t) = \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} c(k) e^{i(\omega t - kx)} dk$$
(6.4.41)

mit  $\Delta k \ll k_0$  läßt sich annähern  $c(k) \approx c(k_0)$  und:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} (k - k_0) \tag{6.4.42}$$

damit ergibt sich:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$\Psi(x,t) = c(k_0)e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta k/2}^{\Delta k/2} e^{iuk} dk$$
(6.4.43)

mit der Substitution  $u = \frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_{k_0} t - x$ , die einer Transformation in das mitbewegte Bezugssystem entspricht, ergibt sich schließlich:

$$\Psi(x,t) = 2c(k_0) \frac{\sin(u\Delta k/2)}{u} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$$
(6.4.44)

Man erhält ein Wellenpaket mit einer Amplituden-Verteilung  $\frac{\sin(u\Delta k/2)}{u}$ . Dies Dispersion dieser Materiewelle ist:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{6.4.45}$$

Das Wellenpaket bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$  fort:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v_{\text{Teilchen}}$$
 (6.4.46)

Man erkennt, daß der Ansatz einer Materiewelle als Wellenpaket ein Teilchen wiederspiegelt, daß sich mit der Geschwindigkeit gemäß der klassischen Beschreibung fortbewegt.

Diese Beschreibung von Teilchen als Materiewellen hat allerdings drei entscheidende Nachteile bezüglich der physikalischen Interpretation:

### • imaginär

Der Ausdruck für die Materiewelle kann imaginär werden. Was bedeutet dies für das Teilchen?

### • Dispersion

Eine Materiewelle zeigt Dispersion, d.h. sie läuft in Raum und Zeit auseinander. Wie vereinbart sich das mit der Lokalisierung eines Teilchens?

## • Unteilbarkeit

Ein Elementarteilchen, wie das Elektron, sollte eigentlich unteilbar sein. Eine Welle hingegen läßt sich durch einen Strahlteiler in mehrere Anteile aufspalten.

Max Born führte in Anlehnung an die Überlegungen Einstein's zum Photonenbegriff folgende Deutung ein: das Quadrat der Wellenfunktion beschreibt die **Wahrscheinlichkeit** in einer Messung am Ort x und zum Zeitpunkt t ein Teilchen vorzufinden:  $|\Psi(x,t)|^2$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit am Ort x zum Zeitpunkt t ein Teilchen vorzufinden.

Mit dieser Definition hat die Wahrscheinlichkeits-Interpretation als neue Komponente in der Physik Einzug gefunden. Born hatte diese Schlussfolgerung in Analogie zum Photon gemacht. Die Überlagerung von Photonen ergibt das elektromagnetische Feld ( $\propto E$ ) im Raum. Bei einer Messung eines Photons wird allerdings die Intensität ( $\propto E^2$ ) gemessen. In analoger Weise werden die Teilchen durch die Wellenfunktion  $\Psi$  beschrieben, ihre Messung allerdings durch eine Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\Psi^2$ .

# 6.5 Atommodelle

# 6.5.1 Linienstrahlung

Vor der Entwicklung der Quantenphysik ist es Anfang des 20ten Jahrhundert schon gelungen die Linienemission von leuchtenden Gasen in ein einheitliches Schema zu ordnen. 1885 hat Balmer die Frequenzen der Emissions von Wasserstoff angeordnet nach:

$$h\nu = Ry\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{6.5.47}$$

n ist eine ganze Zahl mit n > 2. Ry ist die Rydberg-Konstante, wie unten beschrieben wird (Balmer hat natürlich nur eine Abhängigkeit bezüglich  $\nu$ beobachtet, da zu seiner Zeit das Planck'sche Wirkungsquantum noch nicht bekannt war). Diese Linienemission läßt sich verallgemeinern indem man ein Termschema aufstellt, wie es in Abb. 6.5.13 gezeigt ist. Alle Übergänge von Elektronen zwischen den einzelnen Niveaus führen zur Absorption oder Emission eines Photons. Je nach dem welches untere Niveau dabei involviert ist, ergibt sich eine andere so genannte Serie. Die Energie der Photonen ist:

$$h\nu = Ry\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n' < n$$
 (6.5.48)

mit n' = 1 der **Lyman-Serie** im Ultravioletten, mit n' = 2 der **Balmer-Serie** vorwiegend im Sichtbaren, mit n' = 3 der **Paschen-Serie** vorwiegend im Infraroten. Die einzelnen Linien der Serien werden mit den griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \delta$  indiziert.  $H_{\alpha}$  z.B. entspricht einer Wellenlänge von 656.28 nm.

Bei  $n \to \infty$  ist der Nullpunkt der Energieskala definiert. Negative Energiewerte kennzeichnen gebundene Zustände der Elektronen.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.5.13: Emission und Absorption von Linienstrahlung wird beschrieben als Übergang von Elektronen zwischen unterschiedlichen Niveaus, charakterisiert durch eine Hauptquantenzahl n. Bei diesem Übergang wird Energie abgegeben in Form von Photonen.

# 6.5.2 Bohr'sches Atommodell

Wie läßt sich jetzt dieses zunächst empirische Modell der Linienemission in ein Modell übertragen? Dieser Schritt ist zum ersten mal Niels Bohr 1913 gelungen. Sein Atommodell ist von folgendem Ansatz geprägt. Zunächst betrachtet er das Elektron als klassisches Teilchen, daß sich um den Atomkern auf einer Kreisbahn herum bewegt (siehe Abb. 6.5.14). Das System ist charakterisiert durch die reduzierte Masse  $\mu = \frac{m_e m_K}{m_e + m_K}$ . Das Kräftegleichgewicht auf dieses Elektron fordert:

$$\mu \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r^2} e^2 \tag{6.5.49}$$

Im klassischen Bild ist jeder Radius der Elektronenbahn erlaubt. Allerdings forderte Bohr jetzt, daß der Drehimpuls des Elektron quantisiert sein muß. Diese Forderung ist identisch zur Forderung, daß das Elektron auch durch die deBroglie-Wellenlänge beschreibbar sein muß<sup>2</sup>. Demnach muß die

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Bei der Formulierung des Bohr'schen Atommodells 1913 war die deBroglie Wellenlänge noch nicht bekannt. Die Randbedingung "quantisierter Drehimpuls" und "deBroglie-Wellenlänge" sind aber identisch.



Abbildung 6.5.14: Das Bohr'sche Atommodell entspricht einem Planetenmodell für die Elektronen um den Atomkern, bei dem die Elektronen nur feste Bahnen einnehmen können. Die Randbedingung für diese festen Bahnen ist durch die deBroglie Wellenlänge festgelegt.

deBroglie-Wellenlänge ein ganzzahliges Vielfaches des Umfanges der Elektronenbahn sein:

$$2\pi r = n\lambda_d \qquad \text{mit} \qquad \lambda_d = \frac{h}{\mu v}$$
 (6.5.50)

Diese Bedingung erlaubt nun nur diskrete Werte für die Bahnradien. Demnach wird die Geschwindigkeit des Elektrons auf seiner Bahn mit Radius rzu:

$$v = n \frac{h}{2\pi\mu r} \tag{6.5.51}$$

eingesetzt in Gl. 6.5.49 ergibt sich:

$$r = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi \mu Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0$$
(6.5.52)

 $a_0$  bezeichnet man als **Bohr'schen Atomradius**:

$$a_0 = 5.2917 \cdot 10^{-11} \mathrm{m} \tag{6.5.53}$$

Die kinetische Energie des Elektrons auf seiner Umlaufbahn ist:

$$E_{kin} = \frac{\mu}{2}v^2 = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2}E_{pot}$$
(6.5.54)

Die Gesamtenergie ergibt sich:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = -\frac{1}{2}E_{pot} + E_{pot} = \frac{1}{2}E_{pot} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$
(6.5.55)

294

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

mit r aus Gl. 6.5.52 ergibt sich:

$$E = -\underbrace{\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}}_{\text{Ry}=13.6\text{eV}} \frac{Z^2}{n^2}$$
(6.5.56)

Die Bedingung für die Umlaufbahn der Elektronen als ganzzahliges Vielfaches der deBroglie Wellenlänge ist äquivalent zu einer Quantisierung des Bahndrehimpulses:

$$L = \mu r v = \mu r n \frac{h}{2\pi\mu r} = n\hbar \tag{6.5.57}$$

Das Bohr'sche Atommodell läßt sich mit folgenden Postulaten zusammen fassen :

• Ein Elektron bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_0 \tag{6.5.58}$$

- Bei dieser Kreisbewegung strahlt es keine Leistung ab.
- Die Energie der Niveaus im Atom entspricht:

$$E = -Ry\frac{Z^2}{n^2} (6.5.59)$$

• Die Emission und Absorption von Photonen ist mit Übergängen der Elektronen zwischen den einzelnen Energieniveaus verknüpft. Die Energie der Photonen berechnet sich zu:

$$h\nu = RyZ^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2}\right) \qquad n_i < n_k \tag{6.5.60}$$

Insbesondere die Forderung Bohr's, daß sich die Elektronen strahlungslos auf Kreisbahnen bewegen, ist in starkem Widerspruch zur Elektrodynamik. Dieser Widerspruch wird erst durch die Entwicklung der Quantenmechanik aufgelöst.

Die quantisierte Energieabgabe oder -aufnahme der Atome läßt sich am **Frank-Hertz-Versuch** demonstrieren, wie in Abb. 6.5.15 skizziert. In einem gasgefüllten Gefäß werden Elektronen von einem Filament (F) zu einem

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Gitter (1) beschleunigt. Hinter dem Gitter liegt ein Gegenfeld an und die Elektronen erreichen nur dann den Kollektor, wenn sie auf der Strecke zwischen Filament und Gitter genügend Energie aufgenommen haben um das Gegenfeld zu überwinden. Die Strom-Spannungs-Charakteristik zeigt ausgeprägte Peaks: falls die Beschleunigung der Elektronen ausreicht, um durch einen Stoß mit einem Atom dessen Elektronen in ein höheres Niveau anzuregen, so verlieren sie Energie und können das Gegenfeld zwischen Gitter (1) und Kollektor (C) nicht überwinden. D.h. der Strom bricht zusammen. Die Peaks bei höheren Spannungen entstehen durch mehrere aufeinander folgende Stöße der Elektronen mit den Gasatomen.



Abbildung 6.5.15: Beim Frank-Hertz-Versuch beobachtet man charakteristische Peaks in der Strom-Spannungs-Kennlinie, da die beschleunigten Elektronen nur diskret ihre Energie an die Gasatome abgeben können.

# 6.5.3 Das Wasserstoffatom

Die endgültige Lösung zum Verhalten von Elektronen in einem Wasserstoffatom is mit den Gesetzten der Quanetnmechanik entwickelt worden. Grundlage dafür ist die so genannte Schrödingergleichung für ein Elektron im Potential des Atomkerns. Die kinetische Energie der Bewegung des Kerns und des Elektrons plus dem Wechselwirkungspotential geben folgenden Ausdruck<sup>3</sup>:

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Der Index 1,2 bei  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_2$ , bezeichnet den Laplace-Operator (zweite Ableitung) am Ort  $r_1$  bzw.  $r_2$ .

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_1\Psi - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2\Psi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\Psi = E\Psi \qquad (6.5.61)$$

Dies läßt sich umfromen in eine einfache Form der Schrödingergleichung erhält, die formal der Bewegung eines Teilchens der Masse  $\mu$  in einem kugelsymmetrischen Potential entspricht:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + V(r)\Psi = E\Psi \tag{6.5.62}$$

Die Lösung dieser Gleichung für das Wasserstoffatom ergibt eine Wellenfunktion  $\Psi$ , die je nach Energie (Schale) und Drehimpuls eine unterschiedliche Form annehmen kann, wie in Abb. 6.5.16 an dem Quadrat dieser Wellenfunktion illustriert ist.



Abbildung 6.5.16: Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen in einem Wasserstoff für unterschiedliche Schalen (Zeilen) und Drehimpulse (Spalten)

# 6.6 Anwendungen der Atomphysik

Die Besetzung eines Atomniveaus und damit der Zustand, in dem sich ein Atom befindet, wird sichtbar bei der Emission oder Absorption von Photonen. Deshalb ist das Verständnis der Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit Atomen Grundlage für alle Anwendungen und Experimente der Atomphysik.

# 6.6.1 Röntgenstrahlung

## Entstehung von Röntgenstrahlung

Beschießt man einen Festkörper mit hochenergetischen Elektronen (Beschleunigungsspannung  $U_{kV}$ ), so beobachtet man die Emission von sehr kurzwelligen Photonen mit Wellenlängen im Bereich von Å. Das Spektrum dieser Emission besteht aus einem breiten Untergrund, auf dem einzelne Emissionslinien sichtbar sind. Diese beiden Anteile erklären sich wie folgt:



**Abbildung 6.6.17:** Röntgenstrahlung wurde erstmals entdeckt beim Beschuß eines Festkörpers mit Elektronen im Energiebereich von keV.

## • Bremsstrahlung

Die Elektronen werden auf ihrer Trajektorie im Festkörper im Coloumb-Potential der Atomkerne abgelenkt. Die Beschleunigung der Ladungsträger führt zu einer Abstrahlung von Photonen. Zu kurzen Wellenlängen ist das Spektrum begrenzt, da die maximale Energie des abgestrahlten Photons  $h\nu_{max}$  gleich der kinetischen Energie  $eU_{kV}$  des einfallenden Elektrons sein muß:

$$h\nu_{max} = eU_{kV} \tag{6.6.63}$$

Dies entspricht einem Vorgang maximaler Ablenkung im Potential des Atomkerns, da die komplette kinetische Energie in Strahlungsenergie umgewandelt wird. Nachdem allerdings kleine Streuwinkel bei Coloumb-Streuung dominieren ( $\sigma \propto \sin^{-4} \vartheta/2$ ), gibt es viel mehr Ereignisse, bei denen die Ablenkung kleiner ist und damit auch die Photonenenergie  $h\nu$ . Die Intensität der Bremsstrahlung nimmt, deshalb für  $\nu < \nu_{max}$  zu, wie in Abb. 6.6.18 illustriert ist.



Abbildung 6.6.18: Vernachlässigt man die Re-absorption der Photonen in der Anode so ergibt sich eine linear Abhängigkeit der Bremsstrahlungs-Intensität von der Frequenz.

Neben der Erzeugung der Bremsstrahlung, gilt es allerdings auch zu berücksichtigen, daß die entstehenden Photonen den Festkörper auch wieder verlassen müssen. D.h. dringen die Elektronen eine Tiefe  $\Delta z$  ein, so müssen Photonen, die am Ende der Reichweite der Elektronen entstanden sind, aus dieser Tiefe wieder austreten können. Auf dem Weg zur Oberfläche können diese wieder von den Festkörperatomen re-absorbiert werden. Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{absorption}$  für diese Re-Absorption läßt sich aus der erzwungenen Schwingung eines harmonischen, gedämpften Oszillators ableiten und skaliert mit Kernladungszahl Z und Wellenlänge  $\lambda$  wie:

$$\sigma_{absorption} \propto Z^{3..4} \lambda^3 \tag{6.6.64}$$

Demnach ändert sich die spektrale Verteilung der Röntgenemission durch Re-Absorption gerade bei großen Wellenlängen oder kleinen Frequenzen, wie in Abb. 6.6.19 angedeutet. Trägt man die Röntgen-Emission als Funktion der Wellenlänge auf, so ergibt sich ein Spektrum,

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

wie es in Abb. 6.6.19 gezeigt ist. Bei  $\lambda_{min}$  (entsprechend  $\nu_{max}$ ) beginnend, nimmt die Intensität zunächst wegen der Winkelabhängigkeit der Coloumb-Streuung zu. Zu langen Wellenlängen hin nimmt die emittierte Intensität wieder ab, da die entstehende Strahlung zunehmend von dem Festkörper re-absorbiert ( $\propto \lambda^3$ ) wird.



Abbildung 6.6.19: Röntgenstrahlung besteht aus zwei Anteilen. Zunächst einem Untergrund, der durch Bremsstrahlung der Elektronen in dem Festkörper entsteht. Durch die Ablenkung der Elektronen an den positiven Atomkernen strahlt die beschleunigte Ladung ab.

### • charakteristische Röntgenstrahlung

Die charakteristische Röntgenstrahlung entsteht durch die Rekombination von Elektronen mit Löchern in inneren Schalen des Atomkerns. Elektronen, die mit einer Energie entsprechend  $eU_{kV}$  auf die Anode auftreffen und in diese eindringen, können auf ihrer Trajektorie durch den Festkörper gebundene Elektronen aus inneren Schalen herausschlagen. Hierbei werden nur Löcher in den Schalen erzeugt, bei denen die maximale Energie  $eU_{kV}$  für Ionisation ausreicht. D.h. bei schweren Elementen, wie Blei zum Beispiel, haben die Elektronen der K-Schale sehr hohe Bindungsenergien, so daß Elektronenenergien im Bereich 100 keV nötig sind. Die entstehende Röntgenstrahlung ist bei diesen Elementen entsprechend kurzwellig. Man spricht von harter **Röntgenstrahlung**.

Die erzeugten Löcher in inneren Schalen werden durch Elektronen aus äußeren Schalen aufgefüllt. Bei diesen Übergängen werden charakteristische Linien emittiert. Man bezeichnet diese Linien jeweils mit dem Buchstaben für das untere Niveau und einem griechischen Buchstaben für die einzelnen Linien, z.B.  $\mathbf{K}_{\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta}$  etc. (siehe Abb. 6.6.20).

Die Energie der Photonen läßt sich in erster Näherung aus der effektiven Kernladung ableiten, die das Elektron beim Übergang aus einer äußeren in die innere Schale "sieht". Bei der  $\mathbf{K}_{\alpha}$ -Strahlung sieht das Elektron eine Kernladung, die durch das verbleibende 1s Elektron abgeschirmt wird. Die Photonenenergie für  $\mathbf{K}_{\alpha}$  ist demnach:

$$h\nu = Ry(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$
(6.6.65)

Bei der  $\mathbf{L}_{\alpha}$ -Strahlung sieht das Elektron eine Kernladung, die durch 2 verbleibende 1s Elektronen und durch 7 verbleibende 2s und 2p Elektronen abgeschirmt wird, was einer effektiven Ladung  $Z_{eff} = Z - 9$ entspricht. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt, daß die Abschirmung nicht so perfekt ist und die Photonenenergie besser durch eine effektive Ladung  $Z_{eff} = Z - 7.4$  wiedergegeben wird. Die Photonenenergie für  $\mathbf{L}_{\alpha}$ -Strahlung ist demnach:

$$h\nu = Ry(Z - 7.4)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$
(6.6.66)



Abbildung 6.6.20: Die charakteristische Röntgenstrahlung entsteht beim Übergang von Elektronen in unbesetzte Zustände in den inneren Schalen der Atome.

Diese Abhängigkeit bezeichnet man als Moseley-Gesetz.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Anwendung der charakteristischen Röntgenstrahlung als intensive Lichtquelle hat den Nachteil, daß nur Photonen bestimmter Wellenlängen erzeugt werden können. Die Intensität des Bremsstrahlungs-Untergrundes ist in der Regel klein. Allerdings kann auch eine breitbandige, kurzwellige Lichtquelle realisiert werden in dem man Elektronen direkt in großen Ring-Beschleunigern auf hohe Energien bringt. Durch die radiale Beschleunigung auf der Kreisbahn strahlen sie die sog. **Synchroton-Strahlung** ab.

# 6.6.2 Laser

Bei einem Laser wird die induzierte Emission ausgenutzt, um Photonen gleicher Wellenlänge und Phase zu erzeugen. Es entsteht dabei eine intensive und kohärente Lichtquelle (siehe Abb. 6.6.21). Die wesentlichen drei Komponenten sind ein Lasermedium (i), in dem atomare Übergänge angeregt werden; ein Resonator (ii), bestehend aus Spiegeln, die das Lasermedium einschließen, um das Laserlicht mehrfach durch das Medium laufen zu lassen; und eine Energiequelle (iii), die für die Anregung der Atome sorgt. Das sog. **Pumpen** des oberen Laserniveaus kann durch eine externe Lichtquelle, durch eine Gasentladung oder durch chemische Reaktionen realisiert sein.



Abbildung 6.6.21: Licht-Verstärkung in einem Medium, das durch eine externe Energiequelle angeregt wird, erzeugt beim Überschreiten der Schwellwertbedingung Laserstrahlung.

## Prinzip, Verstärkung

Betrachten wir zunächst die Intensität einer Lichtwelle, die sich durch ein Medium in z-Richtung bewegt. Der Absorptions-Koeffizient  $\alpha$  beschreibt die Änderung dieser Intensität pro Länge.

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \tag{6.6.67}$$

Der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  ergibt dann:

$$\alpha = -\left[N_i - N_k \frac{g_i}{g_k}\right] \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{1}{\tau_{Atom}} + \frac{1}{c\tau_{Resonator}}$$
(6.6.68)

Die Besetzung des oberen Niveaus mindestens größer als die des unteren sein. Man spricht von **Besetzungsinversion**. In einem einfachen zwei-Niveau-System kann dieser Zustand allerdings nicht erreicht werden. Die Besetzung der Niveaus folgt der Boltzmann-Statistik:

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{g_i}{g_k} e^{-\frac{E_{ik}}{k_B T}}$$
(6.6.69)

Für  $T \to \infty$ , entsprechend maximaler Pumpleistung, bekommt man den Grenzfall  $\Delta N \to 0$ , aber keine Besetzungsinversion. Deshalb können Laser nur in Systemen realisiert werden, in denen mehrere Niveaus beteiligt sind, wie im Falle eines Rubinlasers.

Der Rubin-Laser ist ein Festkörper-Laser, bei dem ein Chrom-dotierter  $Al_2O_3$  Kristall durch eine Blitzlampe optisch gepumpt wird. Das Funktionsprinzip ist in Abb. 6.6.22 gezeigt. Das angeregte Niveau mit Energie  $E_1$  im Chromatom zerfällt strahlungslos (Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen) in einen Zustand mit Energie  $E_i$ , der eine längere Lebensdauer hat. Von diesem ausgehend findet der Laserübergang in das Grundzustands-Niveau mit Energie  $E_0$  statt.



Abbildung 6.6.22: Bei einem Rubin-Laser werden in einem Chrom dotierten Saphir-Kristall (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>:Cr) zunächst die Cr<sup>3+</sup>-Ionen angeregt, die danach strahlungslos in ein Niveau *i* zerfallen. Der induzierte Übergang von diesem Niveau ausgehend in den Grundzustand erzeugt das Laserlicht.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 6.7 Aufbau Atomkerne

Die Kernphysik nahm ihren Anfang mit den Experimenten von Rutherford, der schon in den ersten Experimenten auf eine endliche Ausdehnung des Atomkerns schloss. Die Beobachtung der Struktur der Atomkerne selbst erfolgt mit Projektilen, deren deBroglie Wellenlänge zumindest kleiner als der Kerndurchmesser ist. Deshalb war ein Fortschritt in der Kernphysik immer auch damit verbunden, schnellere Projektil-Strahlen zu erzeugen mit entsprechend kurzer Wellenlänge.

Betrachten wir zunächst den Aufbau der Atome hinsichtlich Masse- und Ladungsverteilung, Spin und magnetische Momente.

# 6.7.1 Größe Atomkern

Die Größe eines Atomkerns lässt sich auf zwei Arten definieren, nach der Verteilung der Masse und nach der Verteilung der Ladung innerhalb des Atomkerns. Diese Verteilungen werden durch Streuexperimente bestimmt, wobei die Art der Wechselwirkung festlegt, ob die Ladungs- (geladene Teilchen als Streuteilchen) oder die Masse-Verteilung (Neutronen als Streuteilchen) bestimmt wird.

Eine endliche Größe des Atomkerns wurde zuerst bei den Streuexperimenten von Rutherford beobachtet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für Streuung zwischen zwei Punktladungen ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} \tag{6.7.70}$$

Diese Streuformel konnte die Streuung von Heliumkernen an Goldfolien sehr gut wieder geben. Bei kleinem Stoßparameter bzw. großen Streuwinkeln ist die Annäherung Projektil - Atomkern besonders groß. Bei genügend hoher Energie kann das Projektil teilweise in den Atomkern eindringen und eine Abweichung von der ursprünglichen Annahme zweier Punktladungen wird sichtbar. Die gute Übereinstimmung der Rutherford'schen Streuformel bei kleinen Streuwinkeln war der Nachweis, daß die positive Ladung eines Atoms im Kern lokalisiert ist. Die Abweichung der Streuung von der Rutherford'schen Streuformel bei großen Streuwinkeln ist ein Indiz für eine endliche Ausdehnung des Atomkerns, wie in Abb. 6.7.23 verdeutlicht wird.

## Massenverteilung

Atomkerne sind aus positiven Protonen und neutralen Neutronen aufgebaut, wie weiter unten motiviert wird. Bei Streuexperimenten, die Protonen



Abbildung 6.7.23: Rutherfordstreuung.

verwenden, ist wegen der Coloumb-Wechselwirkung die Ladungs-Verteilung maßgeblich, und bei Experimenten, die Neutronen verwenden, ist allein die Masse-Verteilung maßgeblich.

Mit Neutronen als Streuteilchen läßt die Dichteverteilung im Atomkern bestimmen. Dabei stellt sich heraus, dass diese Dichte sehr *homogen* über den Atomkern verteilt ist. Diese Dichteverteilung hat die Form der Fermi-Dirac-Verteilung:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{e^{\frac{r-R_{1/2}}{a}} + 1} \tag{6.7.71}$$

mit  $R_{1/2}$  dem mittleren Radius und *a* der Dicke der Kugeloberfläche. Dies ist in Abb. 6.7.24 verdeutlicht. Die Ausdehnung ist von der Größenordnung *fm* und skaliert mit der Massenzahl des Atoms *A* wie:

$$R_k = r_0 \sqrt[3]{A}$$
  $r_0 = 1.3 \text{fm}$  (6.7.72)

Diese Skalierung ist bemerkenswert, da das Volumen des Atomkerns sich aus der Summe der Volumina der einzelnen Nukleonen ergibt. Dies ist nicht selbstverständlich, da man ja annehmen könnte, daß Kerne mit großer Nukleonenzahlen in der Summe eine stärker Bindung vermitteln und dementsprechend kleiner sind. Die Kernkraft hat allerdings nur eine kurze Reichweite und wirkt nur auf benachbarte Nukleonen.

Dies ist im Unterschied z.B. zur Gravitations-Wechselwirkung, die wegen der 1/R-Abhängigkeit eine unendliche Reichweite besitzt. Wegen der Variation der potentiellen Energie in einer homogenen Kugel steigt z.B. die Dichte

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.7.24: Massenverteilung im Atomkern.

der Erde zum Zentrum hin an. Die Kernkraft oder **starke Wechselwirkung** hat dagegen eine kurze Reichweite und das entsprechende bindende Potential der Nukleonen besitzt einen flachen Boden, wie in Abb. 6.7.25 illustriert.



**Abbildung 6.7.25:** (a) Die starke Wechselwirkung hat eine kurze Reichweite, und der Boden des Potentialtopfs ist flach. Dies bedingt eine homogene Masse-Verteilung im Atomkern. (b) Die Gravitations-Wechselwirkung hat eine unendliche Reichweite. Damit hängt die potentielle Energie vom Ort innerhalb einer homogenen Kugel mit Radius  $R_0$  ab.

# Ladungsverteilung

Verwendet man geladene Teilchen z.B. He-Kerne wie beim Rutherford-Experiment, so läßt sich in Streuexperimenten die Ladungsverteilung im Atomkern bestimmen. Damit diese aufgelöst werden kann, muß die deBroglie Wellenlänge des Projektils kleiner als die Ausdehnung des Kern sein<sup>4</sup>:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}} \tag{6.7.73}$$

Im Experiment stellt sich heraus, dass die Ladungsverteilung sehr *inhomogen* über den Atomkern verteilt ist. Dementsprechend besitzen Atomkerne nicht nur ein elektrisches Dipolmoment, sondern auch höhere Momente wie Quadrupolmoment etc. Dies ist im Gegensatz zur Atomphysik, wo das Dipolmoment in der Regel der dominante Term ist.

# 6.7.2 Innere Struktur

Um die Struktur eines Atomkerns zu beschreiben, kann man zunächst den Ansatz verwenden, daß dieser sich aus den schon bekannten Teilchen Proton und Elektron zusammensetzt. So kann ein Deuteron als doppelt schweres Wasserstoffatom (Deuterium-Kern) sich aus 2 Protonen und einem Elektron zusammen setzen. Damit wäre die Massenzahl 2 und die Ladung einfach positiv. Allerdings führt dieses Modell zu einem Gesamtspin des Deuteron von 1/2 bzw. 3/2. Die Hyperfeinstrukturaufspaltung, die man beim Deuteriumatom beobachtet, widerspricht diesen Kernspin Einstellungen. Nachdem keine Hyperfeinstrukturaufspaltung zu beobachten ist, muß das Deuteron ein Spin 0-Teilchen sein. Dies kann nur erklärt werden, wenn man annimmt, daß das Deuteron direkt aus einem Proton und einem neutralen schweren Teilchen mit Spin 1/2 besteht. Dieses Teilchen ist das **Neutron**, wie in Abb. 6.8.28 illustriert.



Abbildung 6.7.26: Mögliche innere Struktur eines Deuteron.

Die Notation der Atomkerne ist gemäß:

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Dies gilt auch für die Neutronen-Streuung zur Bestimmung der Dichteverteilung

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

 $\begin{bmatrix} A\\Z \end{bmatrix}$ (6.7.74)

Ein Element X besitzt Z Protonen und eine Nukleonenzahl A. Die Zahl der Neutronen ist A - Z. Elemente mit gleicher Protonenzahl Z aber unterschiedlicher Neutronenzahl N bezeichnet man als **Isotope**, da sie wegen ihrer gleichartigen Elektronenhülle das gleiche chemische Verhalten zeigen. Elemente mit gleicher Neutronenzahl N bezeichnet man als **Isotone**. Elemente mit gleicher Massenzahl A bezeichnet man als Isobare.

Das **Neutron** selbst wurde von Chadwick 1932 nachgewiesen. Er untersuchte den Beschuß von Beryllium mit Helium-Kernen. Man ging der Vermutung nach, daß das postulierte Elektron im Atomkern angeregte Zustände durchlaufen kann und ähnlich wie bei der Atomphysik Strahlung emittiert. Im Experiment hat man in der Tat energetische Strahlung beobachtet, die sich neutral verhielt, allerdings auch durch dicke Bleiplatten nicht abzuschirmen war. Aus diesem Grund schloss man schon frühzeitig Photonen ( $\gamma$ -Quanten) als Produkt der He-Be Reaktion aus. Die Reaktion:

$${}_{2}^{4}He + {}_{4}^{9}Be \rightarrow {}_{6}^{12}C + {}^{1}n \tag{6.7.75}$$

kann die Experimente zwanglos erklären. Das *freie* Neutron zerfällt nach der schwachen Wechselwirkung mit einer Lebensdauer von 877 s in:

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$$
 (6.7.76)

mit p dem Proton,  $e^-$  dem Elektron und  $\bar{\nu}$  dem Anti-Neutrino, wie weiter unten noch diskutiert wird.<sup>5</sup> Das entstandene hochenergetische Proton konnte man nachweisen.

#### Einschub - Spin eines Atomkerns

Die Ausrichtung des magnetischen Kernmoments wird bei der Diagnostikmethode Kernspinresonanz ausgenutzt. Betrachten wir zunächst eine Probe bestehend aus Wasserstoffatomen in einem starken äußeren Magnetfeld in z-Richtung  $B_z$ . Die z-Komponente des Kernspins ist quantisiert und das magnetische Moment präzediert mit der Larmorfrequenz um die z-Richtung. Im Mittel zeigt die makroskopische Magnetisierung der Probe in z-Richtung.

Auf die Probe wird jetzt mittels einer Spule ein Magnetfeld  $B_{rf,x}$  in x-Richtung erzeugt, wie in Abb. 6.7.2 illustriert. Diese Wechselwirkung der Magnetisierung mit dem Magnetfeld sei im folgenden klassisch betrachtet.

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Nach der Kernreaktion 6.7.76 ist die Summe der Ladungen vor und nach der Reaktion gleich, wie auch die Summe der Spins.



Anordnung für die Messung der Kernspinresonanz

Das Magnetfeld  $B_{rf,x}$  wirkt eine bestimmte Zeit t auf das Spinsystem ein. Die Richtung des Drehimpulses ändert sich durch ein äußeres Magnetfeld gemäß

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{M} \times \vec{B} \tag{6.7.77}$$

mit dem gyromagnetischen Verhältnis  $\gamma$ 

$$\vec{M} = \gamma \sum_{i} \vec{I_i} = \gamma \vec{I} \tag{6.7.78}$$

ergibt sich

$$\frac{d\dot{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} \tag{6.7.79}$$

Die stationäre Lösung dieser Gleichung in einem gleichförmigen Feld $B_z$ ergibt eine makroskopische Magnetisierung, die in z-Richtung orientiert ist.

Wirken jetzt ein zusätzliches Feld  $\vec{B}_{rf,x}$  für eine bestimmte Zeitdauer t ein, so kann die makroskopische Magnetisierung  $M_z$  in die y-Richtung gekippt werden. Ein solchen Puls bezeichnet man als **90°-Puls** (siehe Abb. 6.7.2).



Mit einem 90°-Puls läßt sich die Magnetisierung in die xy-Ebene klappen.

In der xy-Ebene präzediert jetzt die Magnetisierung mit der Larmorfrequenz. Nach dieser Erregung kann dieselbe Spule auch als Empfänger dienen (Purcell-Methode), die die präzedierende Magnetisierung wegen  $\nabla \times E = -\dot{B}$  als Spannungspuls detektiert. Dieses Signal nimmt mit der Zeit durch zwei Relaxationsprozesse ab: (i) bei der **transversalen Relaxation** läuft die Phase zwischen den einzelnen präzedierenden Spins auseinander, da die exakte Magnetfeldstärke am Ort eines jeden Spins leicht unterschiedlich ist. Die Magnetisierung in der xy-Ebene nimmt auf einer kurzen Zeitkonstante ab. (ii) bei der **longitudinalen Relaxation** führt die Wechselwirkung der präzedierenden Spins mit dem Kristallgitter der Probe zu Übergängen in den Grundzustand. D.h. die Magnetisierung dreht sich in die z-Richtung zurück. Die absoluten Zeitkonstante hängen von der lokalen Umgebung der Protonen ab.

Das zeitliche Verhalten der einzelnen Magnetisierungen sind durch die **Bloch-Gleichungen** beschrieben, die die allg. Gl. 6.7.79 und die Relaxations-Prozesse zusammenfasst:

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma \left(\vec{M} \times \vec{B}\right)_z + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \tag{6.7.80}$$

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma \left(\vec{M} \times \vec{B}\right)_x - \frac{M_x}{T_2} \tag{6.7.81}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma \left(\vec{M} \times \vec{B}\right)_y - \frac{M_y}{T_2} \tag{6.7.82}$$

Im folgenden seien drei unterschiedliche Anordnungen zur gepulsten Messung der Kernspinresonanz beschrieben:

#### • freier Zerfall der Induktion

In der einfachsten Anordnung wird zunächst ein  $90^{\circ}$  Puls eingestrahlt und die Magnetisierung in die xy-Ebene gedreht. Ein hohes Signal wird in der Erreger-

Spule detektiert, das mit der Zeit abnimmt, da die Magnetisierung durch die Relaxationsprozesse in die z-Richtung zurückkehrt.

#### • Spin-Echo-Verfahren

Nachdem die transversalen und longitudinalen Relaxationsprozesse sich überlagern, ist die alleinige Bestimmung einer einzelnen Zeitkonstante  $T_1$  oder  $T_2$  schwierig. Dies kann man auflösen durch das **Spin-Echo-Verfahren**: Zunächst wird die Magnetisierung über einen rf-Puls gemäß  $B_{rf,x}$  in die xy-Ebene in Richtung der y-Achse gelegt. Anschließend führt die Spin-Spin-Relaxation zu einem Auseinanderlaufen der Phase der einzelnen Spins. Nach einer Zeit  $\tau$  wird ein 180° Puls eingestrahlt entsprechend einem Feld  $B_{rf,y}$ , der die Spins um 180° um die y-Achse dreht. Wie man in Abb. 6.7.2 sieht, präzedieren die einzelnen Spins danach in einer Weise, die zu einer Kompensation des Phasenunterschieds führt<sup>a</sup>. Zu einer Zeit  $2\tau$  hat sich die ursprüngliche Magnetisierung wieder eingestellt und man beobachtet ein Echo. Der Unterschied in den Signalhöhen zu den Zeitpunkten t = 0 und  $t = 2\tau$  hängt jetzt nur noch von Spin-Gitter Relaxation  $T_1$  während des Zeitraums  $2\tau$  ab.



Beim Spin-Echo-Verfahren wird nach einer Zeit  $\tau$  ein 180°-Puls eingestrahlt, der die Spins um die y-Achse dreht. Damit laufen sie in der Phase zurück und ein Echo wird zum Zeitpunkt  $t = 2\tau$  beobachtet.

#### • Kernspin-Tomografie

Bei der Kernspin-Tomografie zur Untersuchung von biologischen Systemen detektiert man in der Regel Protonen. Bei einem Magnetfeld von 1 T ist die

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

notwendige rf-Frequenz zum Umklappen der Spins 42 MHz. Bei einer ausgedehnten Probe verwendet man ein magnetisches Gradientenfeld, so daß bei einer bestimmten eingestrahlten rf-Frequenz immer nur ein bestimmter Bereich in der Probe zum Resonanzsignal beiträgt. Variiert man die rf-Frequenz, so variiert man den Ort und man erhält eine abbildende Methode. Die Intensität des Signals ist ein Maß für die Protonendichte und ergibt damit einen Materialkontrast.

 $^a\rm Spins,$  die wegen eines hohen lokalen Magnetfeldes sehr weit in der Phase voraus laufen, müssen nach dem 180 °-Puls auch einen größeren Phasenunterschied wieder aufholen.

#### Kernspintomografie

Bei der Kernspintomografie werden Protonen im Körper zunächst in einem starken Magnetfeld magnetisierst. Anschließend werden diese durch einen kleinen Radiopuls aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und prädizieren anschließend um die Achse des Magnetfeldes. Diese sich ändernde räumliche Magnetisierung induziert eine Spannung in einer Empfängerspule die aufgezeichnet wird. Dieses Signal sind 42 MHz bei einem Magnetfeld von 1 T. Diese Frequenz hängt von der Stärke des Magnetfeldes ab. D.h. durch eine räumliche Variation des Magnetfeldes kann man die unterschiedlichen Frequenzen unterschiedlichen Orten zuordnen. Das Signal zerfällt in zwei Zeitkonstanten, der transversalen und der longitudinalen Relaxation. Bei der longitudinalen Relaxation klappen die einzelnen magnetischen Momente der Protonen in ihre Ausgangslage zurück. Bei der transversalen Relaxation, ändern sich die Präzessionsgeschwindigkeiten und die Protonenspins geraten aus der Phase, das Signal wird geringer. Beide Relaxationszeiten hängen von der Umgebung der Protonen ab, sei es Weichgewebe oder Knochen. Dies erzeugt den Kontrast in den Aufnahmen.



Kernspintomografie. Quelle:

# 6.8 Bindungsenergie - Atomkerne

Betrachtet man die Masse eines Atomkerns  $M_k$  und vergleicht diese mit den Massen seiner Konstituenten Proton  $m_p$  und Neutron  $m_n$ , so beobachtet man eine fehlende Masse, den sog. **Massendefekt**:

$$M_K = \sum m_p + \sum m_n - \Delta M \tag{6.8.83}$$

Nach dem Äquivalenz zwischen Energie und Masse entspricht dieser Massendefekt der Bindungsenergie  $E_B$  eines Atomkerns:

$$\Delta M = \frac{E_B}{c^2} \tag{6.8.84}$$

Trägt man diese Bindungsenergie pro Nukleon über der Nukleonenzahl A in einem Atomkern auf, so erkennt man bei kleiner Nukleonenzahl einen starken Anstieg. Bei A=57 ist das Maximum und zu größeren Atomkernen nimmt die Bindungsenergie wieder ab. Dies ist in Abb. 6.8.27 verdeutlicht.



Abbildung 6.8.27: Die Bindungsenergie pro Nukleon durchläuft mit steigender Massenzahl ein Maximum bei Eisen.

Anhand dieses Verhaltens der Bindungsenergie pro Nukleon läßt sich sofort ablesen, daß das Spalten von Atomen mit Massen größer 57 Energie frei setzt - die **Kernspaltung**, als auch das Verschmelzen von Atomkernen mit Massen kleiner 57 - der **Kernfusion**. Der Energiegewinn beim Verschmelzen sehr kleiner Atomkerne wie Wasserstoff und Helium setzt ein Vielfaches der Energie frei wie das Spalten sehr schwerer Elemente.



**Abbildung 6.8.28:** Die Neutronenzahl ist für schwere Kerne in der Regel größer als die Protonenzahl Z.

Der Verlauf der Bindungsenergie pro Nukleon läßt sich phänomenologisch aus mehreren Anteilen zusammen setzen. Dies bezeichnet man als Tröpfchenmodell.

### • Volumenenergie

Ein Anteil der Bindungsenergie ist die Volumenenergie. Die Kernkraft, die die Nukleonen zusammenhält, hat anscheinend eine sehr kurze Reichweite, da man nur die Bindungsenergie der jeweiligen benachbarten Nukleonen berücksichtigen muß. D.h. die Volumenenergie skaliert nur linear mit der Anzahl der Nukleonen  $A^6$ .

$$E_{B_1} = a_v A (6.8.85)$$

# • Oberflächenenergie

 $^6\mathrm{Bei}$ einer paarweisen Wechselwirkung aller Nukleonen untereinander müsste die Volumenenergie mit  $A^2$ skalieren.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Diese Volumenenergie muß besonders bei kleinen Werten für A um die Oberflächenenergie korrigiert werden, da auf der Oberfläche des Atomkerns die Zahl der nächsten Nachbarn geringer ist als im Zentrum des Atomkerns.

$$E_{B_2} = -a_s A^{2/3} \tag{6.8.86}$$

## • Asymmetrie-Energie

Die Asymmetrieenergie ist eine Folge davon, dass insbesondere bei großen Atomkernen die Neutronen- und Protronenzahlen ungleich sein können.

Damit wird der Fermi-Beitrag zur Asymmetrie-Energie zu

$$E_{B_3} = -a_f \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A} \tag{6.8.87}$$

### • Coulomb-Energie

Die Coloumb-Energie beschreibt die Tatsache, daß durch die Protonen im Atomkern eine homogen geladenes Volumen entsteht. Die Ladungsdichte ist:

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4\pi}{3}R^3} \tag{6.8.88}$$

mit R dem Radius des Atomkerns.



Abbildung 6.8.29: Coloumb-Energie einer homogen geladenen Kugel.

Die eingeschlossene Ladung in einer Kugel mit Radius r ist:

$$Q(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr$$
 (6.8.89)

Die Coloumb-Energie ist:

$$E_c = \frac{qQ(r)}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{6.8.90}$$

mit q der Ladung einer Schale der Dicke dr im Abstand r, wie in Abb. 6.8.29 illustriert ist.

$$q = 4\pi r^2 \rho dr$$
  $Q(r) = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$  (6.8.91)

Damit wird der Anteil der potentiellen Energie zu:

$$dE_{pot} = \frac{r}{\epsilon_0} \rho dr Q(r) \tag{6.8.92}$$

bzw. nach Integration zu

$$E_0 = \int_0^R \frac{r}{\epsilon_0} \rho Q(r) dr \propto \frac{Z^2}{R}$$
(6.8.93)

Die Coloumb-Energie ist schließlich

$$E_{B_4} = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \tag{6.8.94}$$

## • Paarungs-Energie

Als letzter Beitrag betrachten wir noch die Paarungs-Energie, die einer Korrektur entspricht je nachdem, ob die Zahl der Neutronen bzw. Protonen gerade oder ungerade ist. Die Abhängigkeit bezüglich der Gesamtzahl der Nukleonen ist rein empirisch:

$$E_{B_5} = a_p A^{-1/2} \delta \tag{6.8.95}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{gg} - \text{Kerne} \\ 0 & \text{gu/ug} - \text{Kerne} \\ -1 & \text{uu} - \text{Kerne} \end{cases}$$
(6.8.96)

 $\mathbf{gg}$  bezeichnet Kerne, in denen die Protonen- *und* die Neutronenzahl gerade ist.  $\mathbf{gu}$  bezeichnet Kerne, in denen die Protonenzahl gerade und

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

die Neutronenzahl ungerade ist.  $\mathbf{ug}$  bezeichnet Kerne, in denen die Protonenzahl ungerade und die Neutronenzahl gerade ist.  $\mathbf{uu}$  bezeichnet Kerne, in denen die Protonen- *und* die Neutronenzahl ungerade ist.

Alle Beiträge zusammen genommen ergeben die Bindungsenergie:

$$E_B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_f \frac{\left(Z - \frac{A}{2}\right)^2}{A} - a_c Z^2 A^{-1/3} + \delta a_p A^{-1/2}$$
(6.8.97)

mit  $a_v=15.84$  MeV,  $a_s=18.33$  MeV,  $a_f=93.15$  MeV,  $a_c=0.714$  MeV und  $a_p=11.2$  MeV. Dies bezeichnet man als **Bethe-Weizsäcker-Formel**, deren Verlauf in Abb. 6.8.30 dargestellt ist. Der Anstieg der Bindungsenergie pro Nukleon bei kleinen Werten für A wird durch den kleiner werdenden Anteil der OF-Energie verursacht. Der Abfall zu großen A wird durch einen wachsenden Beitrag der Coloumb-Energie bedingt<sup>7</sup>.



**Abbildung 6.8.30:** Tröpfchenmodell zur Beschreibung der Bindungsenergie pro Nukleon.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>In Abb. 6.8.30 wird die Bindungsenergie pro Nukleon aufgetragen, d.h. der Beitrag der Oberflächenenergie  $A^{2/3}$  ist als  $A^{2/3}/A = A^{-1/3}$  aufgetragen. Damit sinkt dessen relativer Anteil bei steigender Nukleonenzahl A.

# 6.9 Radioaktivität

# 6.9.1 Allgemeines

# Klassifizierung

Eine große Zahl von Isotopen sind nicht stabil und zerfallen, bis sich schließlich ein stabiles Isotop gebildet hat. Diese instabilen Kerne liegen in einer Auftragung der Neutronenzahl gegenüber der Protonenzahl in unmittelbarer Nachbarschaft der stabilen Kern (schraffierter Bereich in Abb. 6.9.31).

Man unterscheidet prinzipiell drei mögliche Zerfallsarten, die zu einer Änderung der Nukleonenzahl A, der Protonenzahl Z und der Neutronenzahl N führen (siehe Abb. 6.9.31):  $\alpha$ -Zerfall (A - 4, N - 2, Z - 2),  $\beta^-$ -Zerfall (N-1, Z+1) und  $\beta^+$ -Zerfall (N+1, Z-1). Damit ein solcher Zerfallsprozeß ablaufen kann, muß sich die Bindungsenergie pro Nukleon durch den Zerfall erhöhen. D.h. Zerfälle eines spezifischen Isotops ändern die Protonen- und Neutronenzahl immer derart, daß das gebildete Produkt immer näher an dem Bereich der Stabilität liegt. Aus diesem Grund liegen alle  $\beta^+$ ,  $\beta^-$  und  $\alpha$ -Strahler in charakteristischen Bereichen im N, Z-Diagramm wie in Abb. 6.9.31 illustriert.

## • $\alpha$ -Strahlung

Bei der  $\alpha$ -Strahlung wird ein Helium-Kern emittiert. Die Neutronenund die Protonenzahl im Kern reduziert sich um jeweils 2. Diese Art von Zerfall tritt erst bei schweren Kernen auf, da für die Bildung eines  $\alpha$ -Teilchens der Energiegewinn beim Zerfall eins Kerns (Massenzahl A) in einen Kern (Massenzahl A-4) groß genug sein muß. Erst bei hoher Protonenzahl wird die Coloumb-Energie nennenswert und die frei werdende Energie beim Zerfall groß.

# • $\beta^-$ -Strahlung

Bei der  $\beta^-$ -Strahlung wird ein Elektron frei gesetzt. Es entsteht bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton. Zusätzlich wird ein Anti-Neutrino gebildet:

$$n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}$$
 (6.9.98)

Bei der  $\beta^-$ -Strahlung erniedrigt sich die Neutronenzahl um 1 und die Protonenzahl erhöht sich um 1. Ein freies Neutron zerfällt direkt mit einer Lebensdauer von ~ 880 s.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# • $\beta^+$ -Strahlung

Bei der  $\beta^+$ -Strahlung wird ein positives Elektron (Positron) frei gesetzt bei der Umwandlung eines Protons in ein Neutron. Es entsteht zusätzlich ein Neutrino.

$$p^+ \to n + e^+ + \nu \tag{6.9.99}$$

Ein freies Proton ist stabil (Wasserstoffatom !). Es wurde versucht die Instabilität eines Protons zu beobachten. Man konnte in diesen Experimenten lediglich die untere Grenze für die Lebensdauer bestimmen mit  $10^{30}$  Jahren. D.h. der  $\beta^+$ -Zerfall findet nur innerhalb eines Atomkerns mit vielen Nukleonen statt.

Alternativ dazu kann auch in einem Atom ein Elektron der Hülle vom Kern eingefangen werden gemäß:

$$p^+ + e^- \to n + \nu$$
 (6.9.100)

Dieser Einfang eines Hüllen-Elektrons kann nur stattfinden, wenn die Wellenfunktion dieses Elektrons eine endliche Aufenthalts-Wahrscheinlichkeit am Kernort besitzt. Dies gilt nur für s-Wellenfunktionen. Das Elektron mit der höchsten Einfang-Wahrscheinlichkeit ist ein Elektron der K-Schale. Aus diesem Grund bezeichnet man diese Art des  $\beta^+$ -Zerfalls auch als **K-Einfang**. Bei der  $\beta^+$ -Strahlung erniedrigt sich die Protonenzahl um 1 und die Neutronenzahl erhöht sich um 1.

## γ-Strahlung

Nach dem  $\alpha$  und  $\beta$ -Zerfall kann zunächst ein angeregter Kern enstehen, ähnlich zu angeregten Atomen. Dieser Atomkern kann in den Grundzustand zurückkehren durch die Emission von Photonen, den  $\gamma$ -Quanten.  $\gamma$ -Strahlung tritt *nie* ohne  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Strahlung auf.

## Zerfallsgesetz

Eine radioaktive Probe zeichnet sich dadurch aus, daß sie mit der Zeit zerfällt. Die Anzahl an radioaktiven Atomkernen N ändert sich mit der Zeit wie:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -A(t) \tag{6.9.101}$$



Abbildung 6.9.31: Je nach Zerfallsart ändert sich die Protonen- bzw. Neutronenzahl in einem Atomkern

mit  $\lambda$  der **Zerfallskonstante**. A bezeichnet man als **Aktivität** (Zerfälle pro Sekunde). Löst man die Differentialgleichung 6.9.101, so bekommt man das Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
(6.9.102)

Die **Halbwertszeit**  $t_{1/2}$  bezeichnet die Zeit, bis zu der nur noch die Hälfte der Atomkerne vorliegt, wenn die **Lebensdauer**  $\tau$  beträgt.

$$t_{1/2} = \tau \ln 2 \tag{6.9.103}$$

In der Regel tritt Radioaktivität in einer ganzen Zerfallsreihe auf. D.h. ausgehend von einem Element schreiten Zerfallsprozesse soweit fort, bis ein stabiles Produkt erreicht wurde. Bei Protonenreichen Kernen führt der  $\alpha$ -Zerfall solange zu einer Erniedrigung der Kernladungszahl Z, bis ein stabiles Isotop vorliegt. Dies ist am Beispiel des Zerfalls von Plutonium in Abb. 6.9.32 gezeigt.

# Maß-Einheiten der Radioaktivität

Radioaktivität wird in unterschiedlichen Maß-Einheiten gemessen. Insbesondere für den Strahlenschutz ist die biologische Wirksamkeit der einzelnen Strahlungsarten entscheidend

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 6.9.32: Zerfallsreihe von Plutonium

# • Aktivität

Die Aktivität bezeichnet die Zerfälle pro Sekunde. Sie wird in **Becque**rel **Bq** gemessen. Die ältere Einheit sind Curie wobei 1 Curie =  $3.7 \cdot 10^{10}$  Bq sind.

Aktivität = [Becquerel] Zerfälle pro Sekunde

# • Energiefluß

Für viele Anwendungen ist nicht nur die Zerfallsrate, sondern die Energie relevant, die durch einen radioaktiven Zerfall in einer Probe deponiert wird ( $\alpha$ -Teilchen werden in Gewebe abgebremst und deponieren dort ihre Energie). Dies bezeichnet man als **Dosis** D, die in **Gray Gy** gemessen wird. 1 Gy = 1 Jkg<sup>-1</sup> (deponierte Energie pro Kilogramm der Probe).

Dosis =  $[Gray=Jkg^{-1}]$  deponierte Energie pro Kilogramm Probe

# • biologische Wirkung

Die biologische Wirkung der einzelnen Strahlungsarten ergibt sich aus der Zahl an Defekten, die ein Projektil in einer Zelle erzeugen kann. Hierzu benutzt man einen Gewichtungsfaktor Q, der für  $\gamma$ -Quanten und Elektronen Q = 1 ist, für Neutronen und Q = 2..3 für leichte Ionen und Protonen Q = 10 und für schnelle  $\alpha$ -Teilchen Q = 20. Aus der Dosis Dund dem Gewichtungsfaktor Q ergibt sich die Äquivalenzdosis H.

$$H = QD \tag{6.9.104}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Diese wird in **Sievert Sv** gemessen. Die frühere Einheit war **rem** (radioactivity equivalent man), wobei 1 rem = 0.01 Sv sind. Die mittlere Strahlenbelastung in Deutschland durch die natürliche Radioaktivität sind 2 mSv pro Jahr. Ein Röntgenaufnahme entspricht auch ungefähr einer Strahlenbelastung von 2 mSv.

 $\ddot{A}$ quivalenzdosis = [Sievert Sv = Jkg<sup>-1</sup>]biologische Schädigung durch eine gegebene Dosis

# 6.9.2 $\alpha$ -Zerfall

Beim  $\alpha$ -Zerfall wird ein Heliumkern emittiert. D.h. ein Nukleon mit Nukleonenzahl A, zerfällt in einen A - 4-Kern und ein A=4 Heliumkern. Durch diesen Prozeß können insbesondere schwere protonen-reiche Kerne ihre Energie erniedrigen. Die frei werdende Energie bezeichnet man auch als **Wärmetönung** Q der Reaktion. Stellt man eine Energiebilanz auf für E(A) und E(A-4)+E(4), so stellt man fest, daß die Bindungsenergie pro Nukleon in einem Heliumkern (gg-Kern) besonders hoch ist. D.h. von der frei werdenden Wärmetönung muß nur ein geringer Teil für die Bildung des Helium-Kerns aufgebracht werden und ein großer Teil wandelt sich in kinetische Energie um. Damit entsteht zunächst ein Heliumkern *innerhalb* des Kerns, dessen Zustand energetisch oberhalb des Vakuumniveaus liegt. Dies ist Voraussetzung für den Zerfall, wie in Abb. 6.9.33 verdeutlicht ist.

Bei der Untersuchung des  $\alpha$ -Zerfalls macht man die Beobachtung, daß die Zerfallskonstante  $\lambda$  mit der Reichweite der  $\alpha$ -Teilchen in einem Medium skaliert wie:

$$\log \lambda = A + B \log R_{\alpha} \tag{6.9.105}$$

Dies bezeichnet man als **Geiger-Nuttal-Regel**. Zusätzlich stellt man fest, daß die Reichweite bei allen Zerfällen gleich ist. Nachdem die Reichweite  $R_{\alpha} \propto E^{3/2}$  skaliert (siehe unten), ist die Energie der entstehenden  $\alpha$ -Teilchen immer gleich. Diese Beobachtung lassen sich einfach erklären.

Betrachten wir die Nukleonen in einem Atomkern. Mit einer Wahrscheinlichkeit  $W_0$  bildet sich spontan ein Heliumkern im Inneren. Dieser bewegt sich frei im Potentialtopf des Atomkerns und trifft mit einer Frequenz  $W_1$ auf die Wand des einschließenden Potentials. Diese Frequenz läßt sich aus der Ausdehnung des Kerns (fm) und der Geschwindigkeit des Heliumkerns (entsprechend der kinetischen Energie) ableiten.

Bei jedem Auftreffen hat der Heliumkern eine endliche Wahrscheinlichkeit durch die Coloumb-Barriere zu tunneln. Diese Transmissions-Wahrscheinlichkeit T berechnet sich aus:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum


Abbildung 6.9.33: Beim  $\alpha$ -Zerfall wird im Atomkern ein Heliumkern gebildet, dessen kinetische Energie so groß ist, daß er auf der Energieskala oberhalb der Vakuumniveaus liegt. Durch Tunneln durch die Coloumb-Barriere kann der Heliumkern den Bereich der starken Wechselwirkung verlassen.

$$T = T_0 e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(E_{pot}(r) - E)} dr} = T_0 e^{-G}$$
(6.9.106)

mit  $r_1$  dem Rand des Atomkerns, und  $r_2$  dem Abstand, an dem der Heliumkern den repulsiven Teil des Coloumb-Potentials erreicht (siehe Abb. 6.9.33). Den Exponenten im Exponential-Term bezeichnet man als **Gamow-Faktor** G:

$$G = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E\right)} dr$$
(6.9.107)

Schließlich bekommt man die Zerfallskonstante (= Lebensdauer<sup>-1</sup>) aus dem Produkt der Bildungswahrscheinlichkeit  $W_0$ , der Auftreffrate  $W_1$  und der Transmissionswahrscheinlichkeit T zu:

$$\frac{1}{\tau} = W_0 W_1 T \tag{6.9.108}$$

Der eindeutige Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Rate ergibt sich jetzt wie folgt. Der dominante Beitrag zur Variation der Lebensdauer ist die Transmissionswahrscheinlichkeit T. Bei einer langen Lebensdauer ist die Transmissionswahrscheinlichkeit gering. Die Breite der Tunnelbarriere ist groß, falls die Anregungsenergie im Kern zur Bildung eines Heliumkerns

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

gering ist. Da beim *elastischen* Tunneln die kinetische Energie des Teilchens erhalten bleibt, ist die kinetische Energie des ausgesendeten Heliumkerns entsprechend gering und deren Reichweite klein.

Die erfolgreiche Beschreibung des  $\alpha$ -Zerfalls als das Tunneln durch eine Coloumb-Barriere war eine frühe Bestätigung der Quantenmechanik und des Tunneleffektes.

### 6.9.3 $\beta$ -Zerfall

Beim  $\beta$ -Zerfall wandelt sich ein Neutron/Proton *innerhalb* des Atomkerns in ein Proton/Neutron um. Dies ist nur energetisch günstig, wenn ein entsprechender Neutronen- bzw. Protonen-Überschuß existiert, wie in Abb. 6.9.34 illustriert.



**Abbildung 6.9.34:**  $\beta$ -Zerfall tritt nur auf, falls die Umwandlung eines Neutron/Protons in ein Proton/Neutron energetisch günstig ist.

Beim  $\beta$ -Zerfall beobachtet man Elektronen als Reaktionsprodukte. Im Unterschied zum  $\alpha$ -Zerfall stellt man allerdings fest, daß die Elektronen *nicht* mono-energetisch sind, sondern eine breite Energieverteilung haben.

Diese Beobachtung wurde von Pauli 1930 aufgelöst, indem er das **Neutrino**<sup>8</sup> postuliert hat, das für die Energie- und Impulserhaltung sorgt und gleichzeitig erlaubt, daß die kinetische Energie des Elektrons eine kontinuierliche Verteilung hat. Nachweisen konnte man das Neutrino erst viele Jahre später, 1956.

Die vollständige Formulierung des  $\beta$ -Zerfalls lautet demnach:

 $<sup>^{8}</sup>$ Ursprünglich hatte Pauli das Teilchen Neutron getauft, was nachfolgend aber für das neutrale Nukleon selbst verwendet wurde.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$n \to p + e^- + \bar{\nu} \tag{6.9.109}$$

mit  $\bar{\nu}$  dem Antineutrino<sup>9</sup>

# 6.9.4 $\gamma$ -Zerfall

Bei  $\alpha$ - und  $\beta$ -Zerfall kann als Endprodukt ein angeregter Kern entstehen. Dieser kann sich Abregen durch Emission von Photonen, den  $\gamma$ -Quanten. D.h. der  $\gamma$ -Zerfall tritt immer nur in Zusammenhang mit dem  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Zerfall auf.

 $<sup>^{9}</sup>$ In dieser Gleichung muß das Anti-Neutrino auf der rechten Seite auftauchen, da für Kernreaktionen die Leptonenzahl erhalten bleiben muß.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

### Radiocarbon $(^{14}C)$ Methode

Mit der Radiocarbon Methode lässt sich das Alter von ehemals lebenden Objekten bestimmen. Durch die Höhenstrahlung wird fortlaufend das Isotop  $^{14}$ C gebildet das mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt.

$$^{14}\mathrm{C} \rightarrow ^{13}\mathrm{C} + \mathrm{n}$$

Dieses  ${}^{14}$ C wird fortlaufend in den lebenden Organismus eingebaut und wieder ausgeschieden, so dass sich eine feste Konzentration im Lebewesen einstellt. Stirbt dieses Lebewesen, stoppt der Einbau und die Konzentration nimmt entsprechend dem Alter des Fossils ab. Misst man jetzt die verbliebenen Konzentration in einem Fossil viele tausend Jahre später, so kann man aus dem Zerfallsgesetz das Alter bestimmen.



Datierung von historischen Artefakten an Hand des organischen Materials in den Farben. Quelle: Chicago News.

# Kapitel 7

# Wärmelehre

Bislang hatten wir die Energie von Teilchen aus dem Energiesatz der Mechanik abgeleitet. Betrachtet man sehr große Systeme zum Beispiel die Energie von Gasteilchen in einem gegebenen Volumen wird diese Einzelteilchenbetrachtung sehr umständlich. Man benötigt daher Konzepte zur Beschreibung von Vielteilchensystemen. Dies leistet die Wärmelehre in der Systeme mit makroskopischen Variablen wie Temperatur, Druck, innere Energie und Entropie beschrieben werden. Dies wird im folgenden erläutert.

# 7.1 Kinetische Gastheorie

## 7.1.1 Mikroskopische Definition der Temperatur

Die wichtigste Kenngröße um den Energieinhalt in einem Medium zu charakterisieren ist die Temperatur. Für ein Gas läßt sich diese Größe aus dem mikroskopischen Bild sich bewegender Gasatome ableiten. Hierfür betrachten wir zunächst ein **ideales Gas**, daß wie folgt definiert ist:

- Gasmoleküle als punktförmige Teilchen
- keine Wechselwirkung der Teilchen untereinander

Betrachten wir dazu einen gas-gefüllten Behälter bei dem die Gasteilchen mit den Wänden stoßen, wie in Abb. 7.1.1 illustriert ist. Wird ein Teilchen an einer Wand reflektiert, so übt es eine Kraft F auf, die einem Druck pentspricht:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p'}{\Delta t} \tag{7.1.1}$$

Mit  $\Delta p'$  der Änderung des Impulses bei dieser Reflexion. Diese Impulsänderung beim Stoß geschieht nur in Richtung normal zur Oberfläche (hier die x-Richtung). Vor dem Stoß ist der x-Anteil am Impuls  $+mv_x$ . Bei der Wand nehmen wir an, daß das Massenverhältnis sehr groß ist, so daß sich der Impuls aber nicht die Energie des Teilchens beim Stoß ändert. Demnach ist der x-Anteil des Impulses nach em elastischen Stoß  $-mv_x$ . Damit wird die Gesamtänderung des Impuls  $\Delta p'_x$  zu:

$$\Delta p'_{x} = mv_{x} - (-mv_{x}) = 2m|v_{x}| \tag{7.1.2}$$



**Abbildung 7.1.1:** Impulsübertrag eines Gasteilchen auf die Wand eines Gefäßes.

Diese Beziehung betrachtet zunächst nur ein einzelnes Teilchen. Der Gesamtdruck p wird jedoch durch die Überlagerung der elastischen Stöße aller N Teilchen in dem Behälter erzeugt. In dem Zeitintervall  $\Delta t$  treffen nur Teilchen innerhalb eines Volumens der Ausdehnung  $\Delta x$  auf die Wand :

$$\frac{N}{V}A\Delta x \tag{7.1.3}$$

Der Druck den alle Teilchen ausüben wird somit:

$$p = \frac{1}{A} \frac{N}{V} A \Delta x \frac{1}{\Delta t} 2m |v_x| \frac{1}{2}$$
(7.1.4)

Der Faktor 1/2 am Ende berücksichtigt, daß nur Teilchen, die in positiver x-Richtung fliegen, die Wand erreichen können. Mit  $\Delta x/\Delta t = v_x$  bekommt man schließlich:

$$pV = Nmv_x^2 \tag{7.1.5}$$

Für diese Betrachtung war nur die Geschwindigkeit des Gases in eine Richtung (hier die x-Richtung) maßgeblich. In einem Behälter mit N Teilchen kann jedes Teilchen jedoch eine andere Geschwindigkeit haben. Für die

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Ableitung des Druckes p wollen wir deshalb jetzt nur noch mit dem Mittelwert der Geschwindigkeit  $\langle v \rangle$  bzw. dem Mittelwert dessen Quadrats  $\langle v^2 \rangle$ argumentieren. Dieser Mittelwert setzt sich aus drei Komponenten zusammen:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \tag{7.1.6}$$

Nachdem die Bewegungsrichtungen der Gasmoleküle isotrop im Raum verteilt sind, muß gelten  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$  und damit  $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$ . Man bekommt schließlich:

$$pV = N\frac{1}{3}m\langle v^2\rangle \tag{7.1.7}$$

Dies läßt sich erweitern zu:

$$pV = \frac{2}{3}N \underbrace{\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle}_{kin. \ Energie}$$
(7.1.8)

Man erkennt, daß der Druck in einem Gasvolumen von der mittleren kinetischen Energie des Gases abhängt. Per *Definition* ist diese mittlere kinetische Energie proportional zu einer neuen Größe, der **Temperatur**.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_BT$$
(7.1.9)

Die Maßeinheit der Temperatur sind **Kelvin K**. Die Proportionalitätskonstante bezeichnet man als **Boltzmannkonstante**:

$$k_B = 1.38054 \cdot 10^{-23} J K^{-1} \tag{7.1.10}$$

Die Verknüpfung des mikroskopischen Bildes sich bewegender Gasmoleküle mit den makroskopischen Größen wie Druck und Temperatur bezeichnet man als **kinetische Gastheorie**. Mit dieser mikroskopischen Interpretation der Temperatur läßt sich auch eine Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit der Gasmoleküle und der Temperatur des Gases herstellen. So bekommt man für die mittlere Geschwindigkeit eines H<sub>2</sub> Moleküls bei 300 K einen Wert von ca. 2000 ms<sup>-1</sup>.

Damit läßt sich das Boyle-Mariott'sche Gesetz (pV = const.) neu schreiben als:

$$pV = Nk_BT \tag{7.1.11}$$

Dies bezeichnet man als allgemeine Gasgleichung.

O A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Im mikroskopischen Bild der kinetische Gastheorie bezeichnet die Temperatur denjenigen Zustand in dem durch unendliche viele Stöße ein Gleichgewicht erreicht wurde. Ein makroskopisches Analogon ist das Zusammenfügen von zwei Körpern unterschiedlicher Temperatur. Es stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei dem sich eine mittlere gleichförmige Temperatur einstellt, wie in Abb. 7.1.2 illustriert. Dies bezeichnet man als **0-ten Hauptsatz der Wärmelehre**.



**Abbildung 7.1.2:** Fügt man zwei Körper A und B unterschiedlicher Temperatur  $T_1$  und  $T_2$  zusammen, so stellt sich eine einheitliche Temperatur T ein.

Die kinetische Gastheorie und die Thermodynamik standen lange als unvereinbare Theorien gegenüber. Insbesondere Ludwig Boltzmann als Begründer der kinetischen Gastheorie konnte sich mit der thermodynamischen Beschreibung von Systemen mittels Energie, Entropie etc. nie anfreunden. Erst Anfang des 20-ten Jahrhunderts gelang es beide Beschreibungen mit Methoden der klassischen Statistik und der Quantenstatistik zu verknüpfen.

#### Vertiefung - Verteilungsfunktionen

In dem Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und der kinetischen Energie der Teilchen in einem gas-gefüllten Behälter haben wir den Vielteilchenaspekt des Problems durch die Einführung einer gemittelten Größe ( $\langle v^2 \rangle$ ) berücksichtigt. D.h. die Angabe einer Temperatur setzte notwendigerweise irgendeine Mittelung voraus! Wie würde man jedoch das Vielteilchenproblem jetzt explizit genauer behandeln?

Die exakte Verteilung der Energie und Geschwindigkeiten auf die Teilchen in einem Gasvolumen wir durch eine sog. **Verteilungsfunktion** angegeben:

$$f(\vec{r}, \vec{v})$$
 (7.1.12)

© A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit in einem Geschwindigkeitsintervall  $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$  und Volumenelement  $[\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}]$  ein Teilchen vorzufinden. Diese Verteilungsfunktion wird konstruiert indem man alle Teilchen in dem Volumen bezüglich ihres Ortes und ihrer Geschwindigkeit in die Geschwindigkeitsintervalle im sog. *Geschwindigkeitsraum* und in die Ortsintervalle im *Ortsraum* einsortiert. Da *f* eine Wahrscheinlichkeit ist, muß gelten  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v}, \vec{r}) d\vec{v} d\vec{r} = 1$ .

Auf der Basis der Kenntnis der Verteilungsfunktion läßt sich jetzt eine gemittelte Größen  $\langle a \rangle$  (z.B. mittlere kinetische Energie  $a = \frac{1}{2}mv^2$ ) für einen bestimmten Ort  $\vec{r}$  sehr einfach bestimmen mit der Vorschrift:

$$\langle a(\vec{r}) \rangle = \int af(\vec{v}, \vec{r}) d\vec{v}$$
(7.1.13)

D.h. die Information über die kinetische Energie in einem gas-gefüllten Behälter ist jetzt nicht mit einer einzigen Größe  $\langle v^2 \rangle$  gegeben, sondern durch eine ganzen Funktion  $f(\vec{r}, \vec{v})$  definiert. Aus dieser Funktion läßt sich nach obiger Vorschrift immer eine mittlere Geschwindigkeit gewinnen. Umgekehrt ist dies allerdings nicht möglich: nur auf der Basis der Kenntnis der mittleren Geschwindigkeit läßt sich keine Aussage machen über die Verteilung der Geschwindigkeiten im Geschwindigkeitsraum. Somit ist die Beschreibung des gas-gefüllten Behälters mit Verteilungsfunktionen viel leistungsfähiger als die mit gemittelten Größen wie Druck und Temperatur.

Mikroskopische Prozesse, die in einem Gas stattfinden, wie zum Beispiel Stöße der Teilchen untereinander oder die Einkopplung von Energie von aussen bestimmen die Form dieser Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum. Schüttelt man zum Beispiel einen gas-gefüllten Behälter so nehmen die Teilchen Energie durch Stöße mit der sich bewegenden Wand auf. Dies führt zu einer Änderung der Verteilungsfunktion und damit erhöht sich auch die Temperatur des Behälters entsprechend obiger Mittelungsvorschrift.

Elastische Stöße der Teilchen untereinander können allerdings auch die Verteilungsfunktion ändern, da Teilchen Energie und Impuls bei Stoßprozessen austauschen. Betrachten wir wieder den gas-gefüllten Behälter, den wir geschüttelt hatten. Für lange Zeiten nach dieser Energiezufuhr stellt sich wieder eine sehr charakteristische Verteilungsfunktion ein. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit für die Geschwindigkeit in eine bestimmte Richtung x, so bekommt man:

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{1/2mv_x^2}{k_B T}}$$
(7.1.14)

Dies ist ein herausragendes Ergebnis der kinetischen Gastheorie. Diese Verteilung bezeichnet man als Maxwell-Boltzmann-Verteilung.<sup>a</sup>

Elastische Stöße führen *immer* zu dieser Form der Geschwindigkeitsverteilung, die durch die Angabe einer Temperatur T eindeutig charakterisiert ist. Hat man zum Beispiel ein Gas, in das von außen Energie zugeführt wird, so beobachtet man nach hinlänglicher Zeit, daß sich diese Form der Verteilung einstellt; das Gas *thermalisiert*. Betrachtet man die Geschwindigkeiten im dreidimensionalen, so bekommt man:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{1/2mv^2}{k_B T}}$$
(7.1.15)

mit  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1$ . Oftmals ist nur der Betrag der Geschwindigkeit |v| von Interesse. Diesen erhält man über Integration über alle Raumrichtungen im Geschwindigkeitsraum  $4\pi v^2$ 

$$f(|v|) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{1/2mv^2}{k_B T}}$$
(7.1.16)

Diese Auftragung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist in Abb. 7.1.3 gezeigt. Die mittlere Geschwindigkeit  $\langle v \rangle$ ergibt sich zu:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) d\vec{v} \tag{7.1.17}$$

$$= \int_{0}^{\infty} 4\pi v^{2} v \left(\frac{m}{2\pi k_{B}T}\right)^{3/2} e^{-\frac{1/2mv^{2}}{k_{B}T}} dv \qquad (7.1.18)$$

$$= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \tag{7.1.19}$$



**Abbildung 7.1.3:** Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung für den Betrag der Geschwindigkeit f(|v|).

<sup>a</sup>Die genaue Ableitung dieser Verteilungsfunktion wird hier nicht weiter erläutert. Eine genaue Ableitung erfolgt prinzipiell über den Stoßterm der Boltzmanngleichung unter der Vorgabe elastischer Stöße.

# 7.1.2 Temperature inheiten und ihre Messung

Die Temperatur kann in unterschiedlichen Einheiten gemessen werden. Man kann drei Skalen unterscheiden:

• Celsius

Die gebräuchlichste Einheit ist die Celsius-Skala, die durch den Gefrierpunkt (0° C) und den Siedepunkt (100° C) von Wasser bei Normaldruck definiert ist.

• Fahrenheit

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Fahrenheit-Skala ist im Englisch-sprachigen Raum üblich. Ihr Nullpunkt ist als Schmelzpunkt einer Eis-Wasser-Aluminiumchlorid-Mischung definiert, der Punkt für 100° F sollte ursprünglich durch die Körpertemperatur festgelegt sein. 100° entsprechen allerdings 37.7° C.

Die Temperatur in Celsius  $T_c$  läßt sich aus der Temperatur Fahrenheit  $T_F$  berechnen nach:

$$T_c = \frac{5}{9} \left( T_F[^{\circ}F] - 32 \right) \left[^{\circ}C \right]$$
(7.1.20)

• Kelvin

Die Kelvin-Skala entspricht einer *absoluten* Temperatur-Skala. Gemäß der allgemeinen Gasgleichung ist der Fall "kinetische Energie gleich Null" definiert. Nachdem es keine negativen Energien geben kann, wird dieser Punkt als T=0 K definiert. Der Nullpunkt der Celsius-Skala entspricht dann 273.15 K.

Die Messung von Temperaturen kann auf vielerlei Weise erfolgen. Im wesentlichen wird dabei die Änderung der Eigenschaften eines Festkörpers oder Gases in Abhängigkeit von der Temperatur betrachtet.



Abbildung 7.1.4: Änderung des Gleichgewichtsabstandes mit der Temperatur eines Festkörpers.

Bei endlicher Temperatur schwingen die Atome eines Festkörpers um ihre Ruhelage. In erster Näherung ist das bindenden Potential parabel-förmig um das Minimum. D.h. der Mittelwert der Atomabstände ändert sich nicht, auch wenn die kinetische Energie, sprich die Temperatur, erhöht wird. Allerdings ist dies nur eine Näherung. Bei großen Schwingungsamplituden wird die Abweichung des Potentials von der Parabelform sichtbar. Der Mittelwert der Atomabstände vergrößert sich. Für den makroskopischen Festkörper bedeutet diese eine Ausdehnung. Die Ausdehnung selbst ist von der Form dieses Potentials abhängig und damit für jeden Festkörper anders.

Die Längenänderung läßt sich schreiben als:

$$L(T_c) = L(0)(1 + \alpha T_c)$$
(7.1.21)

 $\alpha$  bezeichnet man als **Ausdehnungskoeffizienten**.Der Index *c* der Temperatur T<sub>c</sub> bezieht sich auf die Celsius-Skala. Durch die Messung einer temperaturabhängigen Längenänderung hat man automatisch eine Temperatur-Messmethode geschaffen. Bekanntestes Beispiel ist das Quecksilberthermometer bei dem die Ausdehnung von Quecksilber bestimmt wird.

Auch die Ausdehnung von Gasen kann als Maß für die Temperatur verwendet werden. Je nachdem ob man die Ausdehnung bei konstantem Druck oder die Druckerhöhung bei konstantem Volumen betrachtet, läßt sich dies eindeutig mit einer Temperatur verknüpfen.

$$V(T_c) = V_0(1 + \gamma_v T_c)$$
(7.1.22)

$$p(T_c) = p_0(1 + \gamma_p T_c) \tag{7.1.23}$$

Die Temperaturskala wird durch fundamentale temperatur-abhängige Eigenschaften von Materialien geeicht. Hierbei wird oftmals der sog. **Tripelpunkt** gewählt. Wählt man eine bestimmte Kombination von Druck und Temperatur so ist am Tripelpunkt die Koexistenz von den drei Phasen *fest*, *flüssig* und *gasförmig* eines Materials möglich.

# 7.2 Wärme

#### 7.2.1 Wärmemenge

Bei Zufuhr von Energie in ein Medium erhöht sich dessen Temperatur um einen Betrag  $\Delta T$ . Die Energiemenge, die diese Temperaturerhöhung bewirkt bezeichnet man als **Wärme** oder **Wärmemenge**  $\Delta Q$ . Wärme- und Temperaturänderung sind per Definition verknüpft wie:

$$\Delta Q = cM\Delta T \tag{7.2.1}$$

Die quantitative Temperaturerhöhung bei vorgegebener Energiezufuhr und Masse des Körpers hängt von einer Proportionalitätskonstante c ab. Diese bezeichnet man als **spezifische Wärme**. Bei Medien mit hoher spezifischer Wärme führt eine hohe Energiezufuhr nur zu einer kleinen Temperaturerhöhung. D.h. diese Medien können Energie gut speichern.

Die Maßeinheit für die Wärmemenge ist die **Kalorie**. Eine Kalorie ist dabei definiert als diejenige Energiemenge, die nötig ist, um ein Gramm Wasser von 14.5 °C auf 15.5 °C zu erwärmen (1 Kilokalorie entsprechen der Erwärmung von 1 kg Wasser). Wie groß ist allerdings die Energie in J die dafür notwendig ist. Dies läßt sich wie folgt bestimmen.

#### • Umwandlung von Arbeit in Wärme

Betrachten wir dazu ein Gewicht in einem Wasserbecken, das über ein Seil an einer Feder aufgehängt wird. Dieses Seil läuft über eine Kupfer-Rolle. Dreht man diese Rolle, so übt sie eine Reibungskraft  $F_R$  auf das Seil aus und hebt das Gewicht an. Ist die Reibungskraft so groß, daß das Gewicht in der Schwebe gehalten wird, so ist die Reibungskraft gleich der Gewichtskraft  $F_R = mg$ . Dabei wird die gegen die Reibung geleistete Arbeit komplett in Wärme umgewandelt. Die Arbeit bei NUmdrehungen ist  $\Delta W = F_R \cdot Weg$ . Damit wird die Wärmemenge  $\Delta Q_1$ zu:

$$\Delta W = mg \underbrace{2\pi rN}_{Weg} = \Delta Q_1 \tag{7.2.2}$$

mit r dem Radius der Rolle. Diese Wärmemenge führt zu einer Temperaturerhöhung des Systems, die gegeben ist aus der spezifischen Wärme der Kupfer-Rolle  $c_{Cu}$  und des umgebenden Wassers  $c_W$ .

$$\Delta Q_1 = (c_W M_W + c_{Cu} M_{Cu}) \,\Delta T_1 \tag{7.2.3}$$



Abbildung 7.2.1: Umwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme.

In einem zweiten Versuch messen wir allein die Temperaturerhöhung  $\Delta T_2$  der Kupfer-Rolle *ohne* das umgebenden Wasser und wir erhalten:

$$\Delta Q_2 = \Delta W = c_{Cu} M_{Cu} \Delta T_2 \tag{7.2.4}$$

Die Wärmemenge, die *nur* vom Wasser aufgenommen wird ist demnach:

$$\Delta Q = c_W M_W \Delta T_1 = \left(1 - \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right) \Delta W \tag{7.2.5}$$

Jetzt drehen wir die Rolle N Umdrehungen bis sich die Temperatur um 1 Grad erhöht hat. Mit bekannter spezifischer Wärme von Wasser und bekannter Masse des Wassers läßt sich aus der zugeführten Energie dann die Umrechnung von Kalorie in Joule durchführen. Man bekommt den Zusammenhang: 1 cal = 4.1868 J.

#### • Mischungskalorimeter

Falls die spezifische Wärme einer Substanz unbekannt ist, kann man sie über einen Wärmeübertrag bestimmen. Hierzu verwendet man ein **Mischungskalorimeter** (siehe Abb. 7.2.2): betrachten wir einen wassergefüllten thermisch isolierten Behälter (Dewar). Erwärmen wir einen Körper auf die Temperatur  $T_2$  und setzen wir ihn in ein Wasserbecken der Temperatur  $T_1$ , so stellt sich eine Mischtemperatur  $T_M$  ein. Diese Mischtemperatur hängt vom Wärmeausgleich zwischen Körper und Wasser ab. Die abgegebene Wärmemenge des Körpers muß gleich der aufgenommen Wärmemenge des Wassers sein:

$$\Delta Q_K = -\Delta Q_W \tag{7.2.6}$$

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 7.2.2: Mischungskalorimeter.

Die transportierten Wärmemengen sind proportional zur jeweiligen Temperaturänderung:

$$c_K M_K (T_M - T_2) = -c_W M_W (T_M - T_1)$$
(7.2.7)

Dies läßt sich nach der spezifischen Wärme des Körpers auflösen zu:

$$c_K = \frac{M_W c_W \left(T_M - T_1\right)}{M_K \left(T_2 - T_M\right)} \tag{7.2.8}$$

## 7.2.2 Die spezifische Wärmekapazität

Die spezifische Wärme läßt sich auch auf eine bestimmte Stoffmenge beziehen. Betrachten wir dazu eine Teilchenmenge von einem **Mol**:

$$N_A = 1Mol = 6.022 \cdot 10^{23}$$
 Teilchen (7.2.9)

 $N_A$  bezeichnet man als **Avogadro-Konstante**. Die Avogadro-Konstante ist so gewählt, daß das Atomgewicht bzw. Molekülgewicht einer Substanz multipliziert mit der Avogadro-Konstante genau die Massenzahl des Atoms oder Moleküls in Gramm ergibt: 1 Mol Kohlenstoffatome sind genau 12 Gramm, da ein Kohlenstoffatom die Massenzahl 12 amu hat (siehe Periodensystem); 1 Mol Wasser hat eine Masse von 18 Gramm, da H<sub>2</sub>O aus 2 Wasserstoffatomen (Massenzahl 1 amu) und einem Sauerstoffatom (Massenzahl 16 amu) besteht. Diese Beziehung zwischen der Stoffmenge und dessen Gewicht entsprechen der Atomhypothese der Chemie. Mehrere Gesetze der Chemie können damit erklärt werden:

Gesetz von Dalton:

Die Gewichtsverhältnisse zweier sich zu verschiedenen chemischen Verbindungen vereinigender Elemente stehen im Verhältnis einfacher ganzer Zahlen zueinander.

Gesetz von Richter:

Elemente vereinigen sich stets im Verhältnis bestimmter Verbindungsgewichte, sogenannter Äquivalentgewichte oder ganzzahliger Vielfacher dieser Gewichte zu chemischen Bindungen.

#### Atomhypothese von Dalton:

Alle Stoffe sind nicht unendliche teilbar, sondern aus kleinsten, chemisch nicht weiter zerlegbaren Teilchen (Atomen) aufgebaut.

Diese Beziehungen gelten nicht nur für die Reaktion von Feststoffen miteinander, sondern auch für die Reaktion von Gasen untereinander. Hierbei vergleicht man die Volumina, die bei einer Reaktion sich ändern. Man macht die Beobachtung:

#### Gesetz von Gay-Lussac:

Das Volumenverhältnis gasförmiger Stoffe, die bei chemischen Reaktionen vollständig miteinander reagieren, läßt sich bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck durch einfache ganze Zahlen wiedergeben.

Daraus folgerte Avogadro, daß:

#### Gesetz von Avogadro:

Gleiche Volumina idealer Gase enthalten bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl von Molekülen.

Hierbei entspricht bei einem idealen Gas bei 1 bar und T=0  $^{\circ}$ :

$$1 \quad Mol = 22.4 \quad l \tag{7.2.10}$$

Wenn wir die allgemeine Gasgleichung auf die Menge ${\cal N}_A$  beziehen bekommen wir:

$$pV_M = N_A k_B T = RT \tag{7.2.11}$$

Das Produkt aus Avogadro-Konstante und Boltzmannkonstante bezeichnet mans als allgemeine Gaskonstante R:

$$R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1} \text{K}^{-1}$$
(7.2.12)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Die Wärmemenge, die einem Mol Teilchen zugeführt wird, wird dann durch die molare Wärmekapazität C oder spezifische Wärmekapazität charakterisiert:

$$\Delta Q = \underbrace{cM_{Mol}}_{Q} \Delta T \qquad (7.2.13)$$

C molare Waermekapazitaet

Im folgenden wollen wir die spezifische Wärmekapazität einiger Substanzen genauer diskutieren.

#### • Wärmekapazität eines idealen Gases, konstantes Volumen

Bei der Zufuhr von Wärme in ein Gas bei konstantem Volumen erhöht sich nur die Energie der Gasteilchen. Diese sog. **innere Energie** Ueines Gases setzt sich aus der kinetischen Energie (Bewegung der Gasmoleküle) und der potentiellen Energie (Wechselwirkung der Gasmoleküle) zusammen. Bei der Zufuhr von Wärme in ein *ideales Gas* bei konstanten Volumen erhöht sich allerdings *nur* die Bewegungsenergie der Gasteilchen, da keine Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander existiert.

Diese innere Energie U eines idealen Gases kann in unterschiedlichen Arten der Bewegung eines Gasmoleküls gegeben sein, da für die Bewegung mehrere Freiheitsgrade existieren. Die zugeführte Energie verteilt sich gleichmäßig auf die Freiheitsgrade in dem System, wobei ein Gasteilchen pro Freiheitsgrad eine Energie von  $\frac{1}{2}k_BT$  speichern kann. Diese Freiheitsgrade f lassen sich wie folgt abzählen.

- Translation: Jede Bewegung in eine Raumrichtung entspricht einem Freiheitsgrad. D.h. bei drei Raumrichtung ist f = 3
- Schwingung: Jede mögliche Schwingung eines Moleküls entspricht 2 Freiheitsgraden, da die Energie sowohl in der kinetischen Energie der Schwingung selbst als auch in der gespeicherten potentiellen Energie der ausgelenkten Atome bestehen kann. Somit besitzen sehr große Moleküle sehr viele Freiheitsgrade und können demnach sehr viel Energie speichern.
- Rotation: Jede Rotation um eine eindeutige Achse eines Gasteilchen entspricht einem Freiheitsgrad. Ein einzelnes Atom besitzt f = 0, da es im quantenmechanischen Sinne ein symmetrischer Körper mit kleinem Trägheitsmoment ist, der bei typischen Temperaturen wie Raumtemperatur keine Rotationsenergie speichern kann. Ein zweit-atomiges Molekül hat 2 Freiheitsgrade, da es um

zwei Achsen senkrecht zur Achse des Molekül rotieren kann. Die Rotation um die Molekülachse selbst kann in obigem Sinne wegen des kleinen Trägheitsmomentes wiederum keine Rotationsenergie speichern.

Ob allerdings in all diesen Freiheitsgraden Energie gespeichert werden kann oder nicht hängt von dem betrachteten System ab. Bei einem Festkörper zum Beispiel sitzen die einzelnen Atomen auf festen Gitterplätzen und können somit keine Energie in der Translation speichern. Auch eine Rotation ist nicht möglich.

Im allgemeinen bekommen wir somit für die innere Energie in Abhängigkeit von der Zahl f der Freiheitsgrade:

$$U = \frac{1}{2}fNk_BT \tag{7.2.14}$$

Dies bezeichnet man als **Gleichverteilungssatz**. Daraus folgt direkt die molare Wärmekapazität falls das Volumen bei einer Energiezufuhr konstant bleibt. Die spezifische Wärmekapazität ist gegeben als die Änderung dieser inneren Energie pro Temperaturintervall.

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V = \frac{1}{2} f N_A k_B \tag{7.2.15}$$

Bei einem ein-atomigen Gas können weder Rotation noch Schwingung vorliegen, womit nur die drei Freiheitsgrade der Translation verbleiben. Wir bekommen:

$$U = \frac{3}{2}N_A k_B T = \frac{3}{2}RT$$
 (7.2.16)

bzw.

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V = \frac{3}{2}R \tag{7.2.17}$$

#### Vertiefung - Wärmekapazität eines idealen Gases konstanter Druck

Führt man die Energiezufuhr allerdings bei konstantem Druck durch, so wird bei einer Volumenänderung Arbeit gegen den Umgebungsdruck geleistet (siehe Abb. 7.2.3). Diese Arbeit gegen einen Druck p über eine Fläche A ist Kraft F mal Weg dx bzw.:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$F\Delta x = pA\Delta x = p\Delta V \tag{7.2.18}$$

Demnach resultiert die zugeführte Energie  $\Delta Q$  nicht nur in einer Temperaturänderung  $\Delta T$  sondern auch in einer Volumenänderung. Vergleicht man dies mit der Änderung bei konstantem Volumen so fällt die Temperaturänderung  $\Delta T$  bei gleichem  $\Delta Q$  hier geringer aus, da zusätzlich noch Arbeit gegen den Druck p geleistet werden muß:

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p \Delta V \tag{7.2.19}$$

mit der allgemeinen Gasgleichung bekommt man:

$$pV = N_A k_B T \tag{7.2.20}$$

Unter Berücksichtigung der Volumenänderung um  $\Delta V$ ergibt sich daraus:

$$p(V + \Delta V) = N_A k_B (T + \Delta T) \tag{7.2.21}$$

Damit ist  $\Delta Q$ 

$$\Delta Q = \underbrace{(C_V + N_A k_B)}_{C_p} \Delta T \tag{7.2.22}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$C_p = C_V + N_A k_B \tag{7.2.23}$$

Die Wärmekapazitäten bei konstantem Druck 7.2.23 und konstantem Volumen 7.2.15 lassen sich noch verknüpfen mit dem sogenannten Adiabaten-Koeffizienten  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \tag{7.2.24}$$

Für ein ein-atomiges ideales Gas ergibt sich mit f=3 ein Adiabatenkoeffizient von  $\gamma=\frac{5}{3}.$ 

#### • spezifische Wärme bei Phasenübergängen

Ein Sonderfall tritt auf, wenn das Medium bei Energiezufuhr mehrere Phasen durchlaufen kann. Betrachtet man zum Beispiel die Erwärmung von Eis, so ist die Geschwindigkeit der Temperaturerhöhung umgekehrt proportional zur Wärmekapazität. Ist diese Wärmekapazität klein, so ist die Temperaturerhöhung groß. Ab 0° tritt Schmelzen ein, und die Temperatur erhöht sich *nicht* weiter, da jetzt die Energie für eine Phasenumwandlung aufgewendet werden muß, der **Schmelzwärme**. Erst nachdem das Eis *komplett* geschmolzen ist, beginnt die Temperatur sich wieder zu erhöhen. Ein Maß für diese Erhöhung ist allerdings jetzt die Wärmekapazität der flüssigen Phase. Diese ist höher, da jetzt die





Moleküle noch zusätzlich rotieren können. Demnach ist der Temperaturanstieg geringer. Am Siedepunkt, muß zunächst die Verdampfungswärme aufgewendet werden, d.h. die Temperatur bleibt wieder konstant bis die ganze Flüssigkeit verdampft ist. Erst danach erhöht sich die Temperatur weiter. Auch hier ist die Steigung der Temperaturerhöhung wieder geringer, da für die Gasmoleküle jetzt zusätzlich noch die Möglichkeit der freien Bewegung in den drei Raumrichtungen (Translation) besteht. Dies ist in Abb. 7.2.4 veranschaulicht.



Abbildung 7.2.4: Temperaturänderung bei konstanter Energiezufuhr in Wasser.

Die aufgewendete Wärmenenge für einen Phasenübergang bezeichnet man auch als **latente Wärme**.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

# 7.3 Wärmetransport

Viele technische Anwendungen basieren auf dem Transport von Wärme. Hierbei unterscheidet man Wärmeleitung, als den direkten Transport von Energie, und der Konvektion als den Transport von Energie mittels Massentransport. Hinzu kommt noch Transport von Wärme durch Wärmestrahlung.

# 7.3.1 Wärmeleitung

Bei der Wärmeleitung betrachten wir eine Wärmequelle, die an einem Ende eines Mediums eine Temperatur  $T_1$  erzeugt, die über das Medium abgeleitet wird und das andere Ende auf die Temperatur  $T_2$  bringt (siehe Abb. 7.3.1). Die Energiemenge, die pro Zeit transportiert wird, ist dann per Definition:



Abbildung 7.3.1: Wärmeleitung.

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \tag{7.3.1}$$

mit A der Querschnittsfläche.  $\lambda$  bezeichnet man als **Wärmeleitfähigkeit** [Jm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>].

Diese Gleichung 7.3.1 läßt sich umstellen und wir bekommen einen Ausdruck für die Wärmeleitung  $\lambda$  von:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \frac{dx}{dt} \frac{1}{A} \tag{7.3.2}$$

Man erkennt, daß die Wärmeleitung im wesentlichen von zwei Größen des Mediums abhängt. Der Term  $\Delta Q/\Delta T$  entspricht der spezifischen Wärmekapazität der Substanz. Der Term dx/dt entspricht der Geschwindigkeit in der sich diese Anregung in dem Medium ausbreiten kann.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

#### 7.3.2 Wärmestrahlung

Schließlich haben wir noch Wärmetransport durch Strahlung zu betrachten. Ein Körper bei einer gegebenen Temperatur strahlt Energie ab entsprechend:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = EFd\Omega \tag{7.3.3}$$

mit E dem sog. **Emissionsvermögen**, F der Fläche und  $d\Omega$  dem Raumwinkel (d.h. in welche Richtungen kann der Körper abstrahlen). In umgekehrter Weise kann der Körper auch Energie durch Strahlung aufnehmen gemäß seinem sog. **Absorptionsvermögen** A. Es zeigt sich daß das Emissions- und Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers nicht unabhängig voneinander ist, sondern ein festes Verhältnis hat, das *nur* noch von der Temperatur abhängt:

$$f(T) = \frac{E}{A} \tag{7.3.4}$$

Dieses Verhältnis ist allein eine Funktion der Temperatur hängt aber nicht von dem Material ab. Das bedeutet, dass ein Körper, der sehr gut absorbiert (großes A) auch gleichzeitig ein sehr guter Emitter (großes E) von Wärmestrahlung ist. Das Optimum kann durch einen sogenannten **schwar zen Strahler** realisiert werden. Hierbei verwendet man zum Beispiel einen Hohlraum aus Metall, der so gebaut ist, daß einfallendes Licht dort nicht mehr hinaus dringen kann. Erhöht man jetzt die Temperatur dieses Hohlraums auf Rotglut, so beobachtet man, daß der vormals schwärzeste Bereich auch derjenige ist, der am besten die Strahlung emittiert.

Durch diese Verkopplung von Emissions- und Absorptionsvermögen ist es nahe liegend einen Wärmestrahler schwarz zu färben, um seine Abstrahlung zu optimieren.

Ein schwarzer Körper bei einer Temperatur T emittiert Wärmestrahlung mit einer charakteristischen Verteilung bezüglich der Wellenlänge, die **Planck'sche Verteilung**, wie sie in Abb. 7.3.3 gezeigt ist. Zu höheren Temperaturen verschiebt sich das Maximum zu kürzeren Wellenlängen (z.B. rot glühend zu blau glühend)

Die abgestrahlte Leistung folgt einer charakteristischen Abhängigkeit gemäß dem **Stefan-Boltzmann-Gesetz**:

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma F T^4 \tag{7.3.5}$$

mit F der emittierenden Fläche und  $\sigma = 5.67051 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$  der Stefan-Boltzmann-Konstante. Diese starke Temperaturabhängigkeit bedingt,

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 7.3.2:** Ein Körper bei einer Temperatur T besitzt eine weiße und ein geschwärzte Oberfläche. Ihm Gegenüber befinden sich zwei Körper, die durch die Wärmestrahlung auf  $T_1$  bzw.  $T_2$  erwärmt werden.



Abbildung 7.3.3: Spektrale Verteilung der emittierten Leistung.

daß gerade bei hohen Temperaturen die Wärmeverluste durch Strahlung dominieren.

# 7.3.3 Wärmestrom

Der sog. Wärmestrom I ist die Energiemenge, die pro Zeit transportiert wird. Dies ist direkt

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \tag{7.3.6}$$

Diese Gleichung läßt sich umstellen zu:



Abbildung 7.3.4: Serien- und Parallelschaltung von Wärmewiderständen.

wobei das Minuszeichen mit einer entsprechenden Definition von  $\Delta T$  weggelassen werden kann. Man erkennt, daß ein Temperaturunterschied einen Wärmestrom antreibt, der um so größer ist je kleiner die Größe R wird. Diese Größe R bezeichnet man als **Wärmewiderstand**:

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda A} \tag{7.3.8}$$

Betrachtet man jetzt den Wärmetransport durch eine gegebene Struktur, z.B. die Isolation einer Hausmauer, so kann man unterschiedliche Fälle diskutieren (siehe Abb. 7.3.4).

#### • Serienschaltung

In einer Serienschaltung muß der Wärmestrom eine Abfolge von unterschiedlichen Materialien nacheinander durchdringen. Jede dieser

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Schichten n habe einen eigenen Wärmewiderstand  $R_n$ . Nachdem der Wärmestrom in der Struktur erhalten sein muß, bekommt man:

$$I = \frac{1}{R_1} \Delta T_1 = \frac{1}{R_2} \Delta T_2 = \dots = \frac{1}{R_N} \Delta T_N$$
(7.3.9)

 $\operatorname{mit}$ 

$$I = \frac{1}{R_1} \left( T_1 - T_2 \right) = \frac{1}{R_2} \left( T_2 - T_3 \right)$$
(7.3.10)

Der Vergleich von zwei aufeinander folgenden Termen zeigt:

$$(T_1 - T_3) = I (R_1 + R_2) \tag{7.3.11}$$

Für N Schichten bekommen wir mit dem Ausdruck von

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \dots + R_N$$
(7.3.12)

Einen Wärmestrom von:

$$I = \frac{1}{R} \left( T_1 - T_N \right) \tag{7.3.13}$$

D.h. bei der Serienschaltung addieren sich die einzelnen Wärmewiderstände zu einem Gesamtwiderstand R.

#### • Parallelschaltung

Bei einer Parallelschaltung von Wärmewiderständen, d.h. Isolationen nebeneinander (Beispiel, Wand und Fenster) addieren sich die Wärmeströme durch die einzelnen Schichten, die Temperaturdifferenz bleibt allerdings gleich. Wir bekommen somit:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N = \frac{1}{R_1} (T_1 - T_2) + \frac{1}{R_2} (T_1 - T_2) + \dots + \frac{1}{R_N} (T_1 - T_2)$$
(7.3.14)

Auch dies läßt sich verkürzt darstellen als:

$$I = \frac{1}{R} \left( T_1 - T_2 \right) \tag{7.3.15}$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$
(7.3.16)

Man erkennt, daß bei einer Parallelschaltung der Gesamtwiderstand sich aus der Addition der Kehrwerte der einzelnen Wärmewiderstände ergibt.

Oftmals wird für bestimmte Gegenstände auch der sog. k-Wert angegeben. Dieser beschreibt den Wärmetransport für ein Medium mit gegebener Dicke d. Der k-Wert definiert sich als:

$$k = \frac{\lambda}{d} \tag{7.3.17}$$

Damit wird z.B. der Energietransport durch eine 3 mm starke Glasscheibe beschrieben. Hat man eine Abfolge von einzelnen Schichten, die den Wärmetransport limitieren, so berechnet sich der gesamte k-Wert zu:

$$\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$
(7.3.18)

Bei der Wärmekonvektion findet zusätzlich noch ein Massentransport statt. Diese Art des Wärmetransports ist in der Regel sehr viel effizienter als der Transport durch Wärmeleitung. Klassische Beispiele sind hier die Konvektion als wesentlicher Mechanismus um die Raumluft in einem Gebäude umzuwälzen oder die Konvektion der geschmolzenen Gesteinsmassen im Innern der Erde.

Das Zusammenspiel aus Wärmeleitung und Konvektion läßt sich am Beispiel der Fensterverglasung erläutern (siehe Abb. 7.3.5). Eine einfache 4 mm Glasscheibe hat einen k-Wert von 200 Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>. Allerdings werden die angrenzenden Luftschichten durch die Oberflächenreibung in ihrem Strömungsverhalten behindert. Aus diesem Grund erhöhen sich die Isolationseigenschaften durch zwei 1 cm starke Luftschichten auf den beiden Seiten der Fensterscheiben, da deren Wärmeleitfähigkeit sehr viel geringer als die von Glas sind. Nach Gl. 7.3.18, ergibt dies zusammen einen k-Wert von 5..6 Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>. Bei einer Doppelverglasung, verwendet man zwei planparallele Glasscheiben, um eine isolierende Gasschicht (in der Regel Argon) zu schaffen. Diese Gasschicht darf nicht zu dick sein, da sonst die Konvektion im Inneren des Doppelfenster, die isolierende Wirkung zerstören würde (siehe Abb. 7.3.5). D.h. ein Optimum der Gasschichtdicke liegt bei ca. 1 cm. Damit reduziert sich bei einem Doppelfenster der k-Wert auf

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

3 Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>. Ein wesentlicher Vorteil entsteht dann noch durch den Einsatz von Wärmeschutzbeschichtungen. Durch entsprechende Anti-Reflexions-Beschichtungen für die Wärmestrahlung aus dem Innenraum, erniedrigt sich der k-Wert auf 0.6 Wm<sup>-2</sup>K<sup>-1</sup>. Solch niedrige k-Werte sind identisch zu k-Werten von isolierten Steinmauern.



Abbildung 7.3.5: Bei Fenstern wird in der Regel eine Doppelverglasung verwendet. Dies reduziert signifikant die Wärmeleitung, da die Konvektion im Innern unterbunden ist.

# 7.4 Hauptsätze der Wärmelehre

Wie in der Mechanik so gibt es auch in der Wärmelehre entsprechende Erhaltungssätze. Diese bezeichnet man als Hauptsätze der Thermodynamik.

# 7.4.1 Zustandsgrößen, Zustandsänderungen

Die Thermodynamik beschreibt ein System mit einem Satz von Zustandsgrößen. Man unterscheidet **intensive** und **extensive** Zustandsgrößen. Diese unterscheiden sich hinsichtlich des Resultats bei dem Zusammenfügen von zwei Systemen.

- **intensiv:** Intensive Zustandsgrößen sind zum Beispiel der Druck oder die Temperatur in einem System. Fügt man zwei Systeme zusammen, so stellt sich für das neue Gesamtsystem ein *Mittelwert* für Temperatur und Druck ein.
- extensiv: Extensive Zustandsgrößen sind zum Beispiel Volumen, Energie und Teilchenzahl. Fügt man zwei Systeme zusammen, so stellt sich für das neue Gesamtsystem die Summe der Zustandsgrößen der einzelnen Systeme ein.

In der Wärmelehre betrachtet man ein System, das unterschiedliche Zustände einnehmen kann. Im Falle eines idealen Gases entspricht jeder dieser Zustände einer neuen Realisierung der Zustandsgrößen p, V, N, T, die der Zustandsgleichung  $pV = Nk_BT$  genügen müssen. Ändert sich der Zustand allerdings von einer Bedingung  $p_1, T_1, V_1, N_1$  zu  $p_2, T_2, V_2, N_2$  kommt es auf die Art der Prozessführung und das betrachtete System an, welcher neuer Zustand sich einstellt. So kann zum Beispiel eine Verkleinerung des Volumens je nach Prozessführung zu einer anderen Kombination von p und T führen (siehe isotherme bzw. adiabatische Kompression unten).

Zunächst unterscheidet man:

- offene Systeme: bei einem offenen System kann ein Prozeß Wärme und/oder Teilchen mit der Umgebung austauschen. Typischer Fall ist ein Wärmebad, bei dem Energie in das System hinein- oder hinausfliessen muß, damit eine konstante Temperatur herrscht, die durch das Wärmebad vorgegeben ist.
- geschlossene Systeme: bei einem geschlossenen System findet kein Austausch mit der Umgebung statt. Dies ist der Fall für isolierte Prozesse.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Man kann zudem grundsätzlich zwei Arten der Zustandsänderung unterscheiden:

- reversibel: bei einer reversiblen Zustandsänderung gelangt man wieder an den Ausgangspunkt bezüglich p, T, V, N zurück, wenn man den Prozeß rückwärts ablaufen läßt. Die meisten Ableitungen der Wärmelehre zur Beschreibung von Kreisprozessen gehen zunächst von reversiblen Zustandsänderungen aus.
- **irreversibel:** Zustandsänderungen in realen Prozessen sind allerdings oftmals irreversibel, da Reibung überwunden werden muß oder bei einer Volumenausdehnung ein Kolben beschleunigt wird. Dies führt jeweils zu einem Verlust an Energie, die durch eine Umkehrung des Prozesses nicht mehr zurückgewonnen werden kann.

Für die Änderung von Zustandsgrößen verwendet man folgende Bezeichnungen je nach Prozessführung, wie in Abb. 7.4.1 illustriert:



Abbildung 7.4.1: Zustandsänderungen in einem idealen Gas.

- isotherm, T=const.: bei einem isothermen Prozeß ändert sich die Temperatur nicht. Dies ist in der Regel der Fall, wenn eine Reaktion in einem Wärmebad der Temperatur T stattfindet.
- isobar, p=const.: bei einem isobaren Prozeß ändert sich der Druck nicht. Dies ist in der Regel der Fall bei chemischen Reaktionen die offen bei Umgebungsdruck ablaufen. Hierbei muß der Prozeß in der Regel gegen den Umgebungsdruck Arbeit leisten oder kann von außen Arbeit aufnehmen.

- isochor, V=const.: bei einem isochoren Prozeß ändert sich das Volumen nicht. Dies in der Regel der Fall, wenn wir einen Druckbehälter betrachten. Ein isochorer Prozeß kann auch gleichzeitig ein isothermer Prozeß sein, wenn dieser Druckbehälter ein Wärmebad darstellt.
- adiabatisch, Q=const.: Bei einem adiabatischen Prozeß kann sich die Wärmemenge in dem System nicht ändern. Dies ist in der Regel der Fall für isolierte Systeme bei denen kein *Temperaturausgleich* stattfinden kann. Diese Isolation von der Umgebung kann auch durch schnelle Zustandsänderungen realisiert sein, da auf kurzen Zeitskalen ein System auch keine Möglichkeit hat seine Temperatur mit der Umgebung auszugleichen. Wenn sich die Wärmemenge nicht ändert ist der Prozeß automatisch auch isentrop (S=const.).

### 7.4.2 Der erste Hauptsatz

Bei der Ableitung der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck hatten wir die Beziehung:

$$dQ = dU + pdV \tag{7.4.1}$$

abgeleitet, d.h. die zugeführte Wärme fließt in eine Erhöhung der inneren Energie und eine Expansion des Gases. Mit der Arbeit  $\Delta W = -p\Delta V$  können wir dies schreiben zu:

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W \tag{7.4.2}$$

Dies läßt sich umschrieben zu:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \tag{7.4.3}$$

Dies bezeichnet man als **ersten Hauptsatz**. Die Erhöhung der inneren Energie  $\Delta U$  in einem System kann durch Zufuhr von Wärme  $\Delta Q$  oder durch von außen zugeführte Arbeit  $\Delta W$  erfolgen (siehe Experiment von Joule Abb. 7.4.2). Dieser erste Hauptsatz ist eine Erfahrungstatsache und kann nicht aus grundlegenderen Prinzipien abgeleitet werden.

Die zugeführte Arbeit für ein ideales Gas bei einer Volumenänderung  $\Delta V$  ist:

$$\Delta W = F \Delta x = -p \Delta \Delta x = -p \Delta V \tag{7.4.4}$$

D.h. komprimieren wir ein Gas, so ist  $\Delta V < 0$  und damit  $\Delta W > 0$ . D.h. wir stecken Energie in das System hinein. Damit bekommen wir als Energiesatz für ein ideales Gas:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 7.4.2: Umwandlung von Arbeit in Wärme im Experiment von Joule. Ein Gewicht gibt eine potentielle Energie  $mg\Delta z$  ab und treibt entweder einen Rührer (links) oder einen Generator (Umwandlungseffizienz 100%) an, der eine Glühwendel aufheizt (rechts). In beiden Fällen beobachtet man die gleiche Temperaturerhöhung  $\Delta T$  einer Flüssigkeit.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W = \Delta Q - pdV \tag{7.4.5}$$

Der erste Hauptsatz soll jetzt für einige Zustandsänderungen genauer beschrieben werden, wie in Abb. 7.4.3 illustriert.



Abbildung 7.4.3: Prozesse im pV-Diagramm eines idealen Gases.

• V = const., isochor

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der das Volumen konstant bleibt. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \tag{7.4.6}$$

da V = const. und

$$dQ = dU = C_V dT \tag{7.4.7}$$

gilt, bekommen wir:

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V \tag{7.4.8}$$

D.h. die zugeführte Wärme wird komplett in innere Energie umgewandelt.

#### • p = const., isobar

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der der Druck konstant bleibt. Dies ist ein häufiger Fall bei Reaktionen der Chemie. Dort ist der Umgebungsdruck konstant und ein Gas muß sich z.B. beim Ablaufen der chemischen Reaktion gegenüber dem Luftdruck der Umgebung ausdehnen. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \tag{7.4.9}$$

Die Wärmemenge ist

$$dQ = dU + pdV = C_p dT \tag{7.4.10}$$

Zur einfacheren Beschreibung führen wir eine neue GrößeHein, die Enthalpie:

$$H = U + pV \tag{7.4.11}$$

Leitet man die Enthalpie nach der Produktregel ab, so ergibt sich:

$$dH = dU + pdV + dpV \tag{7.4.12}$$

bzw. nach dem Einsetzen von Gl. 7.4.10

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$dH = dQ + Vdp \tag{7.4.13}$$

Da dp = 0 gilt, ist für die isobare Zustandsänderung dQ = dH, d.h. man bekommt:

$$C_p = \left. \frac{dH}{dT} \right|_p \tag{7.4.14}$$

Somit beschreibt die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck die Änderung der Enthalpie mit der Temperatur während die spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen die Änderung der inneren Energie mit der Temperatur ausdrückt.

Für die Betrachtung eines gegebenen Systems muß man somit die passende Formulierung der Energie- bzw. Enthalpieerhaltung wählen: bei isochoren Systemen stellt sich ein Minimum der inneren Energie ein dU = 0, während man bei isobaren Systemen ein Minimum der Entalpie dH = 0 bekommt.

#### • T = const., isotherm

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der die Temperatur konstant bleibt. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \tag{7.4.15}$$

Bei einem idealen Gas hängt die innere Energie nur von der Temperatur ab:

$$U = \frac{1}{2} f N_A k_B T \tag{7.4.16}$$

Da somit bei isothermen Prozessen dU = 0 gelten muß, bekommen wir:

$$dQ = pdV \tag{7.4.17}$$

d.h. Wärme wird vollständig in Arbeit umgewandelt. Mit

$$pV = Nk_BT \tag{7.4.18}$$

bekommt man schließlich.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

$$pV = \text{const.} \tag{7.4.19}$$

Dies ist wieder das Gesetz von Boyle-Mariott.

#### • dQ = 0, adiabatisch

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der *keine* Wärme ausgetauscht wird. Dieser Vorgang kommt häufig vor, da viele Systeme ihren Zustand schnell ändern, so daß der Wärmetransport auf dieser Skala sehr ineffizient erfolgt und damit eine Angleichung von Temperaturen nicht stattfindet. Typisches Beispiel ist die adiabatische Kompression eines Gases in einer Luftpumpe. Hier ist der Kontakt zur Umgebung so gering, daß das expandierende/komprimierte Gas keine Möglichkeit zum Temperaturausgleich hat. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \tag{7.4.20}$$

mit dQ = 0 bekommen wir:

$$dU = C_V dT = -pdV \tag{7.4.21}$$

mit dem idealen Gasgesetz  $(pV = Nk_BT)$  läßt sich dies umschreiben zu:

$$C_V \frac{dT}{T} = -N_A k_B \frac{dV}{V} \tag{7.4.22}$$

Integriert man auf beiden Seiten bekommen wir:

$$C_V \ln T = -N_A k_B \ln V + \text{const.} \tag{7.4.23}$$

bzw:

$$\ln\left(T^{C_V}V^{N_Ak_B}\right) = \text{const.} \tag{7.4.24}$$

Aus der Ableitung der spezifischen Wärmekapazität eines idealen Gases wissen wir, daß gelten muß:

$$N_A k_B = C_p - C_V (7.4.25)$$

mit dem Adiabatenkoeffizienten  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  bekommen wir dadurch:

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 7.4.4: Vergleich einer isothermen und einer adiabatischen Zustandsänderung.

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \tag{7.4.26}$$

bzw:

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \tag{7.4.27}$$

Für ein ein-atomiges ideales Gas war  $\gamma = 5/3$ . D.h. die Zustandskurven für adiabatische Zustandsänderungen in Abb. 7.4.4 laufen wie  $p \propto V^{-5/3}$ . Damit laufen sie steiler als die isothermen Zustandskurven  $(p \propto V^{-1})$ 

Vergleicht man zwei Punkte im pV-Diagramm, so kann man zwei Gleichungen benutzen, um den bekannten Zustand  $p_1, T_1$  und  $V_1$  in einen neuen Zustand bei  $p_2, T_2$  und  $V_2$  zu überführen. Es sei z.B. vorgegeben, daß ein Gas von einem Volumen  $V_1$  zu einem Volumen  $V_2$  komprimiert wird.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \tag{7.4.28}$$

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \tag{7.4.29}$$

D.h. aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die Unbekannten  $p_2$  und  $T_2$  berechnen.

Der Adiabatenkoeffizient läßt sich in dem *Experiment von Ruechard* bestimmen. Hierzu verwendet man ein Gasreservoir bei einem Druck

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

p, das durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen wird (siehe Abb. 7.4.5). Dieser Kolben möge mit einer Frequenz  $\omega_0$  um seine Gleichgewichtslage schwingen. Bei diesem Schwingen komprimiert er das Gas.



Abbildung 7.4.5: Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten  $\gamma$ : Ein Kolben der Masse m wird in Schwingung versetzt und komprimiert dabei ein Volumen V adiabatisch.

Im Gleichgewicht herrsche ein Druck  $p_0$  außen und ein Druck p innen. Der Druck im Innern des Behälters entsteht durch die Addition der Gewichtskraft des Kolben und des Außendruckes. Mit einer Masse mdes Kolbens (Radius r) ergibt sich:

$$p = p_0 + \frac{mg}{\pi r^2} \tag{7.4.30}$$

Durch eine Änderung des Druckes um dp beginnt der Kolben sich um seine Gleichgewichtslage (x = 0) zu bewegen. Die rückstellende Kraft ist dF = Adp:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \pi r^2 dp \tag{7.4.31}$$

Diese Bewegung erfolgt so schnell, daß die Zustandsänderung adiabatisch erfolgt. D.h. es gilt:

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \quad p(V) = \text{const.} \cdot V^{-\gamma}$$
 (7.4.32)

360

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum
Diese Gleichung abgeleitet nach dem Volumen ergibt:

$$dp = -\frac{p\gamma}{V}dV \tag{7.4.33}$$

Mit der Volumenänderung  $dV = r^2 \pi x$  ergibt sich schließlich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\pi r^2 \frac{p\gamma}{V} r^2 \pi x \tag{7.4.34}$$

Dies ist der Form nach eine Schwingungsgleichung mit der Eigenfrequenz:

$$\omega_0^2 = \gamma \frac{\pi^2 r^4 p}{mV} \tag{7.4.35}$$

Mit bekanntem r, m, p und V läßt sich somit aus der Messung der Frequenz  $\omega_0$  der Adiabatenkoeffizient  $\gamma$  ermitteln.

# 7.4.3 Der zweite Hauptsatz

Die Energieerhaltung beschreibt nur die Gesamtenergie eines Systems als zusammengesetzt aus der Wärmemenge und der an dem System geleisteten Arbeit. Doch wie läßt sich Wärme in Arbeit umwandeln? Der Energieinhalt in Form von Wärme und Arbeit ist von unterschiedlichem Charakter, da Wärme Energie in der ungeordneten Bewegung der Gasteilchen speichert, während die Arbeit (zum Beispiel die Bewegung eines Gasstempels) jeweils nur in *eine Richtung* Arbeit hinein steckt bzw. aus dem System abruft. Dies ist in Abb. 7.4.6 veranschaulicht.



Abbildung 7.4.6: Unterschied zwischen Wärme und Arbeit.

Im mikroskopischen Sinn ist die Temperatur auch immer Ausdruck für das Maß an *Unordnung* in einem System. Bewegen sich allerdings alle Teilchen in eine Richtung, so ist dieser Zustand der *Ordnung* gleichbedeutend mit einer sehr *niedrigen* Temperatur. D.h. möchte man ein System in einen geordneten Zustand überführen, so muß es gekühlt werden. Beispiel hierfür ist die Strahlkühlung bei Beschleunigern, die bewirkt daß alle Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit in die gleiche Richtung fliegen.

Abb. 7.4.5 verdeutlicht auch, daß die Umwandlung von Arbeit in Wärme  $(Ordnung \rightarrow Unordnung)$  zu 100 % erfolgen kann: zugeführte Arbeit durch einen Kolben erhöht die Geschwindigkeit der Teilchen in eine Richtung. Durch die Stöße der Teilchen untereinander wird die Geschwindigkeitsverteilung allerdings schnell räumlich isotrop und man hat einen Zustand mit definierter Temperatur T erreicht. Die umgekehrte Umwandlung von Wärme in Arbeit (*Unordnung*  $\rightarrow$  *Ordnung*) kann allerdings nicht so ohne weiteres ablaufen, da das Antreiben eines Kolbens nur eine Richtung der isotropen Geschwindigkeitsverteilung beeinflußt. Diese zunächst anschauliche Ableitung wollen wir im folgenden genauer begründen und quantifizieren.

## Der Carnot-Prozeß

Um die Effizienz der Umwandlung von Wärme in Arbeit zu diskutieren, betrachten wir einen Kreisprozeß, der im pV-Diagramm eines idealen Gases wieder zum Ausgangspunkt zurück führt. Solche Kreisprozeße sind in Abb. 7.4.7 veranschaulicht. Je nach "Laufrichtung" kann man zwei Arten unterscheiden:

• "Wärmepumpe"

Bei einer Wärmepumpe wird einer Maschine Arbeit zugeführt, die eine Wärmemenge  $\Delta Q$  einem kälteren Reservoir entnimmt und danach an ein wärmeres Reservoir wieder abgibt (Beispiel Kühlschrank). Bei einer Wärmepumpe ist die Laufrichtung des Kreisprozesses *links* herum, da das Integral  $\Delta W = -\int p dV$  positiv wird. D.h. die Maschine muß Arbeit *aufnehmen*.

### • "Wärmekraftmaschine"

Bei einer Wärmekraftmaschine wird einer Maschine Wärme zugeführt, die diese in Arbeit umwandelt (Beispiel Dampfmaschine). Bei einer Wärmekraftmaschine ist die Laufrichtung des Kreisprozesses *rechts* herum, da das Integral  $\Delta W = -\int p dV$  negativ wird. D.h. die Maschine gibt Arbeit *ab*.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



Abbildung 7.4.7: Kreisprozeß, der sich aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten zusammensetzt: Erfolgt der Prozeßablauf im Uhrzeigersinn erhält man eine Wärmekraftmaschine; gegen den Uhrzeigersinn erhält man eine Wärmepumpe.

Die kontinuierliche Umwandlung von Wärme in Arbeit kann in vielen Kreisprozessen realisiert werden. Beim sog. **Carnot'schen** Kreisprozeß erzielt man allerdings den maximalen Wirkungsgrad. Bei diesem Prozeß durchläuft ein ideales Gas eine zyklische Zustandsänderung bestehen aus einer isothermen und adiabatischen Expansion und einer isothermen und adiabatischen Kompression. Der Prozeß durchläuft zyklisch 4 Punkte im pV-Diagramm  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . Die Temperatur der wärmeren Isotherme sei  $T_1$ , die der kälteren  $T_2$ . Die Volumina an den 4 Punkten sind jeweils  $V_1, V_2,$  $V_3$  und  $V_4$ . Der Druck stellt sich immer gemäß der Zustandsgleichung eines idealen Gases ein. Um den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses zu bestimmen müssen wir die Wärmemengen und die Arbeit in jedem dieser Teilschritte bilanzieren:

Der Wirkungsgrad dieser Umwandlung ist das Verhältnis aus geleisteter Arbeit  $\Delta W$  und der zugeführten Wärme  $\Delta Q_1$ . Mit Gl. ?? bekommt man somit:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1 \tag{7.4.36}$$

Man erkennt, daß die Umwandlung von Wärme in Arbeit *nicht vollständig* erfolgt. Der Wirkungsgrad dieser Umwandlung ist kleiner als 1, da ein Teil der hinein gesteckten Wärme als Wärmemenge  $\Delta Q_2$  and ie Umgebung abgegeben wird und dabei die Arbeit  $\Delta W_{34}$  verbraucht.

#### Wirkungsgrad thermodynamischer Maschinen

Der Carnot-Wirkungsgrad ist der maximale Wirkungsgrad den eine thermodynamische Maschine erreichen kann. Die Umwandlung von Wärme in Arbeit erfolgt im Schritt  $1 \rightarrow 2$  zu 100 %! Die Umwandlung von Wärme in Arbeit in den Schritten  $2 \rightarrow 3$  und  $4 \rightarrow 1$  hebt sich gegenseitig wieder auf. Allerdings muß der Kreisprozeß geschlossen werden, was einen Schritt  $3 \rightarrow 4$  bedingt. Die Notwendigkeit dieses Schrittes bewirkt einen Wirkungsgrad der kleiner als 1 ist, da bei dieser Kompression wieder Wärme an die Umgebung abgegeben wird, D.h. das System muß einen Teil seiner Arbeit, die es in Schritt  $1 \rightarrow 2$  abgegeben kann, verwenden, um wieder zu Punkt 4 zu gelangen wobei es allerdings die Wärme  $\Delta Q_2$  an die Umgebung abgibt. Die geleistete Arbeit ist dabei die Fläche unter der Kurve  $3 \rightarrow 4$ . Somit ist es am günstigsten, wenn die Temperatur  $T_2$  bei dieser isothermen Kompression möglichst gering ist.

Der Wirkungsgrad ist zudem größer je größer der Temperaturunterschied der einzelnen Reservoirs ist. Dies hat große Bedeutung für den Betrieb von Kraftwerken zur Stromerzeugung in denen oftmals ein Medium erhitzt wird (Wasser), das über eine Turbine Arbeit leisten muß. Je höher der Temperaturunterschied des Mediums beim Kreisprozeß ist, desto effizienter ist die Konversion von Wärme in mechanische Arbeit. Der Wirkungsgrad einiger Prozesse der Energiewandlung sind in Tab. 7.1 gezeigt: (i) Bei einem Kohlekraftwerk wird zunächst Kohle verfeuert und damit Wasser erhitzt. Über Dampf wird dann eine Turbine bzw. ein Generator zur Elektrizitätserzeugung angetrieben. Der Wirkungsgrad ist hier durch den Temperaturunterschied des Dampfes beim Durchgang durch die Turbine gegeben. Dies begrenzt den Wirkungsgrad auf unter 50%. Dies kann kompensiert werden durch Fernwärmenutzung, was einer Vermarktung der sonst verlorenen Wärmemenge  $\Delta Q_2$  entspricht. (ii) In einem Gaskraftwerk wird mit den heißen Gasen, die bei der Verbrennung von Erdgas entstehen, eine Turbine direkt abgetrieben. Die Verbrennungstemperaturen können dabei bis 1400°C erreichen was einen hohen Wirkungsgrad bedingt.

Läßt man den Prozeß in umgekehrter Reihenfolge ablaufen, so bekommt man den **inversen Carnot-Prozeß**. Eine solche Maschine bezeichnet man als **Wärmepumpe**, da sie einem Reservoir die Wärmemenge  $\Delta Q_2$  bei  $T_2$ entzieht und sie an ein wärmeres Reservoir bei  $T_1$  als Wärmemenge  $\Delta Q_1$ wieder abgibt. Dazu ist die Arbeit  $\Delta W$  nötig wie zum Beispiel bei der adiabatische Kompression des Mediums. Der Wirkungsgrad läßt sich analog zu

C A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Kraftwerk	Umwandlung	Wirkungsgrad
Gaskraftwerk	$\mathrm{chemisch} \to \mathrm{elektrisch}$	60%
Kohlekraftwerk	chemisch $\rightarrow$ elektrisch	25-45%
Kohlekraftwerk	chemisch $\rightarrow$ elektr., therm.	85%
(+Fernwärme)		
Wasserkraftwerk	mechanisch $\rightarrow$ elektrisch	90%
Dampfmaschine	$\mathrm{chemisch} \to \mathrm{mechanisch}$	10%
Dieselmotor	$\mathrm{chemisch} \to \mathrm{mechanisch}$	65%
Ottomotor	$\mathrm{chemisch} \to \mathrm{mechanisch}$	40%
Generator	elektrisch $\rightarrow$ mechanisch	90%

**Tabelle 7.1:** Wirkungsgrade einiger thermodynamischer Maschinen bzw.anderer Methoden der Energiewandlung

dem einer Wärmekraftmaschine ableiten. Man definiert hier allerdings eine sog. Leistungszahl  $\epsilon_{WP}$ , die größer als eins ist, zu:

$$\epsilon_{WP} = \frac{1}{\eta} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$
(7.4.37)

Wärme fließt immer von dem heißeren zum kälteren Gegenstand

Dies bezeichnet man als zweiten Hauptsatz der Wärmelehre.

Alternativ zur Formulierung der Leistungszahl einer Wärmepumpe kann man auch eine Leistungszahl  $\epsilon_{KM}$  einer Kältemaschine definieren. Diese bezieht sich auf die entnommene Wärmemenge eines kälteren Reservoirs  $\Delta Q_2$ :

$$\epsilon_{KM} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \tag{7.4.38}$$

# 7.5 Reale Gase

# 7.5.1 van der Waals Zustandsgleichung

Bei der Betrachtung von thermodynamischen Prozessen haben wir bislang immer ideale Gase betrachtet. Bei *realen* Gasen müssen wir allerdings berücksichtigen, daß die Atome oder Moleküle ein *Eigenvolumen* haben bzw. daß eine *anziehende Wechselwirkung* zwischen ihnen besteht. Für ein ideales Gas galt:

$$pV = Nk_BT \tag{7.5.1}$$

Bei einem realen Gas, das wir uns als Atome/Moleküle mit endlichem Radius r vorstellen, ist der Mindestabstand zwischen zwei Atomen 2r. D.h. das Volumen das den Gasatomen zur Verfügung gestellt werden kann kann nicht beliebig klein werden. Mit dem Molvolumen  $V_M$  für  $N_A$  Teilchen ergibt sich:

$$V_{M,\text{reales Gas}} \to V_M - b$$
 (7.5.2)

mit b einer gasart-abhängigen festen Konstanten.

Neben dem Volumen ändert sich allerdings bei einem realen Gas auch der Druck durch die anziehende Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander. Betrachten wir ein Gasteilchen A, das mit den Gasteilchen B der Umgebung eine anziehende Wechselwirkung eingeht. Im Inneren des Mediums heben sich die Kräfte auf A auf, da alle Richtungen gleichberechtigt sind. Liegt das Gasteilchen A allerdings an der Oberfläche, so entsteht eine Nettokraft, die das Teilchen nach innen anzieht. Dies ist gleichbedeutend mit einem äußeren Druck. Dieser sog. **Binnendruck** ist proportional zur Anzahl der Gasteilchen B und zur Anzahl der Gasteilchen A an der Oberfläche. Beides skaliert mit der Dichte der Gasteilchen N/V in dem Volumen. Damit läßt sich der Druck neu formulieren als:

$$p_{\text{reales Gas}} \to p + c \left(\frac{N_A}{V}\right)^2 = p + \frac{a}{V^2}$$
 (7.5.3)

mit einer gasart-abhängigen Konstante c bzw. a. Das endliche Volumen und der Binnendruck in einem realen Gas führen zur sog. **van-der Waals Zustandsgleichung** eines realen Gases (für ein Mol, das ein Molvolumen  $V_M$  einnimmt):

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT$$
(7.5.4)

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

Bezieht man alles auf eine Anzahl von n Mol eines Gases in einem Volumen V, so bekommt man:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \tag{7.5.5}$$

# 7.5.2 Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht

Die Zustandsgleichung eines realen Gases 7.5.4 läßt sich in einem pV-Diagramm darstellen. Man erkennt, daß für sehr hohe Temperaturen die Form der Kurven für konstante Temperatur ähnlich zu den Kurven eines idealen Gases sind. Bei Temperaturen unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_K$  durchlaufen die Kurven allerdings Minima und Maxima! Verfolgt man eine dieser Kurven so bekommt man Bereiche in denen  $\frac{dp}{dV} > 0$  ist. Dies bedeutet, daß der Druck bei einer Vergrößerung des Volumens zunimmt. Dies ist unphysikalisch!

Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man berücksichtigt, das bei einem realen Gas **Phasenübergänge** auftreten können. Bei einem Phasenübergang findet eine Umwandlung von *fest* nach *flüssig* nach *gasförmig* statt. Betrachten wir dazu ein System, das sich bei einer Temperatur  $T < T_K$  befindet. Bei einem niedrigen Druck und einem großen Volumen verhält sich das System wie ein ideales Gas. Wenn wir den Punkt A in Abb. 7.5.1 erreichen, folgt das System *nicht* mehr der Kurve wie von Gl. 7.5.4 vorgegeben, sondern der Geraden ABC. Auf dieser Geraden bleibt der Druck konstant und die Verkleinerung des Volumens, führt zu einer Phasenumwandlung von *gasförmig* nach *flüssig*. Am Punkt A bilden sich die ersten Tröpfchen und an Punkt C, steigt der Druck bei einer weiteren Volumenverkleinerung sehr stark an, da Flüssigkeiten kaum kompressibel sind, d.h. eine kleine Volumenverkleinerung führt zu einer sehr starken Druckerhöhung.

Wie findet man jetzt die Gerade ABC? Dabei hilft folgende Uberlegung: die Fläche unter der Kurve p(V) entspricht der geleisteten Arbeit bei der Zustandsänderung (wegen  $\Delta W = -pdV$ ). Bei den unterschiedlichen Möglichkeiten für eine Zustandsänderung von A nach C, soll jeweils die gleiche Arbeit geleistet werden. D.h. die Flächen unter der Gerade ABC und der Kurve nach Gl. 7.5.4 müssen gleich sein! Dies entspricht der graphischen Auftragung in Abb. 7.5.1. Man bezeichnet dies als **Maxwell-Konstruktion**.

Betrachten wir jetzt ein System, das sich in dem Übergangsbereich zwischen *gasförmig* und *flüssig* befindet. Betrachten wir das System bei konstanter Temperatur, so stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei der die Rate der Moleküle, die verdampfen, und die Rate der Moleküle, die kondensieren,



**Abbildung 7.5.1:** Nach der van-der Waals Zustandsgleichung eines realen Gases, findet unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_K$  eine Phasenumwandlung statt. Im Bereich *flüssig-gasförmig* findet eine Koexistenz der flüssigen und der gasförmigen Phase statt.

gleich ist (siehe Abb. 7.5.2). Den Druck, der sich dann einstellt, bezeichnet man als **Sättigungsdampfdruck**  $p_S$ . Dieser Druck  $p_S$  steigt mit der Temperatur an, da auch die Verdampfungsrate ansteigt. Durch den hohen Druck in dem Behälter und erhöht sich wiederum auch die Rate mit der die Teilchen wieder auf die Oberflächen treffen ( $\propto$  Teilchendichte  $\times$  mittlere Geschwindigkeit) und kondensieren können. Ein neues Gleichgewicht entsteht.

Ein schönes Beispiel für diese Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewichte ist ein Geysir. Bei einem Geysir wird an dem unteren Ende eines wassergefüllten Schlotes die Wassersäule erhitzt (siehe Abb. 7.5.3). Durch den hohen Druck  $(p_1)$  erwärmt sich das Wasser bis auf über 100° bis sich Gasblasen bilden. Wenn diese Gasblasen in dem engen Schlot emporsteigen, kann es passieren, daß sie den Druck am unteren Ende der Wassersäule etwas verringern  $(p_1 \rightarrow p_0)$ . Durch die Druckerniedrigung kann nun mehr Wasser den Phasenübergang schlagartig vollziehen und eine große Menge an Dampf wird freigesetzt. Der sich dabei aufbauende Druck führt zu einem explosionsartigen Ausstoßen der Flüssigkeitssäule.

# 7.5.3 Phasendiagramme

Neben dem Phasenübergang gasförmig-flüssig, kann noch der Phasenübergang flüssig-fest stattfinden. In einem pT-Diagramm kann

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 7.5.2:** In einem System im Gleichgewicht stellt sich der Sättigungsdampfdruck ein, bei dem genauso viele Teilchen kondensieren (1) wie verdunsten (2).

mann wieder die einzelnen Bereiche unterscheiden. Die Kurve des Sättigungsdampfdruckes  $p_s$  wird beschrieben durch eine Lösung der Gleichung:

$$\Delta Q_{Verdampfung} = \frac{dp_s}{dT} T \left( V_{gasf\"{o}rmig} - V_{fl\"{u}ssig} \right)$$
(7.5.6)

Für den Phasenübergang *fest-flüssig*, dem Schmelzen läßt sich wieder die Clausius-Clapeyron-Gleichung bemühen:

$$\Delta Q_{Schmelzen} = \frac{dp_S}{dT} T \left( V_{fl\ddot{u}ssig} - V_{fest} \right)$$
(7.5.7)

Die latente Wärme und der Volumenunterschied bestimmen gemäß dieser Gleichung die Steigung der Kurve  $p_S(T)$ .

Überlagert man das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht und das Fest-Flüssig-Gleichgewicht, so erkennt man drei Bereiche in einem Phasendiagramm (Abb. 7.5.4): fest, flüssig und gasförmig. Am sogenannten **Tripelpunkt** ist die Koexistenz von drei Phasen möglich. Bei Wasser liegt dieser Punkt bei einem Druck von  $p_T$ =611.657 Pa und einer Temperatur  $T_T$ =273.16 K. Dieser Tripelpunkt ist eindeutig für die jeweilige Substanz und eignet sich zur Eichung von Temperaturmessmethoden. Den Übergang zwischen den Phasen fest-flüssig (Weg 2 in Abb. 7.5.4) bezeichnet man als **Schmelzen/Frieren**; den Übergang zwischen den Phasen flüssig-gasförmig (Weg 3 in Abb. 7.5.4) bezeichnet man als **Verdampfen/Verflüssigen**; den direkten Übergang zwischen den Phasen fest-gasförmig (Weg 1 in Abb. 7.5.4) bezeichnet man als **Sublimieren/Kondensieren**.



Abbildung 7.5.3: Bei einem Geysir führt die Blasenbildung in der Tiefe zu einem spontanen Druckabfall und damit dem schlagartigen Verdampfen der Flüssigkeit.

Oberhalb einer kritischen Temperatur  $T_k$  und einem Druck  $p_k$  wird die Substanz **überkritisch**, da eine Unterscheidung zwischen Flüssigkeit und Gas nicht mehr sinnvoll wird. Am kritischen Punkt selbst bilden sich fortlaufend Flüssigkeitströpfchen und verschwinden wieder<sup>1</sup>. Der überkritische Zustand für Temperaturen  $T > T_k$  und Drücken  $p > p_k$  vereint die guten Lösungsmitteleigenschaften einer Flüssigkeit mit den guten Transporteigenschaften von Gasen. Überkritische Medien werden derzeit in der Chemie genutzt, um Reaktionen optimal ablaufen zu lassen bei denen eine perfekte Durchmischung der Reaktanden wichtig wird. Typisches Beispiel ist überkritisches CO<sub>2</sub> ( $p_K = 73$  atm ,  $T_k = 304$  K), das als ausgezeichnetes Lösungsmittel dienen kann. So wird z.B. die Entkoffeinierung von Kaffee und die Entnikotinisierung von Tabak mittels überkritischem CO<sub>2</sub> als Lösungsmittel großtechnisch realisiert.

Phasenübergänge lassen sich in unterschiedliche Ordnungen einteilen. Bei einem **Phasenübergang 1. Ordnung** beobachtet man eine direkte Unstetigkeit der thermodynamischen Potentiale. Beispiel wären alle Prozesse bei denen latente Wärme aufgewendet werden muß. Bei einem **Phasenübergang 2. Ordnung** beobachtet man eine Unstetigkeit erst in der ersten Ableitung der thermodynamischen Potentiale. Beispiel wären alle Prozesse bei denen keine latente Wärme aufgewendet werden muß, bei denen sich aber die Freiheitsgrade in dem System ändern (Beispiel Magnetisierung).

Für die Zahl der frei wählbaren Zustandsgrößen (T, p, V) läßt sich die sog. Gibbs'sche Phasenregel anwenden. Mit f der Zahl der freien Zu-

 $<sup>^1{\</sup>rm Im}$ Experiment wird das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht intransparent durch die starke Lichtstreuung an den feinen Tröpfchen

② A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 7.5.4:** In einem pT-Diagramm lassen sich die Phasen fest-flüssig-gasförmig unterteilen. Die Phasenübergang (1) entspricht Kondensieren-Sublimieren; (2) Schmelzen-Frieren; (3) Verdampfen-Verflüssigen.

standsvariablen und q der Zahl der ko<br/>existenten Phasen bekommt man den Zusammenhang:

$$f = 3 - q \tag{7.5.8}$$

Bei einem Gas wäre q = 1 und f = 2, d.h. p und T lassen sich zum Beispiel frei einstellen, und V ergibt sich aus der Zustandsgleichung. Bei der Dampfdruckkurve ist q = 2, d.h. für gegebene Temperatur gibt es einen Sättigungsdampfdruck  $p_s$ , Das Volumen ergibt sich wieder aus der Zustandsgleichung. Am Tripelpunkt selbst ist q = 3, d.h. f = 0 und alle Zustandsvariablen sind festgelegt.

Ein Phasendiagramm betrachtet immer ein System, das sich bei gegebenen äußeren Parametern wie Druck, Temperatur, Volumen etc. im Gleichgewicht befindet. In der Realität erfolgt eine Änderung der äußeren Parameter allerdings nicht beliebig langsam, so daß das Erreichen des Gleichgewichts eine endliche Zeit in Anspruch nehmen kann. Dies soll an folgenden Beispielen erklärt werden:

## • Kondensstreifen

Betrachten wir das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht. Verändert man einen äußeren Parameter, der zum Beispiel den Anteil an der flüssigen



Abbildung 7.5.5: Phasenübergang 1. und 2. Ordnung.

Phase erhöhen würde, so kann dieser Übergang in der Regel nicht instantan erfolgen. Beispiel wäre die Unterkühlung von Wasserdampf: kühlt man gesättigten Wasserdampf ab, so muß sich die flüssige Phase bilden. Damit sich allerdings neue Flüssigkeitströpfchen bilden, müssen sich freie Moleküle verbinden. Aus der Betrachtung von Stoßprozessen unter Energie- und Impulserhaltung ist bekannt, daß eine einfache Rekombination von zwei Wassermolekülen nicht möglich ist. Erst ein Stoß von drei Stoßpartnern ermöglicht die gleichzeitige Erfüllung von Energie- und Impulserhaltung. Diese Dreier-Stöße sind allerdings sehr unwahrscheinlich, so daß die Bildung von Flüssigkeitströpfchen eine lange Zeit in Anspruch nimmt. Die Rate kann sich allerdings stark erhöhen werden, wenn sog. Kondensationskeime existieren wie z.B. Staub. Dies erklärt die Bildung von Kondensstreifen hinter Flugzeugen, die immer dann in großer Höhe auftreten, wenn sich feuchte, unterkühlte Luft in der Atmosphäre befindet. Die Rußpartikel in den Flugzeugabgasen wirken dann wie Kondensationskeime.

## • Blitzeis

Die endlichen Zeiträume für das Ablaufen eines Phasenübergangs wird auch beim sog. Blitzeis sichtbar: in der Atmosphäre kann unterkühltes Wasser entstehen, das keine Zeit hatte, um zu Eis oder Hagel zu kondensieren. Trifft ein solch unterkühlter Wassertropfen auf den Boden, so bildet sich sofort Eis, da die Bodenoberfläche genügend Kondensationskeime zur Verfügung stellt. Der Boden muß dabei *nicht* gefroren sein, da das Wasser selbst schon eine Temperatur unter Null Grad besitzt.

## • Nebelkammer

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum

In der Teilchenphysik verwendet man auch Detektoren, die nach diesem Prinzip funktionieren. Hierbei wird ein Volumen schnell variiert in dem sich Alkoholdampf bei Sättigungsdampfdruck befindet. Bei Verkleinerung des Volumens erhöht man den Anteil an flüssiger Phase. Allerdings kann dieser Vorgang nicht beliebig schnell erfolgen. In dem pV-Diagramm folgt man deshalb der Isothermen, wie in Abb. 7.5.6 gezeigt. Läuft nun ein Elementarteilchen durch dieses Gasvolumen, so ionisiert es die Gasmoleküle und hinterlässt eine Spur an Ladungsträgern. Diese Ladungsträger wirken wie Kondensationskeime und die Spur wird als Kondensstreifen sichtbar.



Abbildung 7.5.6: Bei schnellen Änderungen, kann das System einer Phasenänderung nicht mehr *instantan* folgen. Es entsteht z.B. *übersättigter* Wasserdampf.

Bei schnellen Änderung der äußeren Parameter kann man somit Flüssigkeiten und Gase **unterkühlen (supercooling)** oder **überhitzen** (**superheating**). Das Einbringen von einem *einzigen* Kondensationskeim läßt allerdings die Phasenumwandlung spontan und sehr schnell einsetzen. D.h. eine unterkühlte Flüssigkeit gefriert schlagartig bzw. eine überhitzte Flüssigkeit verdampft schlagartig. Solche Systeme besitzen ein hohes Gefährdungspotential in der Technik.

```
Vertiefung - Wasser
```

Wasser ist bestimmend für viele Vorgänge der Biologie und der Atmosphäre.

Dies begründet sich durch ein Reihe von außerordentlichen Eigenschaften, wie ungewöhnlichen Schmelz- und Siedepunkten, der Dichte-Erniedrigung beim Frieren und seinen guten Eigenschaften als Lösungsmittel. Dies sei im folgenden erläutert.

Wasser besitzt insgesamt 63 Anomalien, die es von chemisch gleichwertigen Flüssigkeiten wie  $H_2S$ ,  $H_2Te$ ,  $H_2Se$  und  $H_2Po$  abgrenzt. Im folgenden seien einige der wichtigsten genannt:

#### • Dichte nimmt beim Frieren ab

Beim Frieren von Wasser nimmt dessen Dichte ab! Aus diesem Grund schwimmt gefrorenes Wasser (=Eis) an der Oberfläche. Im Vergleich dazu sinkt zum Beispiel ein hartes Stück Kerzenwachs in flüssigem Kerzenwachs zu Boden. Falls Eis nicht schwimmen würde, würden die Meere über kurz oder lang bis zum Grund durchfrieren!

#### • Wasser hat die größte Dichte bei +4°C

Wasser besitzt seine größte Dichte bei  $+4^{\circ}{\rm C}.$  Damit ist die Temperatur in den Tiefen der Weltmeere immer bei diesem Wert und das Wasser kann dort nicht frieren!

#### • Wasser hat ungewöhnlich hohe Schmelz- und Siedepunkte

Vergleicht man die Reihe der chemisch gleichwertigen Hydrate H<sub>2</sub>O, H<sub>2</sub>S, H<sub>2</sub>Te, H<sub>2</sub>Se und H<sub>2</sub>Po so sind die Schmelz- und Siedepunkte von Wasser ungefähr 100°C höher als erwartet, wie es in Abb. 7.5.7 illustriert ist.



Abbildung 7.5.7: Schmelzpunkte und Siedepunkte von H<sub>2</sub>O, H<sub>2</sub>S, H<sub>2</sub>Te, H<sub>2</sub>Se und H<sub>2</sub>Po.

• Wasser hat eine außergewöhnliche hohe spezifische Wärmekapazität Wasser hat eine sehr hohe spezifische Wärmekapazität im Bereich zwischen 0°C und 40°C<sup>a</sup> mit einem Minimum bei 311 K, wie in Abb. 7.5.8 illustriert. Durch diese hohe Wärmekapazität können die Weltmeere als gute Energiespeicher in der Atmosphäre dienen.

<sup>©</sup> A. von Keudell, Ruhr-Universität Bochum



**Abbildung 7.5.8:** Spezifische Wärme von Wasser bei konstantem Druck. Insbesondere im Bereich zwischen 273 und 311 K ist die spezifische Wärmekapazität um ein Vielfaches höher als bei vergleichbaren Flüssigkeiten.

#### • Warmes Wasser friert schneller als kaltes

Kühlt man Wasser bei konstanter Temperatur ab, so friert warmes Wasser schneller als kaltes (Mpemba-Effekt). Bis zum Vorgang des Frierens wird kaltes Wasser stärker unterkühlt als warmes Wasser und braucht damit länger bis Kristallisation einsetzt. Dies ist in Abb. 7.5.9 veranschaulicht.



Abbildung 7.5.9: Setzt man Wasser einem Kältebad von unter 0° Grad aus, so gefriert warmes Wasser schneller als kaltes Wasser. Beim Vorgang des Frierens wird kaltes Wasser stärker unterkühlt als warmes Wasser.

#### • Wasser ist exzellentes Lösungsmittel

Sehr viele polare Substanzen lassen sich in Wasser lösen.

Die Eigenschaften von Wasser lassen sich wieder in einem Phasendiagramm ausdrücken (siehe Abb. 7.5.10). Im Unterschied zu anderen Substanzen wird die Steigung für die Schmelzkurve wegen dem negativen Vorzeichen des Terms  $(V_{flüssig} - V_{fest})$ negativ. Dies ist im Unterschied z.B. zu CO<sub>2</sub>, bei dem das Volumen beim Schmelzen zunimmt.



Abbildung 7.5.10: Phasendiagramm von Wasser mit der kritischen Temperatur  $T_k$  und Druck  $p_k$ . Insbesondere die negative Steigung der Schmelzkurve ist einzigartig bei der Substanz Wasser.

Alle Anomalien des Wassers lassen sich durch dessen mikroskopische Struktur erklären. Ein Wassermolekül  $H_2O$  hat die Struktur eines Tetraeders, wobei zwei Ecken durch die Wasserstoffatome und zwei Ecken durch die ungebundenen Elektronenpaare des Sauerstoffatoms gegeben sind. Zwischen den Wasserstoffatomen und den ungebundenen Elektronenpaaren eines benachbarten Wassermoleküls kann eine **Wasserstoff-Brückenbindung** ausgebildet werden. Quantenmechanische Rechnungen zeigen, daß der Abstand zwischen den Sauerstoffatomen in einem Wasserdimer (zwei benachbarte  $H_2O$ -Moleküle) ca. 2.9 Å ist (siehe Abb. 7.5.11). Dieser Abstand kann sich verkürzen, wenn mehrere Wassermoleküle zusammen kommen und sich ein dreidimensionales Netzwerk aus Tetraedern formt. Man kann folgende Strukturen unterscheiden:



**Abbildung 7.5.11:** Ein Wassermolekül bildet einen Tetraeder. Durch die Ladungsverschiebung  $\delta^+$  und  $\delta^-$  können sich schwache Bindung zwischen zwei Wassermolekülen ausbilden, die sog. Wasserstoffbrückenbindungen. Dies führt zur Bildung von ausgedehnten Wasserstoff-Brücken-Netzwerken, mit einem 6er Ring als einfachstem Beispiel.

## • Gasförmiges Wasser, Dampf

In der Gasphase bilden sich als stabilste Formen in der Regel 6er Ringe von Wassermolekülen, vergleichbar zum Benzol in der organischen Chemie (siehe Abb. 7.5.11). Von diesen 6er-Ringen existieren mehrere Formen.

#### • Flüssiges Wasser

In flüssigem Wasser sind die Wassermoleküle durch zahlreiche Wasserstoff-Brückenbindungen miteinander verbunden, die allerdings schnell alternieren. Im Mittel besitzt ein Wassermolekül ungefähr 5 nächste Nachbarn. Als größere Strukturen beobachte man im Gleichgewicht die Bildung von **Icosaedern**.

#### • Festes Wasser, Eis

In festem Wasser bildet sich ein Wasserstoff-Brücken-Netzwerk, bei dem jedes Wassermolekül genau 4 Nachbarn hat. In Analogie zum Kohlenstoff gibt es hexagonal (wie Graphit bei Kohlenstoff) oder tetraedrisch (wie Diamant bei Kohlenstoff) geordnetes Eis. Bei einer Variation von Druck und Temperatur durchläuft Eis insgesamt 15 (!) Kristallstrukturen, die sich durch unterschiedliche Packungsdichten auszeichnen.

Diese Mikrostruktur erlaubt es alle Anomalien von Wasser zu erklären: (i) im flüssigen Zustand hat ein Wassermolekül im Mittel 5 Nachbarn, während es im festen Zustand genau 4 Nachbarn hat. Dadurch nimmt die Dichte ab; (ii) im selben Maße wird seine Dichte bei  $+4^{\circ}$ C maximal. Die hohen Schmelz- und Siedepunkte werden dadurch erklärt, daß die zugeführte Wärme komplexe Wasserstoff-Brücken-Netzwerke aufbrechen muß, bevor ein Schmelzen bzw. ein Verdampfen eintreten kann; (iii) warmes Wasser gefriert schneller, da die Wassermoleküle im warmen Wasser zunächst ungeordnet vorliegen und sich damit schnell in das hexagonale Gitter beim Frieren umordnen können. Bei kaltem Wasser hingegen haben sich in großer Zahl *Icosaeder* gebildet, die zunächst aufgelöst werden müssen, bevor sich die hexagonale Struktur des Wasserseises einstellen kann; (iv) je nach polarer Substanz können sich unterschiedliche Wasserstoff-Brücken-Netzwerk bilden, die das polare Molekül umschließen und es so wasserlöslich machen.

Eine lange Debatte (seit 1850 bis heute) entspannte sich um die Tatsache, daß man auf Eis **Schlittschuhfahren** kann. Die älteste These war diejenige, daß durch die negative Steigung der Schmelzkurve (siehe Abb. 7.5.7) eine Druckerhöhung zum Schmelzen von Eis führt. Ein Schlittschuhfahrer gleitet dann nahezu reibungslos auf einem dünnen Wasserfilm.

Betrachtet man dieses Argument allerdings quantitativ, so kann ein Schlittschuhfahrer wegen seiner sehr schmalen Schlittschuhkufen maximal einen Druck von ca. 500 Atmosphären auf das Eis ausüben. Bei diesem Druck schmilzt das Eis schon bei -3.5°C. Die Erfahrung zeigt jedoch, daß Schlittschuhfahren bei sehr viel tieferen Temperaturen noch möglich ist. Bis ca. -33°C kann man Schlittschuhfahren, und erst bei -46°C gleicht das Gleiten auf Schnee und Eis eher dem Gleiten auf Sand wie man seit der Südpolexpedition von Robert Scott weiß. Nach dem Phasendiagramm, kann Eis auch bei tieferen Temperaturen durch Druck schmelzen. Allerdings ist das Minimum bei -22°C und man benötigt dann einen Druck von ca. 5000 Atmosphären!

Dieses Rätsel hat sich erst in den letzten Jahren aufgelöst. Durch eine mikroskopische Analyse hat man festgestellt, daß auf einer Eisoberfläche *immer* ein Flüssigkeitsfilm existiert: an der Grenzfläche Eis-Luft bewirkt das Fehlen von benachbarten Wassermolekülen, daß die vierfach koordinierte Struktur des Eises instabil wird. Es findet eine sog. *Rekonstruktion* der Oberfläche statt, die knapp unterhalb der Schmelztemperatur an der Bildung eines dünnen Flüssigkeitsfilms sichtbar wird. Dieses Phänomen beobachtet man generell bei vielen Festkörperoberflächen kurz unterhalb ihres Schmelzpunktes.

Nahe unter dem Gefrierpunkt ist dieser Flüssigkeitsfilm ungefähr 100 nm dick, wird dann mit sinkender Temperatur schnell dünner bevor er bei  $-33^{\circ}$ C ganz verschwindet! Dieses Verhalten kann man in sog. **Regelations**-Experimenten beobachten. Hierbei wird ein Draht um einen Eisblock gelegt und dann mit einem Gewicht beschwert, wie in Abb. 7.5.12 illustriert. An der Grenzfläche zwischen Draht und Eis bildet sich fortlaufend ein Wasserfilm, durch den dieser langsam nach unten sinkt. Hinter dem Draht verschwindet die Grenzfläche und das Eis friert wieder zusammen. Der Draht bewegt sich also langsam durch den Eisblock, wobei dieser intakt bleibt. Die Geschwindigkeit des Drahtes hängt von der Dicke des Wasserfilms an der Grenzfläche ab. Nahe bei Null Grad bewegt sich der Draht sehr viel schneller als bei sehr tiefen Temperaturen. Dies ist eine eindrucksvolle Bestätigung der Abhängigkeit der Dicke des Wasserfilms von der Temperatur.



Abbildung 7.5.12: Regelation von Eis: Ein Draht schmilzt durch einen Eisblock hindurch da sich an der Grenzfläche Draht-Eis immer ein Flüssigkeitsfilm bildet.

Die besondere Form des Phasendiagramms von Wasser hat signifikante Folgen bei der Mischung von Wasser und einer gelösten anderen Substanz wie zum Beispiel Salz. Durch die Anwesenheit von Lösungsmittel-Molekülen erhöht sich die latente Wärme, die für einen Phasenübergang zugeführt werden muß, da auch die anziehende Wirkung dieser Lösungsmittelmoleküle überwunden werden muß! Insgesamt entsteht eine Verschiebung der Dampfdruck- und Schmelzdruckkurven, wie in Abb. 7.5.13 illustriert. D.h. der Sättigungsdampfdruck *erniedrigt* sich bzw. der Siedepunkt *erhöht* sich: gesalzenes Wasser kocht bei höheren Temperaturen. Durch diese Anomalie des Wassers *erniedrigt* sich aber auch zusätzlich die Schmelztemperatur, da die Schmelzdruckkurve eine negative Steigung hat! Aus diesem Grund läßt sich Eis durch die Zugabe von Salz auftauen.



Abbildung 7.5.13: Durch die Zugabe eines Lösungsmittel zu Wasser erhöht sich die latente Wärme für eine Verdunstung, da jetzt auch Arbeit gegen die anziehende Wirkung der Lösungsmittelmoleküle geleistet wird. Dies führt zu einer Verschiebung der Kurven. Als Folge bekommt man bei Wasser eine Siedepunktserhöhung und eine Schmelzpunkt-Erniedrigung.

<sup>*a*</sup>Am Gefrierpunkt selbst, muß  $C_p = \frac{dH}{dT}$  gegen unendlich gehen, da bei einem Phasenübergang 1. Ordnung Energie in latente Wärme aber nicht in Temperaturerhöhung umgesetzt wird.

# Index

überhitzen, 373 0-ter Hauptsatz, 332 90°-Puls, 310 Abbildung, 231 Abbildungsgleichung, 238 Absorptionskoeffizient, 215 Absorptionsvermögen, 346 Achse feste, 67 freie, 67 achsen-paralleler Strahl, 239 Adiabatenkoeffizient, 343 Airy-Funktionen, 269 Aktivität, 322 allgemeine Gasgleichung, 331 Ampere, 169 Arbeit, 47 Archimedisches Prinzip, 90 Atomhypothese, 340 Atomuhr, 11 Auftrieb, 90 Auge, 248 Ausdehnungskoeffizient, 336 Avogadro-Konstante, 339 Balkenwaage, 72 barometrische Höhenformel, 99 Batterie, 176 Bernoulli-Gleichung, 102 Besetzungsinversion, 304 Bethe-Weizsäcker-Formel, 319 Beugung Fraunhofer, 260

Fresnel, 259 Beugungsmuster, 135 Beweglichkeit, 178 Bild, 231 Binnendruck, 366 Bloch-Gleichungen, 311 Bohr'sche Postulate, 295 Boltzmannkonstante, 331 Boyle-Mariott-Gesetz, 97 Brückenschaltung, 182 Brechung, 219 Brechungsgesetz von Snell, 222 Brechungsindex, 213 Brennpunkt, 233 Brennpunktstrahl, 239 Brennstoffzelle, 170 Brennweite, 233 Brewsterwinkel, 227 Brille, 249 Coloumb, 149 Coloumbkraft, 152 Dämpfung, 117, 120 Dehnung, 80 Dezibel, 131 dichroitisch, 229 Dioptrien, 250 Dispersion, normal/anormal, 219 Drehimpuls, 64, 70 Drehmoment, 68 Drift, 177 Druck, 87 Druckspannung, 82

Eigenfrequenz, 140 Einfallsebene, 220 eingefrorener magnetischer Fluß, 200 Einheiten Becquerel, Curie, Gray, Sievert, rem, 324 Elastizitätsmodul, 82 elektrisches Feld, 153 elektrisches Potential, 158 Elektrometer, 150 Elementarladung, 149, 280 Emissionsvermögen, 346 Energie Asymmetrie, Fermigas, 317 Coloumb, 317 kinetische, 49 Oberflächen, 316 Paarungs, 318 potentielle, 50 Volumen, 316 Energieübertrag, 57 Erdbeschleunigung, 38 Erhaltungsgröße, 64 Falsifizierungs-Prinzip, 9 Farad, 164 Faraday'scher Käfig, 161 Faraday'sches Gesetz, 196 Federkonstante, 39 Federkraft, 38 Fehler statistisch, 14 systematisch, 13 Feldemission, 156 Feldlinien, 153 Fermat'sches Prinzip, 222 Fermigeschwindigkeit, 180 Fernrohr Galileo, 255 Kepler, 254 Fluoreszenz-Mikroskopie, 264

Fourier-Transformations-Spektrometer, 267 freie Fall, 27 Fresnel-Gleichungen, 225 Galvanisches Element, 173 Gamow-Faktor, 325 Gaskonstante, 275, 340 Gegeninduktion, 207 Geiger-Nuttal-Regel, 324 Gesetz Dalton, 274 Gay-Lussac, 274 Moseley, 302 Gesetz Gay-Lussac, 340 gg/uu/ug-Kerne, 319 Gibb'sches Phasenregel, 370 Gleichverteilungssatz, 342 Gravitation, 37 Gravitationsgesetz, 64 Gravitationskonstante, 37 Gravitationswaage, 65 Gruppengeschwindigkeit, 218 Gyration, 192 Hagen-Poiseuille, 107 Halbwertszeit, 322 harmonische Näherung, 81 Henry, 204 Hohlspiegel, 245 Hook'sches Gesetz, 83 Huygens'sche Prinzip, 132 hydraulische Hebebühne, 88 Hydrodynamisches Paradoxon, 103 ideales Gas, 329 Implantation, 282 Impuls, 32 Impulserhaltung, 45 Induktivität, 204 induzierte Spannung, 196 Influenzladungen, 160

innere Energie, 341 Intensität, 215 Isobar, 309 Isobare, 309 Isotone, 309 Isotop, 309 Joule, 48 K-Einfang, 321 k-Wert, 350 Kalorie, 337 Kaloriemeter, 338 Kapazität, 163 Kapillarwirkung, 95 Kelvin, 331 Kepler'sche Gesetze, 62 Kernfusion, 315 Kernspaltung, 315 Kernspinresonanz, 309 Kirchhoffsche Regeln, 185 Kondensator, 163 Parallelschaltung, 165 Serienschaltung, 165 Kondensstreifen, 371 konkav, 232 Konstante Avogardo, 275 Kontaktwinkel, 95 konvex, 232 Kraft-Gegenkraft-Paar, 36 Kraftfeld konservativ, 48 nicht-konservativ, 48 Kramers-Kronig-Beziehungen, 216 Kreisbewegung, 58 Kugelwelle, 132 Kurzsichtigkeit, 249 Ladungserhaltung, 148 Lambert-Beer'sche Gesetz, 215 Larmorradius, 192

latente Wärme, 344 Lautstärke, 131 Lebensdauer, 322 Leitfähigkeit, 178 Lenz'sche Regel, 197 Lichtgeschwindigkeit, 10 Lichtstärke, 256 Lorentz-Kraft, 190 Luftwiderstand, 42 Magnete, 189 Magnetische Levitation, 203 magnetischer Fluß, 196 Magnuseffekt, 104 Masse molare, 275 träge, 33 Massenflußdichte, 101 Maxwell-Boltzmann-Verteilung, 333 Maxwell-Konstruktion, 367 Metamaterialien, 217 Michelson-Interferometer, 265 Mikroskop, 253 Millikan-Versuch, 149 Mittelebene, 239 Mittelpunktstrahl, 239 Mol, 275, 339 molare Wärmekapazität, 341 Netzwerk, 184 neutrale Faser, 84 Neutron. 309 Newton'sche Axiome, 31 Normalkraft, 34 numerische Apertur, 263 Oberflächenenergie, 92 Oberflächenspannung, 93 Objekt, 231 Objektiv, 253 Ohm'sches Gesetz, 179 Okular, 253

INDEX

optische Achse, 232 optisches System, 231 Ordnung Phasenübergang, 370 Phasenübergang, 367 Phasengeschwindigkeit, 217 Phasensprung, 226 Planck-Verteilung, 346 Plattenkondensator, 155 Pole, 189 Röntgenstrahlung charakteristisch, 301 Rakete, 45 Raleigh-Kriterium, 263 Rechte-Hand-Regel, 25 Reflexion, 219, 226 Reflexionskoeffizient, 225 Regelation, 378 Reibung, 39, 105 Gleiten, 40 Haften, 40 Reibungselektrizität, 150 Reibungskoeffizienten, 40 Relaxation longitudinal, 311 transversal, 311 Rotation, 67 Rotationsenergie, 77 Sättigungsdampfdruck, 368 Sammellinse, 237 Schärfentiefe, 256 Schallwellen, 127 Schiffshebewerk, 91 Schlittschuhfahren, 378 schräger Wurf, 27 schwarzer Strahler, 346 Schwerpunkt, 43, 67, 69 Schwimmen, 91 Sehweite, 251 Seifenblase, 93

SI-System, 13 Snellius'sche Brechungsgesetz, 138 Spannung, 159 Spannungsteiler, 182 spezifische Wärme, 337 spezifische Wärmekapazität, 341 Spiegelladung, 163 Spin-Echo-Verfahren, 312 Stauchung, 80 Staurohr, 105 Stefan-Boltzmann-Gesetz, 346 Steiner'scher Satz, 75 Stoke'sches Gesetz, 108 Strahlen Kanal, 277 Kathoden, 277 Strahlung  $\alpha$ , 320  $\beta^+, 321$  $\beta^{-}, 320$  $\gamma$ , 321 Streuung, 213 Rutherford, 281 Strom, 169 Stromdichte, 169 Superpositionsprinzip, 33 Synchroton-Strahlung, 303 technische Stromrichtung, 170 Teilchenflußdichte, 101 Temperatur, 331 Tesla, 189 Totalreflexion, 228 Trägheit, 33 Trägheitsmoment, 73 Translation, 67 Transmission, 226 Transmissionskoeffizient, 225 Tripelpunkt, 336, 369 unterkühlen, 373

Urkilogramm, 12 total, 276 van-de-Graaff-Generator, 162Waals Zustandsgleichung, van-der 366 Vektoren Kreuzprodukt, 25 Skalarprodukt, 25 Vergrößerung, 240 Vergrößerungsfaktor, 251 Versuch Millikan. 278 Verteilungsfunktion, 332 Very Long Baseline Interferometry, 263Vielstrahlinterferenz, 267 virtuelles Bild, 236 Viskosität, 105 Wärme, 337 Wärmeleitfähigkeit, 345 Wärmestrom, 347 Wärmewiderstand, 348 Wasserstoff-Brückenbindung, 376 Watt, 48 Wechselwirkung, 35 Weitsichtigkeit, 249 Wellen longitudinal, 125 transversal, 125 Wellenpaket, 290 Wellenzahl, 125 Widerstand, 180 Parallelschaltung, 187 Serienschaltung, 186 spezifisch, 179 Winkelgeschwindigkeit, 59 Wirbelströme, 202 Wirbelstrombremse, 201 Wirkungsgrad, 363 Wirkungsquerschnitt

Wurfparabel, 28 Zentrifugalbeschleunigung, 61 Zentripetalbeschleunigung, 58 Zerfallskonstante, 322 Zerstreuungslinse, 237 Zugspannung, 82 Zwischenbild, 243 Zyklotronfrequenz, 192