

Vorlesungsskript

Physik I

Mechanik und Wärmelehre

Wintersemester 2015/2016

Ruhr-Universität Bochum

Prof. A. von Keudell

15. Januar 2016

Vorwort

Diese Notizen sind aus der Vorlesung "Physik I für Physiker, Mechanik und Wärmelehre" im WS 2006/07, 2009/10, 2014/15, 2015/16 entstanden. Als Grundlage wurden die Bücher Halliday, Resnick, Walker *Physik*, Tipler, Mosca *Physik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, Demtröder *Experimentalphysik I*, Dransfeld, Kienle, Vonach *Physik I*, Magnus, Müller *Grundlagen der Technischen Mechanik*, Reif *Statistische Physik und Theorie der Wärme* verwendet. Diese Notizen sollen und können natürlich diese Bücher nicht ersetzen und verstehen sich als Ergänzung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Was ist Physik?	6
1.2	Maßeinheiten der Physik	12
1.2.1	Längen	12
1.2.2	Zeiten	12
1.2.3	Masse	14
1.3	Messen physikalischer Größen	14
1.3.1	SI-System, Umrechnung von Einheiten	15
1.3.2	Messgenauigkeit und Messfehler	15
2	Mechanik	20
2.1	Mechanik eines Massenpunktes	20
2.1.1	Bewegung eines Massenpunktes	21
2.1.2	Kräfte	38
2.1.3	Arbeit und Energie	50
2.1.4	Gravitation	58
2.2	Systeme von Massenpunkten	66
2.2.1	Schwerpunkt	66
2.2.2	Kraft und Impuls	67
2.2.3	Stoßprozesse	70
2.2.4	Streuung	77
2.3	Bezugssysteme	85
2.3.1	Galilei-Transformation	85
2.3.2	Beschleunigte Bezugssysteme	87
2.3.3	Spezielle Relativitätstheorie	92
2.4	Ausgedehnte starre Körper	111
2.4.1	Translation und Rotation	111
2.4.2	Drehmoment und Drehimpuls	112
2.4.3	Die kinetische Energie der Rotation	121
2.4.4	Kinematik der Rotation	124
2.5	Reale Körper	136

2.5.1	Elastische Festkörper	136
2.5.2	Flüssigkeiten	145
2.5.3	Gase	155
2.6	Transport	158
2.6.1	Teilchenerhaltung, Kontinuitätsgleichung	158
2.6.2	Energieerhaltung, Bernoulli-Gleichung	161
2.6.3	Impulserhaltung, Euler-Gleichung	165
2.6.4	Strömung mit Reibung	167
2.6.5	Laminare und turbulente Strömungen	169
2.6.6	Transport durch Diffusion	174
2.7	Schwingungen	177
2.7.1	Der harmonische Oszillator	177
2.7.2	Überlagerung von Schwingungen	183
2.7.3	Die gedämpfte Schwingung	185
2.7.4	Die erzwungene Schwingung	188
2.7.5	Gekoppelte Oszillatoren	193
2.8	Wellen	195
2.8.1	Ausbreitung von Wellen	195
2.8.2	Die Wellengleichung	196
2.8.3	Energiedichte einer Welle	202
2.8.4	Überlagerung von Wellen	203
2.8.5	Beugung, Brechung und Reflexion von Wellen	209
2.8.6	Stehende Wellen	217
2.8.7	Wellen bei bewegten Quellen	219
3	Wärmelehre	225
3.1	Kinetische Gastheorie	225
3.1.1	Mikroskopische Definition der Temperatur	225
3.1.2	Verteilungsfunktionen	228
3.1.3	Temperatureinheiten und ihre Messung	231
3.2	Wärme	234
3.2.1	Wärmemenge	234
3.2.2	Die spezifische Wärmekapazität	236
3.3	Wärmetransport	243
3.3.1	Wärmeleitung	243
3.3.2	Wärmestrahlung	248
3.4	Hauptsätze der Wärmelehre	253
3.4.1	Zustandsgrößen, Zustandsänderungen	253
3.4.2	Der erste Hauptsatz	255
3.4.3	Der zweite Hauptsatz	262
3.4.4	Die Entropie	269

3.4.5	Der dritte Hauptsatz	278
3.4.6	Thermodynamische Maschinen	279
3.4.7	Thermodynamische Potentiale	282
3.5	Reale Gase	289
3.5.1	van der Waals Zustandsgleichung	289
3.5.2	Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht	292
3.5.3	Phasendiagramme	297
3.5.4	Wasser	311
A	Formelsammlung	319
B	Konstanten	323
C	Fragenkatalog	324
C.1	Kapitel 1: Was ist Physik ?	324
C.2	Kapitel 2: Mechanik	324
C.2.1	Bewegung eines Massenpunktes	324
C.2.2	Systeme von Massenpunkten	325
C.2.3	Bezugssysteme	325
C.2.4	Ausgedehnte starre Körper	325
C.2.5	Reale Körper	326
C.2.6	Transport	326
C.2.7	Schwingungen	327
C.2.8	Wellen	327
C.3	Kapitel 3: Wärmelehre	328
C.3.1	kinetische Gastheorie	328
C.3.2	Wärme	328
C.3.3	Wärmetransport	328
C.3.4	Hauptsätze	329
C.3.5	Reale Gase	329

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Was ist Physik?

Physik ist die Wissenschaft, die sich mit der Erklärung der Natur beschäftigt. Durch ein Verständnis der physikalischen Zusammenhänge und Hintergründe sollen Ereignisse vorhersagbar gemacht werden, wie z.B. der Lauf der Gestirne. Auf der Basis dieser Erkenntnisse werden neue Anwendungen erschlossen, die Bestandteil moderner Technologien werden. Die Physik ist damit ein Motor des technischen Fortschritts.

Die Physik geht dabei oft von der Naturbeobachtung aus. Zunächst wird ein Vorgang durch Messen von Größen wie Länge, Zeit, Gewicht, Geschwindigkeit quantitativ erfasst. Danach versucht man diese Größen zueinander in Beziehung zu setzen um universelle Gesetzmäßigkeiten herauszufinden. Diese Naturgesetze sind allerdings nur eine formale Beschreibung der Naturbeobachtung, die fortlaufend durch weitere Experimente und Beobachtungen überprüft wird. Hierbei gilt das **Falsifizierungs-Prinzip**. Gelingt es einem Experiment ein Naturgesetz zweifelsfrei zu widerlegen, so ist dieses Naturgesetz ab diesem Zeitpunkt obsolet. So erhebt die Physik nicht den Anspruch Wahrheiten über die Natur zu produzieren, sondern bietet immer nur Theorien an, die im Rahmen ihrer Gültigkeitsgrenzen eine gute Beschreibung der Naturvorgänge darstellen.

Diese Aufklärung der Naturphänomene ist allerdings ein schwieriger Prozeß, da die Beobachtung oftmals von mehreren Naturgesetzen gleichzeitig bestimmt wird, so daß man eine einzelne Gesetzmäßigkeit nicht isoliert von anderen beobachten kann. Weiterhin erlaubt es die Entwicklung immer feinerer und genauerer Messaufbauten und Messinstrumente die Theorien der Physik immer besser überprüfen zu können. Dabei werden irgendwann Abweichungen zwischen Theorie und Experiment sichtbar, die neue Gedankengebäude

erforderlich machen. Ein berühmtes Beispiel dafür ist die Entwicklung der Quantenmechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

Dieser Erkenntnisprozeß in der Physik soll an zwei Beispielen illustriert werden.

Die Betrachtung der Sterne war schon seit Anbeginn Ansporn für die Wissenschaftler Vorgänge in der Natur genauer zu verstehen und zu erfassen. Der Fixsternhimmel zieht dabei gleichmäßig über das Firmament, wobei vor diesem Hintergrund Sonne, Mond und Planeten ihre Bahnen ziehen. Bei der direkten Beobachtung dieser Planetenbewegungen fielen den Menschen schon früh zwei Besonderheiten auf:

- die Planeten Venus und Merkur sind nur am Abend und am Morgen sichtbar, bzw. sie befinden sich immer in der Nähe der Sonne. Die anderen Planeten, Mars, Jupiter und Saturn können je nach Stand der Planeten während der ganzen Nacht beobachtet werden.
- Verfolgt man die Planeten, so gibt es Phasen in denen die Planeten zeitweise vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels ihre Richtung umkehren und zurücklaufen.

Beide Beobachtungen verlangen natürlich eine möglichst einfache naturwissenschaftliche Erklärung.

Die erste und zugleich auch in erster Näherung richtige Erklärung dieser Beobachtungen wurde von **Aristarch** im vierten Jahrhundert v. Chr. aufgestellt. Er postulierte, daß die Sonne im Mittelpunkt steht und die Planeten um diese Sonne kreisen (siehe Abb. 1.1.1). Die Planeten Venus und Merkur befinden sich innerhalb der Erdbahn und die Planeten Mars, Saturn und Jupiter außerhalb. Demnach ist es auch nicht verwunderlich, daß Venus und Merkur *immer* in der Nähe der Sonne sichtbar sind. Das scheinbare Zurücklaufen der Planeten vor dem Fixsternhimmel wird damit auch zwanglos erklärt, wie man sich an Abb. 1.1.1 veranschaulichen kann.

Leider ist diese erste zutreffende Beschreibung in Vergessenheit geraten. **Ptolemäus** stellte um 160 n. Chr. die Erde in den Mittelpunkt und forderte, daß alle Planeten und die Sonne um diese Erde kreisen. Damit die zwei Beobachtungen wie oben beschrieben erklärt werden können, stellte er zusätzlich die Theorie auf, daß die Bewegung der Planeten nicht eine einfache Kreisbahn sondern eine Überlagerung von zwei Kreisbewegungen ist: eine auf einem einfachen Kreis, dem eine auf einem oder mehreren Sub-Kreisen den **Epizyklen** überlagert ist, wie in Abb. 1.1.2 dargestellt ist. Dadurch kann man das Rücklaufen der Planeten vor dem Fixsternhimmel relativ einfach erklären. Die Tatsache allerdings, daß Venus und Merkur nur nahe der Sonne

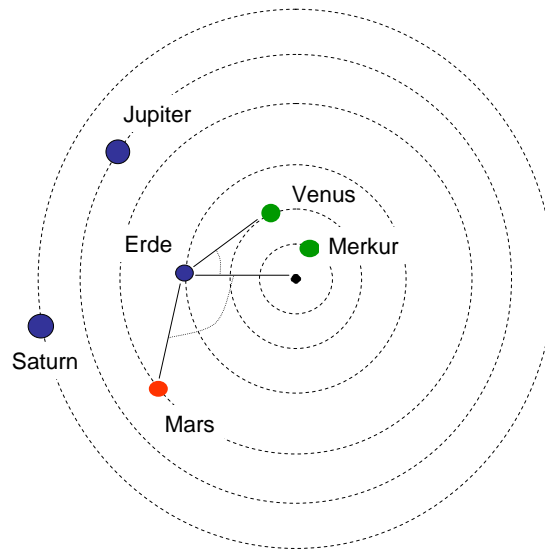


Abbildung 1.1.1: Heliozentrisches Weltbild von Aristarch. Der Winkel unter dem Sonne und Venus bzw. Merkur zueinander am Fixsternhimmel stehen ist immer klein.

zu sehen sind erfordert eine sehr genaue Überlagerung der Bewegung auf dem Kreis und seinen Epizyklen. Das Modell von Ptolemäus hatte erstaunliche Vorhersagekraft. So kann es den Verlauf der Planeten mehrere hundert Jahre im Voraus im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit korrekt vorhersagen.

Nikolaus Kopernikus (1473-1543) hat wiederum die Sonne in den Mittelpunkt gestellt, beließ aber die Beschreibung der Bewegung mittels Kreisbahn und Epizyklus. Durch diese Änderung des Mittelpunktes ließ sich die Tatsache, daß Venus und Merkur nur nahe der Sonne zu finden sind wieder einfach erklären. Kopernikus benötigte aber die Epizyklen um die genaue Bahn der Planeten beschreiben zu können. So ist zum Beispiel das Winterhalbjahr etwas kürzer als das Sommerhalbjahr auf der Erde. Damit bewegt sich die Erde nahe der Sonne schneller auf ihrer Umlaufbahn als weiter entfernt.

Johannes Kepler (1571-1630) hat auf der Basis der Beobachtungsdaten von **Tycho Brahe** (1546-1601) schließlich korrekt festgestellt, daß die Planeten nicht auf Kreisbahnen, sondern auf Ellipsen die Sonne umkreisen. Die Sonne befindet sich hierbei in einem der Brennpunkte dieser Ellipse (siehe Abb. 1.1.3). Damit lassen sich die Schwankungen in den Umlaufgeschwindigkeiten genau erklären. Dies machte die Einführung der Epizyklen überflüssig. Durch die genaue Beobachtung der Planetenbewegung stellte Kepler mehre-

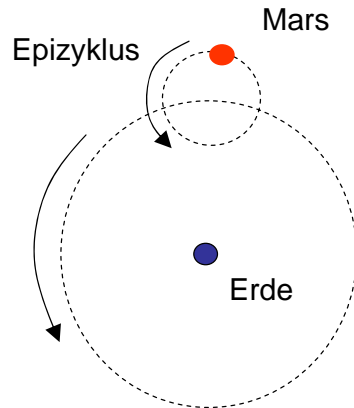


Abbildung 1.1.2: Epizyklen im Ptolemäischen Weltbild

re Gesetze auf, die unter anderem die Umlaufzeiten der einzelnen Planeten und den Durchmesser ihrer Umlaufbahn in Beziehung zueinander stellen. Die Umlaufzeiten T von zwei Planeten 1 und 2 verhalten sich zu den Großen Halbachsen a der Ellipsen ihrer Umlaufbahn wie:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (1.1.1)$$

Dieses Gesetz besitzt universelle Gültigkeit für alle Planeten.

Isaac Newton (1643-1727) erkannte schließlich, dass die Massenanziehung von zwei Körpern auf der Erde auch die Bewegung der Planeten um die Sonne richtig beschreibt. Er konnte mehrere Phänomene (der freie Fall und die Planetenbewegung) auf die Wirkung von ein und derselben Kraft zurückführen, der Gravitation. Die Abhängigkeit der Stärke dieser Kraft vom Abstand zweier Körper konnte Newton aus den Keplerschen Gesetzen für die Planetenbewegung ableiten. Diese Gravitationskraft ergab:

$$\vec{F}_{Gravitation} = -G \frac{m_{Planet} M_{Sonne}}{R^2} \frac{\vec{r}}{R} \quad (1.1.2)$$

wobei G die Gravitationskonstante ($6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$) ist, m_{Planet} und M_{Sonne} die Masse von Planet und von Sonne und R der Abstand Sonne Planet ist. Wendet man die Newton'schen Axiome der Mechanik auf die Planetenbahn an, die sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft der Sonne

befindet, so erhält man die Beziehung 1.1.1, wie weiter unten beschrieben wird.

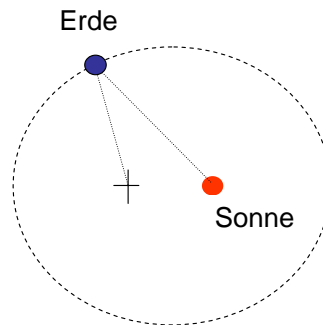


Abbildung 1.1.3: Nach Kepler laufen alle Planeten auf Ellipsenbahnen um die Sonne.

Wie entwickelte sich jetzt der **Erkenntnisprozeß** der Physik? Zunächst hatte Aristarch schon das richtige Modell aufgestellt. Es war allerdings ein sehr grobes, da er keine Ellipsenbahnen sondern Kreisbahnen postulierte. Die Einführung von einem geo-zentrischen Bild und den Epizyklen war ein Irrweg, der allerdings zunächst die Planetenbewegung gut beschreiben konnte. Die viel genauere Beobachtung der Planetenbewegung mit besseren Instrumenten führte wieder zum heliozentrischen Weltbild und zu Ellipsen als Umlaufbahn. Diese lassen sich schließlich aus dem Gravitationsgesetz und der Newtonschen Mechanik begründen. Somit lassen sich die komplizierten Planetenbewegungen aus den einfachen Gesetzen der Mechanik und der Gravitationskraft ableiten.

Ist damit das Problem im Sinne der Physik gelöst? Mitnichten. Die mikroskopische Natur der Gravitation ist noch immer eines der ungelösten Rätsel der Physik. Bei anderen Wechselwirkungen, wie der elektrostatischen Wechselwirkung als Anziehungskraft zwischen Ladungen ist die mikroskopische Natur gut verstanden. Bei der Gravitation ist diese Frage immer noch offen. So wird derzeit durch immer genauere Messungen versucht Abweichungen von dem Gravitationsgesetz zu entdecken, um damit Rückschlüsse ziehen zu können ob es Aspekte an der Gravitationskraft gibt, die bislang noch nicht beschrieben sind.

Eines der wichtigsten Naturphänomene, das auf die Menschen unmittelbar einwirkt ist die Erdanziehung. Die Physik versucht dieses Phänomen in Zahlen zu fassen und damit beherrschbar zu machen. Besondere Motivation

war dafür die Beschreibung der Bahn von Flugkörpern im Schwerfeld der Erde (Beispiel Kanonenkugel).

Um die Bewegung eines Körpers im Schwerfeld der Erde zu untersuchen ist der freie Fall die denkbar einfachste Anordnung. Hierbei zeigt sich allerdings, daß die an sich so einfache Aufgabenstellung nicht einfach in einem Experiment nachgebildet werden kann. Stellt man sich auf einen hohen Turm und läßt mehrere unterschiedliche Körper zu Boden fallen, so wird man feststellen, daß diese zu sehr unterschiedlichen Zeiten auf den Boden auftreffen. So fällt ein Stein schneller als ein Blatt Papier.

Bei dieser Experimentanordnung wird die Luftreibung nicht ausgeschlossen. Würde man den freien Fall im luftleeren Raum durchführen so beobachtet man, daß alle Körper zum selben Zeitpunkt den Erdboden erreichen. Die Fallzeit ist unabhängig von der Masse des Körpers und von deren Form und Beschaffenheit, wie es **Galileo** postuliert hatte.

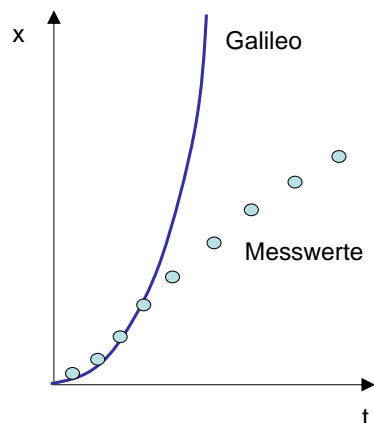


Abbildung 1.1.4: Das Gesetz des freien Falls läßt sich nur im luftleeren Raum eindeutig beobachten. Kommt die Luftreibung hinzu werden im Weg-Zeit-Diagramm deutliche Abweichungen davon beobachtet.

Trägt man die zurückgelegte Entfernung gegenüber der Zeit auf, wie in Abb. 1.1.4 dargestellt, so stellt man fest, daß bei einem Experiment unter Luftreibung, also das Beispiel mit dem Turm, die Messwerte deutlich von der Vorhersage Galileos abweichen. Nach dieser Vorhersage ist die zurückgelegte Strecke x nach einer Zeit t :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.1.3)$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist. Im luftleeren Raum wird die Geschwindigkeit eines Körpers beim Fallen immer größer, während sie bei Luftreibung gegen einen festen Wert läuft, der von der Form des Körpers abhängt, entsprechend seinem Luftwiderstand.

Was bedeutet dies für den Erkenntnisprozeß? Hätte man nur das Experiment mit dem Turm, so wäre es nahezu unmöglich das Gesetz des freien Falls zweifelsfrei zu bestätigen. Dieses Gesetz bliebe damit nur gültig für Körper die einen kleinen Luftwiderstand haben. Das illustriert, daß es für die Aufklärung von Naturgesetzen wichtig ist möglichst reine Experimente durchführen zu können, bei denen nur ein bzw. nur ein einziger Effekt isoliert vermessen wird.

1.2 Maßeinheiten der Physik

Das Messen eines Naturphänomens erfolgt immer in entsprechenden Einheiten.

1.2.1 Längen

Die Einheit für die Länge hatte sich in der Historie immer an natürlichen Größenskalen der menschlichen Erfahrung orientiert, wie der Elle, das Fuß etc. 1875 wurde jedoch das Meter als Einheit definiert, wobei die ursprüngliche Vorgabe war den $1/40.000.000$ Teil des Erdumfangs zu nehmen. Dieser Urmeter aus einer Metallegierung wurde danach in Paris aufbewahrt und zur Eichung entsprechender Maßstäbe herangezogen.

Ab 1983 ist allerdings die Möglichkeit Zeiten zu messen sehr weit fortgeschritten (siehe unten), so daß die Längenmessung sehr viel genauer wurde, wenn man sie auf eine Zeitmessung reduzierte. Da die **Lichtgeschwindigkeit** eine feste Naturkonstante ist, wurde die Einheit Meter auf die Strecke festgelegt, die ein Lichtblitz in $1/299792458$ s durchläuft (siehe Abb. 1.2.5).

Größenskalen in der Natur reichen von 10^{-18} m, einem Attometer, für die Ausdehnung eines Elektrons, bis zu 3×10^{25} m für die Ausdehnung des Weltalls.

1.2.2 Zeiten

Die Messung von Zeiten hatte historisch große Bedeutung, da es für die Navigation unerlässlich war eine genaue Zeitmessung durchführen zu können. Der Längengrad war nur dann eindeutig definiert, wenn man den Höchststand der Sonne zu Mittag mit der Zeit einer Uhr vergleicht. Reist man von Europa

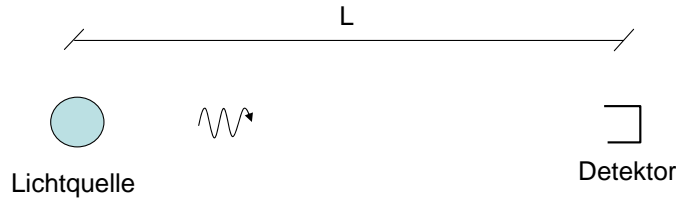


Abbildung 1.2.5: Die Längenmessung wird auf eine Zeitmessung zurückgeführt bei der ein Lichtblitz eine Strecke L durchläuft.

nach Amerika und stellt seine Uhr nicht nach, so ist der Zeitpunkt der Mittagssonne nach dieser Uhr immer später, je weiter man nach Westen fährt. Dieser Vergleich zeigt einem genau auf welchem Längengrad man sich befindet.

Nach den mechanischen Zeitmessern, waren elektronische Zeitmesser lange Zeit Standard. Hierbei wird ein Kristall in einem elektrischen Feld zu Schwingungen angeregt. Seine Eigenfrequenz gilt als Taktgeber einer Uhr. Die präzisesten Uhren sind allerdings **Atomuhren**, wie schematisch in Abb. 1.2.6 illustriert ist. Dies soll am Beispiel der Cäsiumuhr erläutert werden.

Ein Cäsiumatom besitzt ein magnetisches Moment, gleich einer Kompaßnadel. In einem inhomogenen Magnetfeld erfährt es je nach Orientierung eine anziehende bzw. abstoßende Kraft. Damit läßt sich mittels eines speziell gestalteten Magnetfeldes eine magnetische Linse erzeugen, ähnlich einer optischen Linse für Lichtstrahlen. Der Brennpunkt dieser Linse hängt von dem magnetischen Moment der Teilchen ab, die sie fokussieren soll. Dies ist analog zur Optik bei der der Brennpunkt in der Regel auch von der Wellenlänge oder Farbe des Lichts abhängt (chromatische Aberration).

In einem Ofen wird ein Atomstrahl aus Cäsiumatomen erzeugt, die eine erste magnetische Linse durchlaufen. In dem Brennpunkt der ersten Linse befindet sich ein Resonator, der bei der Einstrahlung eines elektromagnetischen Feldes passender Frequenz, das magnetische Moment dieser Cäsiumatome ändern kann (Hyperfeinstrukturaufspaltung $F = 3 \rightarrow F = 4$). Damit ändert sich der Brennpunkt der zweiten magnetischen Linse und der Detektor, der in dem Brennpunkt der zweiten Linse sitzt, wird erreicht. Stimmt die Frequenz allerdings nicht, so bleibt das magnetische Moment des Cäsiumatoms konstant und die Atome werden auf einen Ort vor bzw. hinter dem Detektor fokussiert. D.h. das Detektorsignal bleibt klein. Koppelt man das Signal dieses Detektors mit dem Frequenzgenerator, der das elektromagnetische Feld

im Resonator erzeugt, so erhält man ein Frequenznormal, das auf die Resonanzfrequenz 9192,631770 MHz des Übergangs im Cäsiumatom abgestimmt ist.

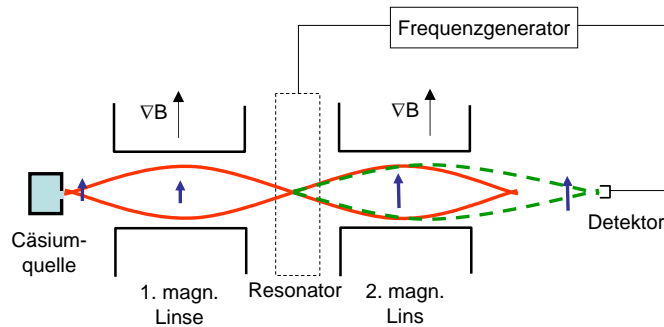


Abbildung 1.2.6: In einer Atomuhr dient ein Hyperfeinstrukturübergang in einem Cäsiumatom als Frequenznormal.

Die Einheit der Zeit ist die Sekunde entsprechend $1/9192631770$ s der Schwingungsperiode der Cäsiumuhr.

1.2.3 Masse

Bei der Bestimmung der Masse wird der Vergleich zu einer Referenzmasse herangezogen. Die Einheit ist das Kilogramm, wobei ein **Urkilogramm** für die Eichung anderer Massen mittels Balkenwaage verwendet wird.

Es wurde auch versucht, das Kilogramm über die Masse eines einzelnen Atoms zu definieren. Hierzu muß ein Körper gefertigt werden, der eine definierte Anzahl von Atomen enthält. Der Abstand von Atomen in einem Kristall läßt sich mittels Röntgenbeugung gut bestimmen. Fertigt man einen Körper mit genau bekannter Ausdehnung, so kann man die Zahl der darin enthaltenen Atome aus dessen makroskopischer Geometrie ermitteln. Die Fertigungsmöglichkeiten für diesen Körper erreichen allerdings zur Zeit noch nicht eine Güte, die die Genauigkeit gegenwärtiger Massestandards überbietet.

1.3 Messen physikalischer Größen

Das Messen physikalischer Größen ist ein Grundbestandteil der Physik, da nur der Vergleich zwischen einer Vorhersage und einer genauen Messung die

Überprüfung von Modellen erlaubt. Je genauer eine Messung durchgeführt werden kann, desto kritischer lassen sich Hypothesen der Naturwissenschaften verifizieren oder falsifizieren.

1.3.1 SI-System, Umrechnung von Einheiten

Physikalische Größen werden in Einheiten gemessen. Das gültige Einheitensystem ist das **SI-System** (SI...Systeme Internationale) mit den Basiseinheiten **kg, m, s** für Massen, Längen und Zeiten.

Zehnerpotenzen können durch Wortzusätze ausgedrückt werden, um praktische abgeleitete Einheiten zu bekommen. So sind Potenzen kleiner als 1: *milli* für 10^{-3} , *micro* für 10^{-6} , *nano* für 10^{-9} und *pico* für 10^{-12} . Potenzen größer als 1 sind: *kilo* für 10^3 , *Mega* für 10^6 , *Giga* für 10^9 und *Tera* für 10^{12} .

Das Umrechnen von Einheiten geschieht indem man die Einheiten formal mit in die Gleichung schreibt und sie dort durch den jeweiligen Umrechnungsfaktor ersetzt:

$$10 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{1000\text{m}}{60\text{min}} = 10 \frac{1000\text{m}}{60 \cdot 60\text{s}} = \frac{10000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 2.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.3.4)$$

1.3.2 Messgenauigkeit und Messfehler

Messfehler

Jede Messung ist mit einem Fehler behaftet. Man unterscheidet prinzipiell zwei Sorten von Fehlern:

- **systematische Fehler**

Systematische Fehler entstehen zum Beispiel durch die Verwendung eines falschen Maßstabes, d.h. ein Metermaß ist in Wahrheit nicht genau ein Meter lang. Somit ergeben alle Messungen einen Wert, der um einen konstanten Faktor von der Wahrheit abweicht. Ein weiteres Beispiel ist die Nicht-Berücksichtigung von Effekten wie Magnetfeldern, Fehlern in der Experimentkonzeption etc.

Bei systematischen Fehlern sind alle Messungen in *gleicher* Weise betroffen, und die unendliche Wiederholung einer Messung verbessert nicht die Güte der Vorhersage.

- **statistische Fehler**

Statistische Fehler entstehen durch Schwankungen in der Durchführung einer Messung. Durch häufiges Wiederholen einer Messung läßt sich der statistische Fehler reduzieren.

Die Behandlung statistischer Fehler sei im folgenden diskutiert. Betrachten wir zunächst N Messungen einer Größe x . Der Mittelwert $\langle x \rangle$ (alternative Schreibweise \bar{x}) dieser Messungen ergibt:

$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.3.5)$$

Falls wir unendlich viele Messungen durchführen können, so erhalten wir im Grenzfall den wahren Wert x_{wahr} für x .

$$x_{wahr} = x_w = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.3.6)$$

Jede einzelne Messung x_i weicht um einen Fehler e_i von dem wahren Wert x_w ab. Dies gilt ebenso für den Fehler ϵ des Mittelwertes.

$$e_i = x_w - x_i \quad (1.3.7)$$

$$\epsilon = x_w - \bar{x} \quad (1.3.8)$$

Der Fehler der Einzelmessung und der des Mittelwertes sind verknüpft durch:

$$\epsilon = x_w - \bar{x} = x_w - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_w - x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i \quad (1.3.9)$$

Der Betrag der Fehler ist gegeben durch:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N e_i \right)^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N e_i^2 + \underbrace{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N e_i e_j}_{=0, N \rightarrow \infty} \quad (1.3.10)$$

Hierbei gilt zu beachten daß die Summation über die Elemente $e_i e_j$ Null ergibt, da die Fehler der Einzelmessung *unkorreliert* sind, d.h. ein Fehler der Messung i ist *unabhängig* vom Fehler der Messung j . Damit heben sich die Produkte $e_i e_j$ im Mittel auf.

Die sogenannten **Standardabweichung** des Mittelwertes σ_m ist definiert als:

$$\sigma_m = \sqrt{\langle \epsilon^2 \rangle} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_w - x_i)^2} \quad (1.3.11)$$

bzw. einer Einzelmessung als:

$$\sigma = \sqrt{\langle \epsilon^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_w - x_i)^2} \quad (1.3.12)$$

Man erkennt, daß die Standardabweichung einer Einzelmessung σ mit der Standardabweichung des Mittelwertes σ_m verknüpft ist durch:

$$\boxed{\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma} \quad (1.3.13)$$

D.h. falls eine einzelne Messung 5% Fehler (σ) hat, so benötigt man 100 Messungen um den Fehler für den Mittelwert (σ_m) auf 0.5% zu reduzieren.

Im allgemeinen ist allerdings der wahre Wert für x nicht bekannt, sondern es läßt sich nur durch eine endliche Anzahl von Messungen ein Mittelwert bilden. Wie ist dann die Standardabweichung zu ermitteln? Betrachten wir zunächst die Abweichung Δx_i einer einzelnen Messung i vom Mittelwert \bar{x} :

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i = \underbrace{x_w - x_i}_{=e_i} - \underbrace{(x_w - \bar{x})}_{=\epsilon} \quad (1.3.14)$$

Die mittlere quadratische Abweichung ist gegeben als:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e_i - \epsilon)^2 & (1.3.15) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 - 2\epsilon \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i}_{=\epsilon} + \epsilon^2 = \\ &= \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^N e_i^2}_{\sigma^2} - \underbrace{\epsilon^2}_{\sigma_m^2} \end{aligned}$$

Man bekommt:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta x^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i) & (1.3.16) \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right)}_{=\frac{N-1}{N^2}} \underbrace{\sum_{i=1}^N (x_w - x_i)^2}_{N\sigma^2} \\
&= \frac{N-1}{N} \sigma^2
\end{aligned}$$

Setzt man für $\langle \Delta x^2 \rangle$

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i) \quad (1.3.17)$$

ein, läßt sich dies wieder nach der Standardabweichungen σ und σ_m auflösen via:

$$\sigma = \sqrt{\langle e^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2} \quad (1.3.18)$$

$$\sigma_m = \sqrt{\epsilon^2} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2} \quad (1.3.19)$$

Bei diesen Ausdrücken wird alles von dem *gemessenen* Mittelwert \bar{x} abgeleitet. Für $N \rightarrow \infty$ gehen die Gleichungen 1.3.11 und 1.3.12 in 1.3.18 und 1.3.19 über.

Fehlerfortpflanzung

Oftmals setzt sich das Ergebnis einer Messung aus einer Anzahl von einzelnen Größen zusammen. Wie groß ist jetzt der Fehler des Ergebnisses, wenn man zunächst nur den Fehler der Eingangsgrößen kennt? Betrachten wir dazu eine Messung einer Größe y , die von den Eingangsgrößen x_i abhängt; $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Der Fehler in der Größe y bestimmt sich dann aus den partiellen Ableitungen und den Fehlern der Eingangsgrößen $\Delta x_1, \Delta x_2$ etc., gemäß:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx_1} \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{dy}{dx_2} \Delta x_2 \right)^2 + \left(\frac{dy}{dx_3} \Delta x_3 \right)^2 + \dots} \quad (1.3.20)$$

Grundsätzlich gibt man die Genauigkeit eines Ergebnisses immer auf diejenige Anzahl der Stellen nach dem Komma an, die dem *ungenauesten* Wert für eine Eingangsgröße entspricht. D.h. ist eine der Eingangsgrößen nur auf eine Nachkommastelle bekannt, so ist das Ergebnis für Δy auch nur auf eine Nachkommastelle genau anzugeben.

Kapitel 2

Mechanik

Die Mechanik beschreibt die Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Das Verständnis dieser Zusammenhänge und die Vorhersage von z.B. der Flugbahn eines Körpers auf der Erde, sei es ein Ball, Pfeil oder Kanonenkugel war schon historisch von herausragender Bedeutung. Die Anfänge der Mechanik wurden von **Galileo** (1564-1642) gelegt, der als der erste Experimentalphysiker gelten kann, da er durch Versuche herausgefunden hat, daß alle Körper unter dem Einfluss der Schwerkraft eine Beschleunigung erfahren, die unabhängig von Form und Masse des Körpers ist. Dies war entgegen der Lehrmeinung, die auf der Idee von **Aristoteles** (384 - 322 v. Chr.) beruhte, der die *gleichförmige* Bewegung eines Körpers als das Ergebnis des Gleichgewichts zwischen Antrieb und Widerstand auffasste. Nach diesem Bild war erklärlich, warum z.B. ein Schiff, das schneller fahren sollte, eine Mannschaft benötigt, die stärker rudert. Mit diesem Bild konnte Aristoteles allerdings nicht den Fall eines Objektes eindeutig beschreiben, da unklar bleibt ob die beobachtete Beschleunigung durch einen größeren Antrieb oder einen geringeren Widerstand hervorgerufen wurde.

2.1 Mechanik eines Massenpunktes

Im folgenden sollen die Grundzüge der Mechanik zur Beschreibung sich bewegender Objekte erläutert werden. Eine typische Problemstellung ist der Wurf eines Objektes, bei dem man fragen könnte: Wie muß ich werfen, um die größte Weite zu erzielen? Macht es einen Unterschied, ob ich den Körper auf der Erde werfe oder auf dem Mond? Welches Ergebnis erhalte ich, wenn ich den Körper aus einem fahrenden Zug werfe?

2.1.1 Bewegung eines Massenpunktes

Bewegung in einer Dimension

Beschränken wir uns zunächst auf Bewegungen in einer Dimension x (siehe Abb. 2.1.1).

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2.1.1)$$

Die Bewegung entspricht der Verschiebung des Ortes um Δx in einem Zeitraum Δt .



Abbildung 2.1.1: Ort x im Eindimensionalen.

Aus der Art dieser Verschiebung lassen sich jetzt mehrere Größen ableiten.

- **mittlere Geschwindigkeit**

Die mittlere Geschwindigkeit ist definiert als die Änderung Δx des Ortes pro Zeitraum Δt

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.1.2)$$

Diese Geschwindigkeit kann positiv oder negativ sein, je nachdem ob Δx ein positives oder negatives Vorzeichen hat.

- **momentane Geschwindigkeit**

Die momentane Geschwindigkeit erhält man, wenn man den Grenzfall kleiner Zeiträume Δt betrachtet:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.1.3)$$

Diese momentane Geschwindigkeit entspricht der Ableitung des Ortes nach der Zeit.

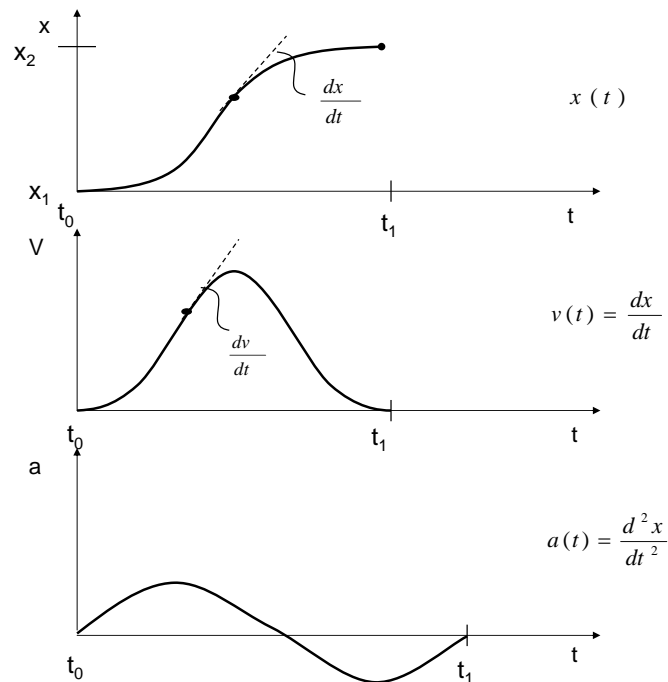


Abbildung 2.1.2: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

- **mittlere Beschleunigung**

Nach demselben Muster lässt sich die mittlere Beschleunigung definieren als der Unterschied in der Geschwindigkeit pro Zeitraum Δt :

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.1.4)$$

- **momentane Beschleunigung**

Auch hier entspricht der Grenzwert kleiner Zeiträume Δt der momentanen Beschleunigung:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (2.1.5)$$

Der Zusammenhang zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung lässt sich auch kompakter schreiben:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.1.6)$$

Die Beschleunigung ist somit die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Ein typischer Zusammenhang zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung ist in Abb. 2.1.2 gezeigt.

Im folgenden wollen wir den Sonderfall einer *gleichmäßig beschleunigten Bewegung* auf zwei Arten betrachten:

- **Ableitung über mittlere Größen**

Die Beschleunigung sei konstant. D.h. die Änderung der Geschwindigkeit von v_0 auf v in einem Zeitraum t ($t_0 = 0$) ist:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t} \quad (2.1.7)$$

Dies läßt sich auflösen zu:

$$v = v_0 + at \quad (2.1.8)$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t} \quad (2.1.9)$$

Aufgelöst nach dem Ort x ergibt sich:

$$x = x_0 + v_m t \quad (2.1.10)$$

mit der mittleren Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{1}{2}(v_0 + v) \quad (2.1.11)$$

ergibt sich schließlich der Ausdruck:

$$\boxed{x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2} \quad (2.1.12)$$

- **Ableitung über Integration**

Als alternative Ableitung gehen wir von der allgemein gültigen Beziehung

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.1.13)$$

aus. Zunächst integrieren wir beide Seiten über die Zeit und erhalten.

$$\int_0^t a dt = \int_0^t \frac{d^2x}{dt^2} dt \quad (2.1.14)$$

$$at = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} + c_1 \quad (2.1.15)$$

mit der Integrationskonstanten c_1 . Mit der Anfangsbedingung $v(t = 0) = v_0$ ergibt sich $c_1 = -v_0$. D.h. man bekommt:

$$at = \frac{dx}{dt} - v_0 \quad (2.1.16)$$

Wir integrieren ein zweites Mal

$$\int_0^t at = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt - \int_0^t v_0 dt \quad (2.1.17)$$

und bekommen

$$\frac{1}{2}at^2 = x + c_2 - v_0t \quad (2.1.18)$$

mit der Integrationskonstanten c_2 . Mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$ ergibt sich $c_2 = -x_0$. D.h. man bekommt schließlich:

$$\boxed{x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t} \quad (2.1.19)$$

Man erkennt, daß beide Wege zu dem identischen Ergebnis führen. Die Variation von x , v und a nach Gl. 2.1.19 erfolgt wie in Abb. 2.1.3 veranschaulicht.

Die quadratische Abhängigkeit des Ortes von der Zeit läßt sich in einem einfachen Experiment veranschaulichen, wie es schon Galilei durchgeführt hat. Man hängt vier Kugeln in quadratischem Abstand an einer Schnur. Läßt man diese Kugeln gleichzeitig zu Boden fallen, so kommen sie in *regelmäßigen* Abständen am Boden an, wie in Abb. 2.1.4 veranschaulicht ist.

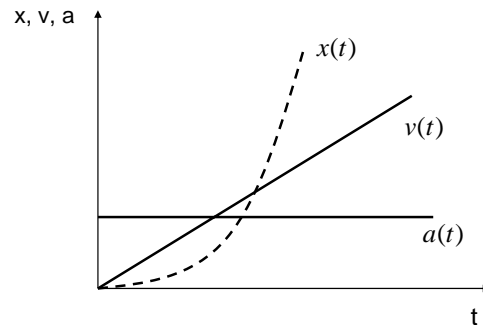


Abbildung 2.1.3: Variation von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit der Zeit.

Bevor wir die Bewegung in drei-dimensionalen beschreiben, wollen wir kurz die Benutzung von Vektoren im kartesischen Koordinatensystem einführen.

- **Definition**

Ein Vektor ist durch seine drei Komponenten x , y und z wie in Abb. 2.1.5 definiert.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.1.20)$$

oder

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (2.1.21)$$

- **Länge eines Vektors**

Die Länge oder Betrag eines Vektors berechnet sich zu:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.1.22)$$

- **Addition zweier Vektoren**

Zwei Vektoren werden addiert, indem beide Vektoren aneinander gesetzt werden, gemäß Abb. 2.1.6:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad (2.1.23)$$

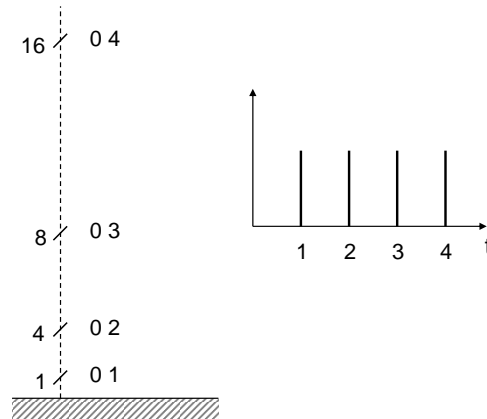


Abbildung 2.1.4: Freier Fall. Hängt man vier Kugeln in quadratischem Abstand zum Boden auf und lässt diese dann fallen, so kommen sie in regelmäßigen Zeitabständen am Boden an.

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (2.1.24)$$

Als Beispiel für die Addition von Vektoren sei ein Flugzeug gegeben, das sich mit einer Geschwindigkeit bezüglich einer Luftströmung bewegen kann. Die resultierende Bewegungsrichtung des Flugzeugs relativ zum Boden ist die Summe der Vektoren der Windgeschwindigkeit und der Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs (siehe Abb. 2.1.6).

- **Subtraktion zweier Vektoren**

Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem die Spitzen aneinander gesetzt werden, gemäß:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \quad (2.1.25)$$

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \quad (2.1.26)$$

- **Vektor mit Zahl multiplizieren**

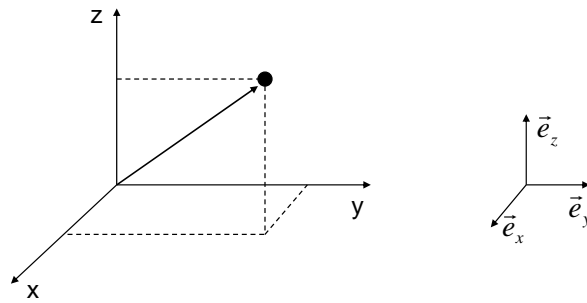


Abbildung 2.1.5: Definition eines Vektors.

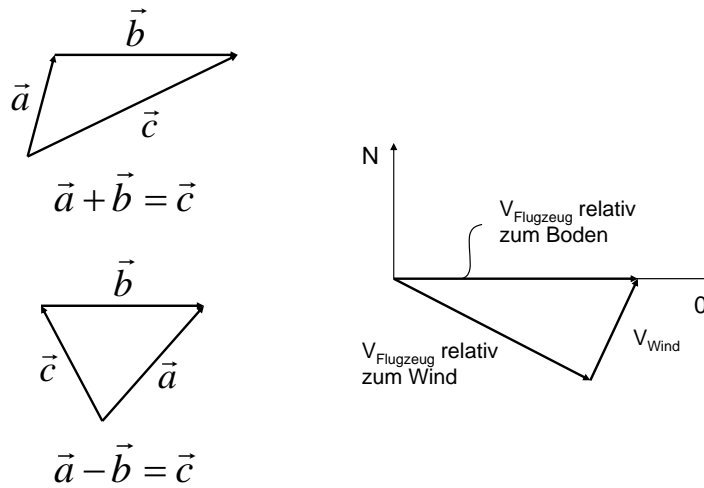


Abbildung 2.1.6: Addition und Subtraktion zweier Vektoren.

Multipliziert man einen Vektor mit einer Zahl k so bekommt man eine Streckung des Vektors:

$$\vec{r} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \quad (2.1.27)$$

• **Skalarprodukt**

Das Skalarprodukt entspricht der Projektion zweier Vektoren aufeinander. Das Ergebnis des Skalarproduktes ist eine Zahl.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \Phi \quad (2.1.28)$$

oder

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.1.29)$$

Das Skalarprodukt ist *kommutativ*, d.h. es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2.1.30)$$

Ein Skalarprodukt wird immer verwendet um einen Ausdruck bezüglich einer Richtung zu erhalten. Ein Beispiel ist die Arbeit als das Skalarprodukt aus Kraft mal Weg. Erfolgt der Weg senkrecht zur wirkenden Kraft, so muß keine Arbeit geleistet werden.

• Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt entspricht dem Flächeninhalt des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms. Das Ergebnis ist ein Vektor \vec{c} , der senkrecht auf der Ebene steht die die Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufspannen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad (2.1.31)$$

Hierbei gilt die **Rechte-Hand-Regel**, d.h. Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger ergeben ein Dreibein entsprechend den Richtungen von \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .

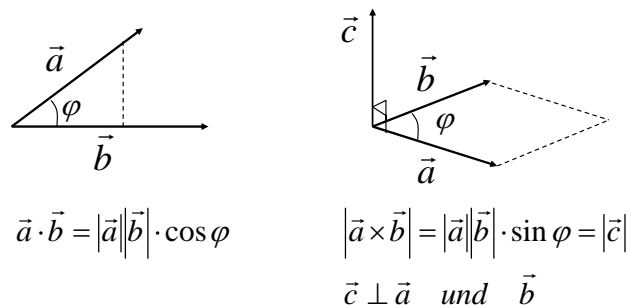


Abbildung 2.1.7: Skalar- und Kreuzprodukt zweier Vektoren.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \Phi \quad (2.1.32)$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (2.1.33)$$

Es gilt zu beachten, daß das Kreuzprodukt *nicht kommutativ* ist. D.h. es muß gelten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (2.1.34)$$

Ein Beispiel für das Kreuzprodukt sei das Drehmoment als Kreuzprodukt aus Kraft und Hebelarm. Dieses Drehmoment wird maximal wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Bewegung in mehreren Dimension

Betrachten wir die beschleunigte Bewegung im dreidimensionalen (Abb. 2.1.9). Wir beginnen mit:

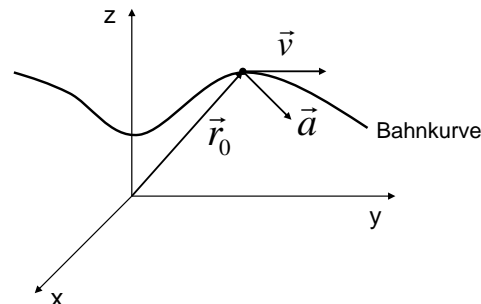


Abbildung 2.1.8: Ortsvektor \vec{r} und Geschwindigkeitsvektor \vec{v} beschreiben die Bahn eines Körpers im dreidimensionalen Raum.

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} \quad (2.1.35)$$

Aufgelöst nach den einzelnen Koordinaten des Ortsvektors ist dies $\ddot{x} = a_x$, $\ddot{y} = a_y$ und $\ddot{z} = a_z$. Integriert man Gl. 2.1.35, so bekommt man

$$\int \ddot{\vec{r}} dt = \dot{\vec{r}} = \vec{v} \quad (2.1.36)$$

Damit wird die Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \int \vec{a} dt = \vec{a}t + b \quad (2.1.37)$$

b ist die Integrationskonstante, die man aus der Anfangsbedingung ableitet: die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Das Integral beschreibt die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit durch die Beschleunigung a über einen Zeitraum t . Man bekommt $b = \vec{v}_0$ und damit:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0 \quad (2.1.38)$$

Dieselbe Integration läßt sich nochmal durchführen

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + c \quad (2.1.39)$$

Auch hierbei entsteht eine Integrationskonstante c , die sich aus der Anfangsbedingung, dem Ort zum Zeitpunkt $t = 0$ ableiten läßt. Man bekommt $c = \vec{r}_0$ und damit:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (2.1.40)$$

Nach Komponenten aufgelöst ergibt sich:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0,x} t + x_0 \quad (2.1.41)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0,y} t + y_0 \quad (2.1.42)$$

$$z(t) = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0,z} t + z_0 \quad (2.1.43)$$

Wir wollen jetzt zwei Beispiele für eine beschleunigte Bewegung diskutieren:

- **der freie Fall**

Wir betrachten eine Kugel die in z -Richtung von einer Höhe h herunterfällt, wie in Abb. 2.1.9 illustriert. Die konstante Beschleunigung ist $a_z = -g$ und $a_x = 0, a_y = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0$ und $x_0 = 0, y_0 = 0$ und $z_0 = h$. Daraus bekommt man die Gleichung:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \quad (2.1.44)$$

Der Ball trifft auf den Boden für $z = 0$. D.h. man bekommt für die Fallzeit t

$$t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} \quad (2.1.45)$$

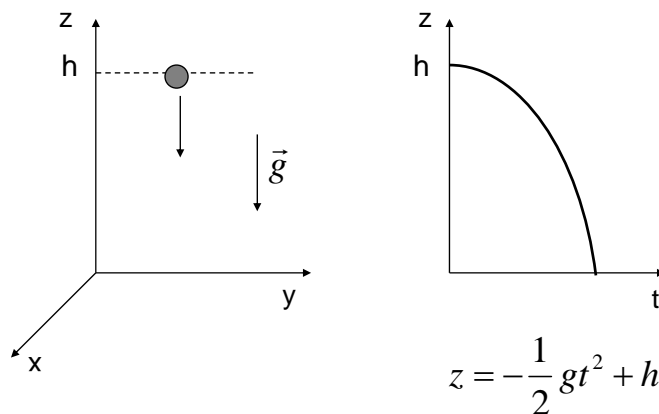
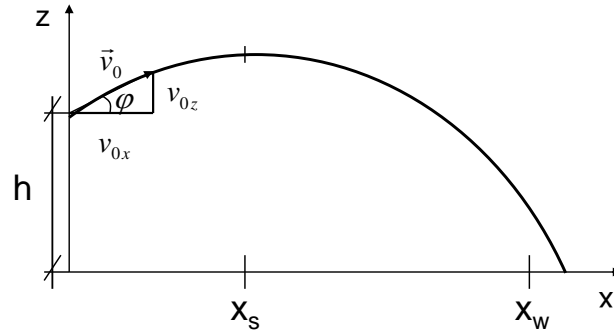


Abbildung 2.1.9: Freier Fall.

• der schräge Wurf

Betrachten wir den schrägen Wurf als die Trajektorie eines geworfenen Balles. Hierbei läßt sich der Abwurfwinkel und die Geschwindigkeit des Balles durch den Werfer kontrollieren. Doch bei welcher Einstellung kommt er am weitesten? Oder unter welchem Winkel muß er den Ball abwerfen, damit er bei gegebener Abwurfgeschwindigkeit ein Ziel erreicht? Das läßt sich jetzt berechnen und vorhersagen. Betrachten wir dazu die Abb. 2.1.10.

Ein Werfer habe die Höhe h und wirft einen Ball unter einem Winkel ϕ zum Erdboden, mit der Geschwindigkeit v_0 ab. Die Anfangsgeschwindigkeit entlang des Erdbodens ist v_{0x} und entlang der z -Koordinate v_{0z} . Die Erdbeschleunigung wirke in z -Richtung. Sie zeigt nach unten $a_{\text{Erdbeschleunigung}} = -g$. Mit diesen Anfangsbedingungen läßt sich Gl. 2.1.40 für die drei Koordinaten schreiben als:

Abbildung 2.1.10: Der schräge Wurf von einer Höhe h .

$$x = v_{0x}t \quad (2.1.46)$$

$$y = 0 \quad (2.1.47)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h \quad (2.1.48)$$

Diese Gleichungen beschreiben jetzt, wie sich der Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ des Balls mit der Zeit ändert. Aus diesen Gleichungen läßt sich $t = \frac{x}{v_{0x}}$ eliminieren und man bekommt einen Zusammenhang zwischen z und x von:

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x + h \quad (2.1.49)$$

Man erkennt das die Höhe der Wurfparabel proportional zum Quadrat des Ortes auf dem Erdboden ist. Man spricht deshalb von einer **Wurfparabel**. Mit dieser Gleichung lassen sich die Fragen von oben jetzt beantworten.

– Unter welchem Winkel wirft man am weitesten?

Am höchsten Punkt der Wurfparabel fliegt der Körper waagrecht zum Erdboden, d.h. die Steigung der Kurve $z(x)$ auf Gl. 2.1.52 ist 0. Dies entspricht mathematisch der Bedingung:

$$\frac{dz}{dx} = 0 = -\frac{g}{v_{0x}^2} x + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \quad (2.1.50)$$

Der Scheitelpunkt x_s der Wurfparabel ist damit:

$$x_s = \frac{v_{0x}v_{0z}}{g} = \frac{v_0^2 \cos \phi \sin \phi}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\phi \quad (2.1.51)$$

Die größte Weite für den Scheitelpunkt erhält man wenn man den Ball unter 45° abwirft. Falls die Höhe h Null ist, erreicht man unter 45° auch die größte Weite.

– Wie weit wirft man?

Der Auftreffpunkt ist definiert für den Ort $z(x = x_W) = 0$. Damit ergibt sich aus Gl. 2.1.52:

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x_W^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x_W + h \quad (2.1.52)$$

Dies läßt sich nach x_W auflösen zu:

$$x_W = \frac{v_{0x}v_{0z}}{g} \pm \left[\left(\frac{v_{0x}v_{0z}}{g} \right)^2 + \frac{2v_{0x}^2}{g} h \right]^{1/2} \quad (2.1.53)$$

Nur das ”+”-Zeichen ergibt hier eine sinnvolle Lösung. Ersetzt man $v_{0z}v_{0x} = \frac{1}{2}v_0^2 \sin 2\phi$ so bekommt man schließlich:

$$x_W = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\phi \left[1 + \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \phi} \right)^{1/2} \right] \quad (2.1.54)$$

Für $h = 0$ wird $x_w = 2x_s$. Für beliebige Werte von h muß man den Ausdruck 2.1.54 für eine Variation von ϕ maximieren. Typische Trajektorien sind in Abb. 2.1.11 gezeigt.

Der schräge Wurf läßt sich gut als Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung und einer beschleunigten Bewegung veranschaulichen. Die Bewegung nach Koordinaten aufgelöst war:

$$x = v_{0x}t \quad (2.1.55)$$

$$y = 0 \quad (2.1.56)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + h \quad (2.1.57)$$

Die Anteile in x und z mit v_{0x} und v_{0z} entsprechen der gradlinigen Bewegung. D.h. wirkt keine Beschleunigung, so erfolgt eine gradlinige Bewegung in der entsprechenden Richtung. Dem überlagert ist die Beschleunigung gemäß g .

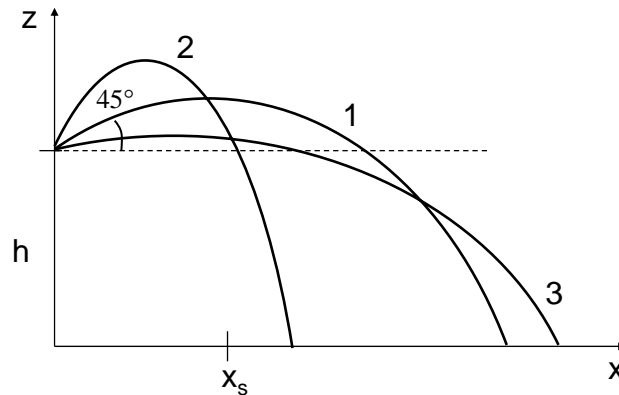


Abbildung 2.1.11: Der schräge Wurf. Ist die Abwurfhöhe die selbe wie die Landehöhe, so ist der optimale Winkel 45 Grad. Wirft man von einem erhöhten Punkt ab, so ist der optimale Winkel etwas kleiner.

Die gleichförmige Kreisbewegung

Im folgenden wollen wir eine Bewegung betrachten bei der die Beschleunigung nicht gleichmäßig ist. Stellt man sich einen Körper vor, der sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt, so muß fortwährend eine Beschleunigung wirken, um diesen Körper auf seiner Kreisbahn zu halten, da diese Bahn nicht einer gleichförmigen *gradlinigen* Bewegung entspricht. Diese Beschleunigung bezeichnet man als **Zentripetalbeschleunigung**, also der Beschleunigung, die zum Zentrum der Kreisbewegung gerichtet ist. Wie ist diese Beschleunigung jetzt mit der Bewegung verknüpft?

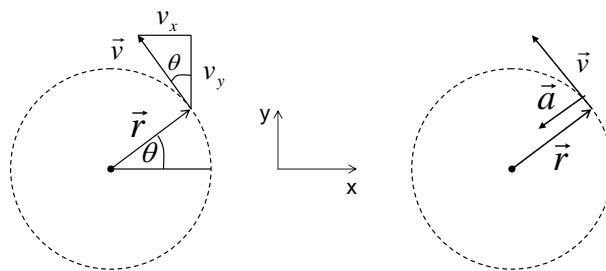


Abbildung 2.1.12: Die gleichförmige Kreisbewegung.

Die Bahngeschwindigkeit sei:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y = -v \sin \Theta \vec{e}_x + v \cos \Theta \vec{e}_y \quad (2.1.58)$$

mit $\sin \Theta = \frac{y}{r}$ und $\cos \Theta = \frac{x}{r}$ ergibt sich:

$$\vec{v} = -v \frac{y}{r} \vec{e}_x + v \frac{x}{r} \vec{e}_y \quad (2.1.59)$$

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Man bekommt, nachdem v konstant ist:

$$\vec{a} = -\frac{v}{r} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v \cos \Theta} \vec{e}_x + \frac{v}{r} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{-v \sin \Theta} \vec{e}_y \quad (2.1.60)$$

oder

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \cos \Theta \vec{e}_x - \frac{v^2}{r} \sin \Theta \vec{e}_y \quad (2.1.61)$$

Die Richtung von \vec{a} zeigt genau in -r-Richtung wegen der Anteile $\cos \Theta$ für die x- und $\sin \Theta$ für die y-Richtung. Der Betrag von \vec{a} ist:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta} = \frac{v^2}{r} \quad (2.1.62)$$

Man bezeichnet \vec{a} als **Zentripetalbeschleunigung** ("zum Zentrum strebend").

Alternativ zu dieser Ableitung der Zentripetalbeschleunigung, wollen wir dasselbe noch einmal unter Verwendung der **Winkelgeschwindigkeit** durchführen.

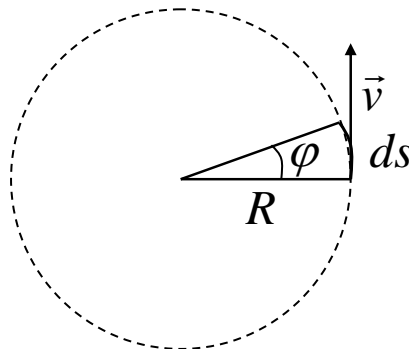


Abbildung 2.1.13: Ableitung Winkelgeschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn (siehe Abb. 2.1.13) ist:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.1.63)$$

Die Wegstrecke Δs auf der Kreisbahn, läßt sich für kleine Winkel $\Delta\varphi$ ausdrücken als:

$$\Delta s = \sin \Delta\varphi R \quad (2.1.64)$$

für kleine Winkel geht der Sinus in sein Argument über:

$$\Delta s = \Delta\varphi R \quad (2.1.65)$$

damit wird die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega \quad (2.1.66)$$

ω ist die sogenannte **Winkelgeschwindigkeit**. Die Bewegung eines Punktes auf dem Kreis in der xy -Ebene läßt sich jetzt schreiben als:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \end{pmatrix} \quad (2.1.67)$$

Die Geschwindigkeit auf diesem Kreis ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (2.1.68)$$

und schließlich die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r} \quad (2.1.69)$$

d.h. die Beschleunigung zeigt immer entgegen des Radiusvektors, also immer in Richtung Mittelpunkt. Dies ist die **Zentripetalbeschleunigung**.

Im allgemeinen Fall ist die Winkelgeschwindigkeit, die die Geschwindigkeit auf der Bahn und der Radius verknüpft durch:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad (2.1.70)$$

Hierbei wird die Winkelgeschwindigkeit als Vektor definiert, der immer senkrecht auf der Bewegungsebene steht, wie in Abb. 2.1.14 verdeutlicht.

Die Gleichung 2.1.70 gilt für beliebigen Ursprung des Koordinatensystems. Die Gleichung läßt sich umformen via:

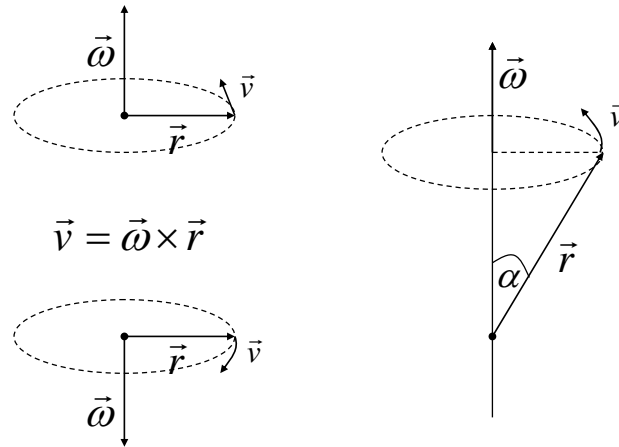


Abbildung 2.1.14: Definition des Vektors der Kreisfrequenz.

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.1.71)$$

mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ergibt sich:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \underbrace{\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}_{=0, \vec{r} \perp \vec{\omega}} \quad (2.1.72)$$

für $\vec{r} \perp \vec{\omega}$. D.h.

$$\omega = \frac{1}{r^2} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (2.1.73)$$

Falls \vec{r} nicht senkrecht auf $\vec{\omega}$ steht, gilt diese Beziehung *nicht*. Deshalb verwendet man zur Sicherheit auch die Notation r_{\perp} gemäß:

$$\omega = \frac{1}{r^2} (r_{\perp} \vec{r} \times \vec{v}) \quad (2.1.74)$$

Die **Zentripetalbeschleunigung** wird oftmals mit der **Zentrifugalbeschleunigung** verwechselt (siehe Abb. 2.1.15). Beide unterscheiden sich wie folgt: Die Zentripetalbeschleunigung ist eine Beschleunigung die ein externer Beobachter wahrnimmt, da der Körper keiner geradlinigen Bewegung folgt sondern einen Kreis beschreibt. Die Zentripetalbeschleunigung ist zum Zentrum des Kreises gerichtet. Die Zentrifugalbeschleunigung sieht ein Beobachter, der sich mit dem Kreis mit bewegt. Für ihn wird eine Scheinkraft

spürbar, die ihn nach außen treibt. Die Zentrifugalbeschleunigung ist radial nach außen gerichtet. Diese unterschiedlichen Sichtweisen werden noch im Kapitel Bezugssysteme näher erläutert.

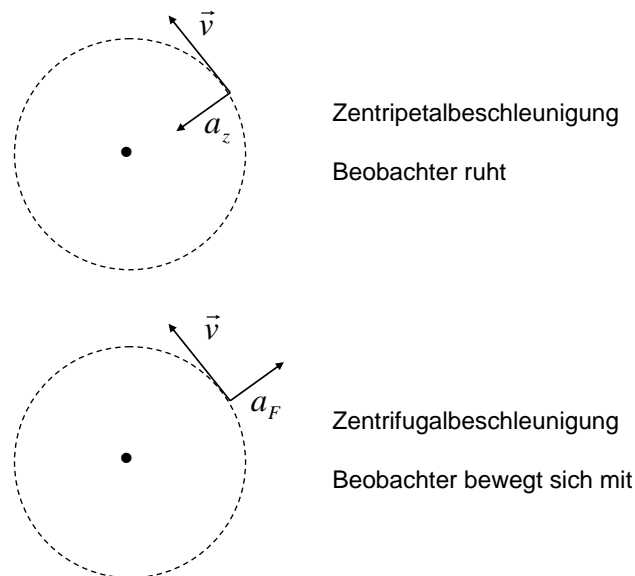


Abbildung 2.1.15: Unterschied Zentripetal-, Zentrifugalbeschleunigung.

2.1.2 Kräfte

Die Newton'schen Axiome

Bislang haben wir immer die Beschleunigung eines Körpers als gegeben betrachtet. Die Ursache für die Beschleunigung sind **Kräfte**. **Newton** postulierte, dass die Ursache für diese Kräfte die **Wechselwirkung** dieser Körper untereinander ist. So ist die Schwerkraft eine Wechselwirkung zwischen der Masse eines Körpers und der Masse der Erde. Neben dieser Gravitationskraft gibt es die elektrostatische Kraft und die starke Wechselwirkung, die die Atomkerne zusammenhält.

Auch eine Kraft wird als Vektor beschrieben, da sie die Richtung der entsprechenden Beschleunigung vorgibt. Am Beispiel der Schwerkraft soll dies erläutert werden. Die Erde lässt sich als Massenpunkt mit Masse M beschreiben, der im Zentrum eines Koordinatensystems sitzen soll. Am Ort \vec{r} befindet sich ein Körper der Masse m . Die Erde übt eine Schwerkraft entsprechend einer Gravitationskonstante G aus mit:

$$\vec{F} = -G \frac{mM \vec{r}}{|\vec{r}|^2 r} \quad (2.1.75)$$

D.h. in dem zentral-symmetrischen Problem des Schwerfeldes der Erde zeigt die Schwerkraft auf einen Körper am Ort \vec{r} immer entgegen der Richtung des Ortsvektors \vec{r} . Diese Schwerkraft kann man als kugelsymmetrisches **Kraftfeld** auffassen, das die Erde umschließt und dessen Stärke quadratisch mit dem Abstand abnimmt.

Die Verknüpfung zwischen Kraft und Beschleunigung hat Newton in seinen drei Axiomen dokumentiert:

- **1. Axiom**

Solange keine Kraft wirkt, verharrt ein Körper in Ruhe oder bei seiner gleichförmigen gradlinigen Bewegung. Diese Bewegung sei durch die Größe **Impuls** beschrieben als:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad \left[kg \frac{m}{s} \right] \quad (2.1.76)$$

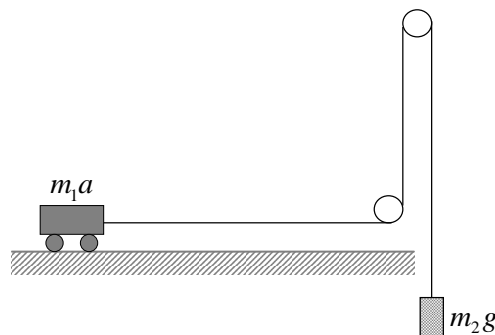


Abbildung 2.1.16: Beschleunigung eines Wagens der Masse m über ein Gewicht.

- **2. Axiom**

Die Ursache für eine Impulsänderung ist das Wirken einer Kraft. Diese Kraft wird definiert als:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \left[kg \frac{m}{s^2} \right] \quad (2.1.77)$$

Die Einheit in der Kräfte gemessen werden ist **Newton**:

$$\boxed{1N = kg \frac{m}{s^2}} \quad (2.1.78)$$

mit der Definition des Impulses bekommen wir:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d}{dt}mv = m\frac{d\vec{v}}{dt} + v\frac{d\vec{m}}{dt}} \quad (2.1.79)$$

In den meisten Fällen ist $m = \text{const.}$ (Gegenbeispiel Rakete), so daß gilt:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \quad (2.1.80)$$

Newton hatte bei der Verknüpfung von Kraft und Beschleunigung die Masse als Proportionalitätskonstante identifiziert. D.h. möchte man die gleichförmige gradlinige Bewegung eines Körpers ändern, so muß man bei größerer Masse auch eine größere Kraft aufwenden. Die Eigenschaft eines Körpers eine gleichförmige gradlinige Bewegung beizubehalten bezeichnet man auch als **Trägheit**. Die Masse kann als Grund für die Trägheit angesehen werden und man bezeichnet sie deshalb auch als **träge Masse**.

Kräfte sind vektorielle Größen für die das **Superpositionsprinzip** gilt. Bei jedem Massenpunkt, der in Ruhe ist bzw. sich gleichförmig geradlinig bewegt, muß die Summe der Vektoren der angreifenden Kräfte Null sein. Im folgenden wollen wir zwei Beispiele für das Superpositionsprinzip diskutieren:

– **Kräftedreieck**

Als Beispiel, sei ein Massenpunkt betrachtet auf den drei Kräfte wirken, wie in Abb. 2.1.17 illustriert. Die drei Kräfte stehen in einem Verhältnis von 5:4:3. Nachdem der Massenpunkt in Ruhe ist, müssen sich die drei Kräfte zu Null addieren. Dies ist dann der Fall, wenn der Winkel zwischen dem Vektor der Länge 3 und dem der Länge 4 genau 90° beträgt, da $3^2 + 4^2 = 5^2$.

– **Ziehen eines Schlittens**

In einem zweiten Beispiel betrachten wir einen Schlitten der Masse m , der unter einem Winkel Θ mit einer Kraft F ($F = |\vec{F}|$) über eine Ebene gezogen wird, wie in Abb. 2.1.18 illustriert. Wir lösen die Kräfte in die x - und y -Richtung auf.

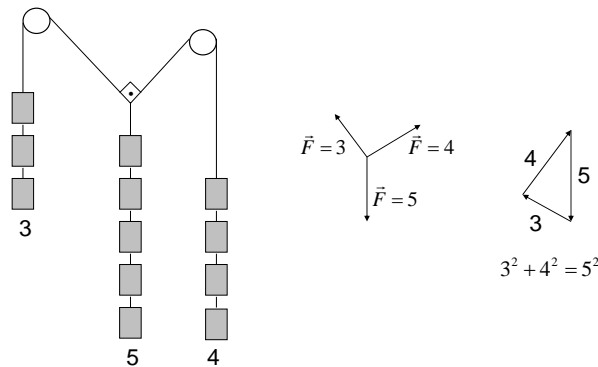


Abbildung 2.1.17: Kräfte als Vektoren.

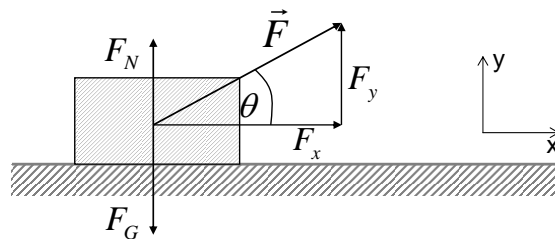


Abbildung 2.1.18: Kräfte als Vektoren, Ziehen eines Schlittens.

Nachdem die Schwerkraft nur in y -Richtung wirkt haben wir in x -Richtung:

$$F \cos \Theta = ma_x \quad (2.1.81)$$

in y -Richtung haben wir die Gravitationskraft F_G :

$$-F_g + F_{Normal} + F \sin \Theta = 0 \quad (2.1.82)$$

In y -Richtung soll sich der Schlitten *nicht bewegen*, d.h. die Summe der Kräfte muß Null ergeben. Dies läßt sich mit einem Kunstgriff erzielen indem man eine neue Kraft einführt, die **Normalkraft** F_{normal} . Die Normalkraft ist eine Kraft, die die Unterlage auf den Schlitten ausübt. Sie stellt sich so ein, daß die Summe der Kräfte in y -Richtung immer Null ist.

• 3. Axiom

Falls nur zwei Körper 1 und 2 miteinander in Wechselwirkung treten, so muß die Kraft auf den einen Körper 1 entgegengesetzt der Kraft auf den anderen Körper 2 sein:

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2} \quad (2.1.83)$$

Newton entwickelte dieses Gesetz aus der Vorstellung einer **Wechselwirkung**, die alle Körper zueinander in Bezug setzt. Diese Wechselwirkung ist zunächst eine *Fernwirkung*, die ohne scheinbaren Kontakt der Körper untereinander zu einer Kraft führt. Dies war eine sehr weitreichende Vorhersage, die erst in der modernen Physik des 20ten Jahrhunderts bestätigt wurde. Vier Arten von Wechselwirkung unterscheidet man in der Natur:

- Die *Gravitationskraft*, als die Kraft, die durch Anziehung der Massen zweier Körper entsteht.
- Die *elektrostatische Kraft*, als die Kraft, die Ladungen aufeinander ausüben.
- Die *starke Kernkraft*, die den Zusammenhalt von Nukleonen im Atomkern vermittelt.
- Die *schwache Kraft*, die bei dem β -Zerfall von radioaktiven Kernen sichtbar wird.

Das 3. Newton'sche Axiom bezieht sich immer auf *zwei* Körper. Es bildet sich immer ein **Kraft-Gegenkraft-Paar**. Die Normalkraft, die auf den Schlitten in obigem Beispiel wirkt, ist kein Kraft-Gegenkraft-Paar, da die Kräfte auf dasselbe Objekt wirken. Ein Kraft-Gegenkraft-Paar wäre dagegen die Anziehungskraft, die die Erde auf den Schlitten ausübt, aber auch die Anziehungskraft, die der Schlitten auf die Erde ausübt. Dies ist in Abb. 2.1.19 illustriert.

Die Folgen des 3. Newton'schen Axioms lassen sich vielfach darstellen. Betrachtet man zum Beispiel zwei, durch ein Seil verbundene Körper, so führt das Ziehen an dem Seil zu einer Kraft und Gegenkraft auf beide Körper. D.h. beide bewegen sich entsprechend $m_1 a_1 = -m_2 a_2$. Dies ist in Abb. 2.1.20 illustriert.

Die Newton'schen Axiome lassen sich am Beispiel des Kettenkarussells illustrieren. Betrachten wir ein Kettenkarussell, an dem sich eine Gondel mit der Masse M befindet und das sich mit einer bestimmten Frequenz im Kreis bewegt. Nehmen wir an, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Kette

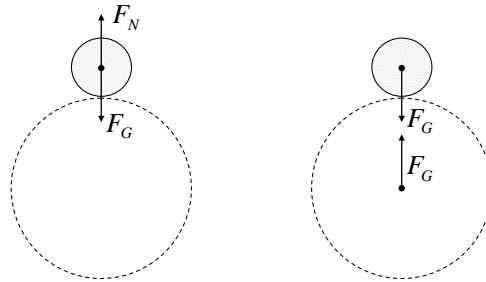


Abbildung 2.1.19: Kräfte-Gegenkraft-Paare.

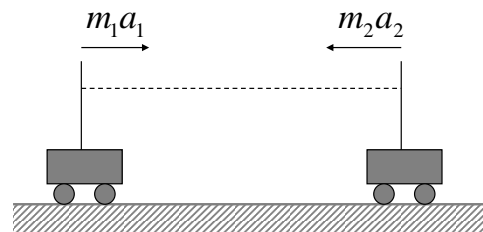


Abbildung 2.1.20: Versuch Zugwagen.

versagt und die Gondel zu Boden fällt. In welche Richtung geschieht das? In Abb. 2.1.21 sind 4 mögliche Varianten illustriert, von denen nur eine zutrifft.

Die Gondel bewegt sich auf ihrer Kreisbahn mit einer Geschwindigkeit \vec{v} . Falls diese Gondel nicht durch die Kette an das Karussell gebunden wäre, würde sie sich auf Grund ihrer Trägheit gradlinig in Richtung des momentanen Geschwindigkeitsvektors bewegen. D.h. nur die Variante 4 in Abb. 2.1.21 ist korrekt.

Beispiel für Kräfte

Im folgenden seien einige Beispiele für Kräfte illustriert. Die **Gravitationskraft** entsteht durch die Anziehung zweier Massen, wie in Abb. 2.1.22 illustriert. Sie skaliert mit den Massen m_1 , m_2 und dem Abstand r wie:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (2.1.84)$$

mit \hat{r} dem Einheitsvektor, der die Massen m_1 und m_2 verbindet. G ist die Gravitationskonstante mit $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Für Phänomene an der Erdoberfläche läßt sich das Gravitationsgesetz kompakter schreiben indem

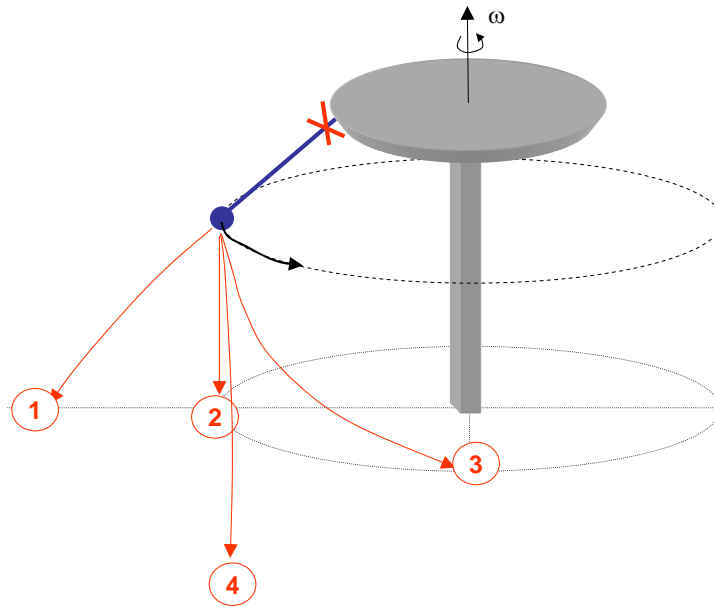


Abbildung 2.1.21: In welche Richtung fällt eine Gondel eines Kettenkarussells, wenn die Kette versagt?

man für m_1 die Masse der Erde und für r den Radius der Erde einsetzt. Man bekommt dann:

$$\vec{F} = m_1 \vec{g} \quad (2.1.85)$$

mit der **Erdbeschleunigung** \vec{g} und $|\vec{g}|=9.81 \text{ ms}^{-2}$

Die **Federkraft** entsteht durch die elastischen Eigenschaften vieler Festkörper. Dehnt oder staucht man ein Material, so wirkt eine rückstellende Kraft, die in erster Näherung linear mit der Auslenkung größer wird, wie in Abb 2.1.23 illustriert ist:

$$F = -c\Delta x \quad (2.1.86)$$

mit c der **Federkonstanten**.

Die **Normalkraft** ist eine Kraft, die eine Unterlage auf einen Körper ausübt, damit dieser sich nur in der Ebene dieser Unterlage bewegen kann, wie in Abb. 2.1.24 illustriert.

Bei der **Reibungskraft** kann man zwei Fälle unterscheiden: Haftreibung und Gleitreibung. Reibung entsteht durch die Verzahnung zweier Oberflächen untereinander. In erster Näherung ist die Kontaktfläche im mikroskopischen

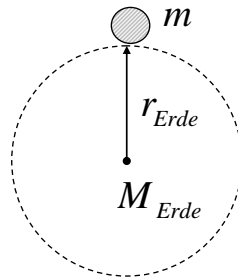


Abbildung 2.1.22: Die Gravitationskraft beschreibt die Anziehung zweier Massen m und M .

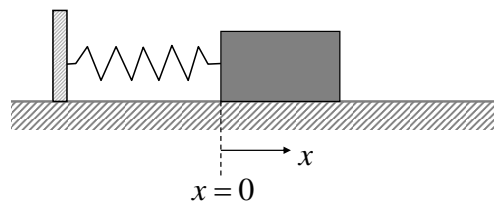


Abbildung 2.1.23: Die Federkraft beschreibt die rückstellende Kraft bei der Auslenkung einer Feder von der Ruhelage $x = 0$.

Sinn proportional zur Kraft, die die beiden Körper aneinander presst. Diese Kraft ist die Normalkraft. Bewegt man jetzt den Körper parallel zu der Unterlage, so entsteht eine bremsende Kraft, die proportional zur Normalkraft ist, aber *parallel* zur Oberfläche zeigt, während die Normalkraft *senkrecht* zur Oberfläche zeigt.

Abb. 2.1.25 zeigt die Variation dieser Bremskraft für den Fall, daß wir einen Körper mit einer kontinuierlich sich erhöhenden Kraft beginnen zu ziehen. Im Bereich der Haftreibung erhöht sich die Bremskraft im gleichem Maße wie die ziehende externe Kraft. D.h. der Körper bleibt in Ruhe. Ab einer Kraft F_{max} kann die mikroskopische Verzahnung des Körpers auf seiner Unterlage die Zugkraft nicht mehr auffangen und der Übergang zur Gleitreibung findet statt. Die Bremskraft bei Gleitreibung ist generell kleiner als bei Haftreibung. Diese Bremskraft bei Gleitreibung ist auch unabhängig von der Zugkraft und bleibt somit zeitlich konstant.

Gleitreibung und Haftreibung sind mit der Normalkraft über die **Reibungskoeffizienten** μ verknüpft:

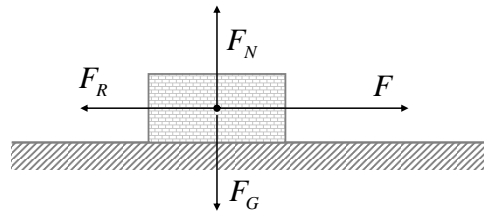


Abbildung 2.1.24: Normalkraft.

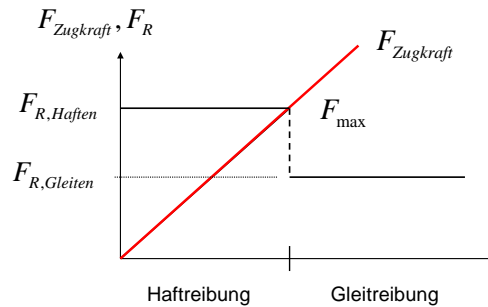


Abbildung 2.1.25: Wir betrachten die bremsende Reibkraft, wenn wir an einem Schlitten mit einer kontinuierlich sich erhöhenden Kraft ziehen $F_{Zugkraft}$. Ab einer Kraft F_{max} geht die Haftreibung $F_{R,Haften}$ plötzlich in Gleitreibung $F_{R,Gleiten}$ über.

$$F_{max} = \mu_H F_N \quad (2.1.87)$$

$$F_{Gleitreibung} = \mu_G F_N \quad (2.1.88)$$

Typische Werte für die Reibungskoeffizienten sind in Tabelle 2.1 gezeigt.

Betrachten wir jetzt noch einmal das Beispiel von dem Schlitten, aber jetzt mit Haft- bzw.- Gleitreibung, wie in Abb. 2.1.26 illustriert. In y -Richtung haben wir die Bilanz der Kräfte zu:

$$F_N + \sin \Theta F - mg = 0 \quad (2.1.89)$$

in x -Richtung ergibt sich mit der Bremskraft F_R

$$F_R = -\mu_G F_N \quad (2.1.90)$$

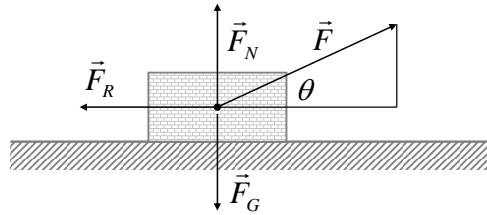


Abbildung 2.1.26: Schlitten mit Reibung.

	Haftreibung μ_H	Gleitreibung μ_G
Stahl auf Stahl	0.7	0.6
Glas auf Glas	0.9	0.4
Teflon auf Stahl	0.04	0.04
Gummi auf Beton	1.0	0.8

Tabelle 2.1: Einige Reibungskoeffizienten für Haftreibung μ_H und Gleitreibung μ_G

der Ausdruck:

$$-\mu_G F_N + \cos \Theta F = ma \quad (2.1.91)$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich jetzt die Beschleunigung des Schlittens bei gegebener Kraft F und Zugwinkel Θ bestimmen. Es gilt allerdings zu beachten, daß für das Losfahren zunächst die Haftreibung überwunden werden muß. D.h. wir müssen zunächst μ_H einsetzen. Der notwendige Winkel bei konstanter Kraft ergibt sich dann aus dem Gleichgewicht mit $a = 0$.

Im Unterschied zur gleichmäßigen Bewegung muß hier konstant eine Kraft aufgebracht werden, um *die ganze Zeit* die Bremskraft auszugleichen.

Die Beschreibung der Reibung als Kraft, die proportional zur Normalkraft ist, impliziert automatisch, dass diese Kraft *nicht* von der Auflagefläche des Körpers abhängt. Dies läßt sich auch anschaulich verstehen, wenn man sich überlegt, dass die Reibung im mikroskopischen Sinne durch die Anziehungskräfte der Atome der beiden Körper untereinander verursacht wird. In erster Näherung ist es anscheinend unerheblich, ob bei einer kleinen Fläche, die Kraft pro Fläche zwar groß ist dafür aber die Anzahl von Atomen wegen der kleinen Fläche klein ist, oder ob bei einer großen Fläche zwar viele Atome der beiden Körper sich anziehen können, aber ihr Abstand wegen der geringeren Kraft pro Fläche größer ist.

Eine andere prominente Form von Reibung ist der **Luftwiderstand**. Die-

se Bremskraft ist der Bewegung entgegen gerichtet und skaliert quadratisch mit der Geschwindigkeit v des Körpers.

$$F = \frac{1}{2}C\rho Av^2 \quad (2.1.92)$$

Mit einer Konstanten C für das Medium (0.4.1.0), ρ der Dichte des Mediums und A der Querschnittsfläche des Objektes. Betrachten wir einen fallenden Körper, der durch die Luftreibung gebremst wird. Die Bewegungsgleichung ist:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C\rho Av^2 \quad (2.1.93)$$

Löst man diese Differentialgleichung, so erkennt man, daß für kleine Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit zunächst linear mit der Zeit ansteigt. Für große Geschwindigkeiten nähert sich die Bewegung allerdings einer Endgeschwindigkeit, die sich aus:

$$0 = mg - \frac{1}{2}C\rho Av_e^2 \quad (2.1.94)$$

zu

$$v_e = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}} \quad (2.1.95)$$

ergibt.

Schwere und träge Masse

Bislang haben wir die Masse für zwei unterschiedliche Dinge verwendet. Zum einen nach dem Newton'schen Axiom als Proportionalitätskonstante, die die Kraft bestimmt, die zur Beschleunigung aufgewendet werden muß (träge Masse) und zum anderen als die Größe, die in der Gravitationskraft zum tragen kommt (schwere Masse). Diese beiden Massen, die *träge* und die *schwere* Masse, $m_{träge}$ und m_{schwer} müssen nicht per se gleich sein. Allerdings hat man bislang noch keinen Unterschied festgestellt. Nach neuesten Experimenten sind beide Massen bis zu einer Genauigkeit von 10^{-10} ($(m_{träge} - m_{schwer})/(m_{träge} + m_{schwer})$) gleich. Betrachten wir dazu zwei Gedankenexperimente:

- **Gedankenexperiment: Lift**

Betrachten wir einen abgeschlossenen Kasten (=Lift) im Schwerfeld der Erde in dem ein Gewicht an einer Feder hängt, wie in Abb. 2.1.27.

Wir beobachten eine Auslenkung Δx . Über das Kräftegleichgewicht $mg = c\Delta x$ können wir die Beschleunigung g berechnen. In einem zweiten Fall befindet sich der Kasten in der Schwerelosigkeit. Seine Geschwindigkeit erhöht sich aber fortlaufend mit $v = gt$. D.h. nach dem zweiten Newton'schen Axiom wirkt auf das Federgewicht eine Beschleunigung mg , die durch die Federkraft kompensiert wird. In beiden Fällen beobachtet jemand in dem Kasten eine Beschleunigung g , kann aber nicht entscheiden, ob diese Beschleunigung durch ein Schwerfeld oder durch eine Beschleunigung des Kastens selber hervorgerufen wird. Für diesen Beobachter erscheint die träge und die schwere Masse gleich.

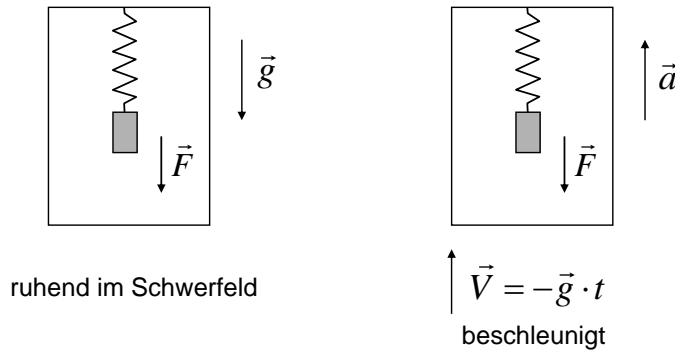


Abbildung 2.1.27: Schwere und träge Masse, Beispiel Lift.

- **Gedankenexperiment: Karussell**

In dem zweiten Beispiel betrachten wir eine Gondel eines Kettenkarussells. Auf die Gondel wirken zwei Kräfte, die ein Beobachter in dieser Gondel wahrnimmt: zum einen die Zentrifugalkraft, die durch die Trägheit des Körpers auf seiner Kreisbewegung verursacht wird und zweitens die Schwerkraft, die durch die Masse des Körpers verursacht wird. Nachdem auch die Trägheit nach den Newton'schen Axiomen mit der Masse verknüpft ist, könnte man hier zwischen **träger** und **schwerer Masse** unterscheiden. Also eine Masse, die bei einer Beschleunigung sichtbar wird und eine Masse, die bei der Gravitation sichtbar wird. Bislang ist zwischen diesen beiden Massen noch kein Unterschied festgestellt worden. Betrachtet man das Kräftegleichgewicht des Kettenkarussells, so ist die Auslenkung der Gondel ϑ gegeben durch:

$$\tan \vartheta = \frac{m_{\text{traege}} R \omega^2}{m_{\text{schwere}} g} \quad (2.1.96)$$

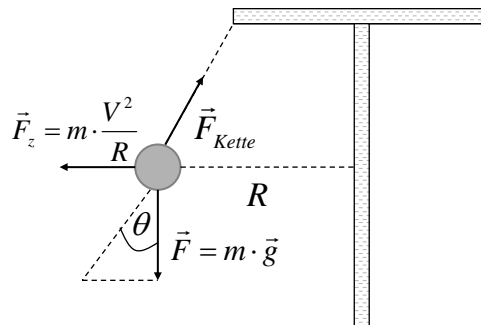


Abbildung 2.1.28: Schwere und träge Masse, Beispiel Kettenkarussell.

Nachdem träge und schwere Masse identisch sind, kürzen sie sich heraus. Wäre dem nicht so, so würde das Verhältnis $m_{traege}/m_{schwere}$ von Körper zu Körper unterschiedlich sein. In diesem Fall wäre die Auslenkung der Gondeln des Kettenkarussells je nach Körper unterschiedlich.

2.1.3 Arbeit und Energie

Mit den Newton'schen Axiomen läßt sich jetzt die Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von äußeren Kräften beschreiben. Im folgenden wollen wir zusätzlich die Begriffe Arbeit, kinetische und potentielle Energie definieren.

Arbeit und Leistung

Betrachten wir einen Körper, der einen Weg $\Delta\vec{r}$ in einem Kraftfeld \vec{F} zurück legt. Ein Beispiel sei ein Wanderer auf dem Weg zum Berggipfel. Dazu muß **Arbeit** verrichtet werden.

$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r})\Delta\vec{r} \quad (2.1.97)$$

Die Arbeit ist positiv wenn die Energie des Massenpunktes zunimmt und negativ wenn der Körper Energie abgibt. Beispiel ist die Bewegung mit Rücken- bzw. Gegenwind. Im ersten Fall ist das Skalarprodukt aus $\vec{F}d\vec{r}$ positiv, während es im zweiten Fall negativ wird. Bei Rückenwind nimmt der Körper Energie auf, seine Geschwindigkeit erhöht sich. Bei Gegenwind gibt der Körper Energie ab, seine Geschwindigkeit erniedrigt sich.

Die Arbeit läßt sich für beliebige Wege vom Ort P_1 zum Ort P_2 in der Integralform schreiben als:

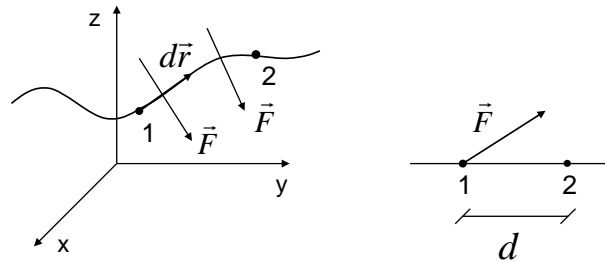


Abbildung 2.1.29: Arbeit als Integral Kraft mal Weg.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} \quad (2.1.98)$$

Hierbei bezeichnen P_1 und P_2 Punkte in dem Kraftfeld (siehe Abb. 2.1.30); im Beispiel den Ausgangsort und den Gipfel unserer Wanderung. Auf dem Weg zwischen diesen beiden Punkten (= Integral über eine Linie zwischen P_1 und P_2) muß eine Arbeit W verrichtet werden.

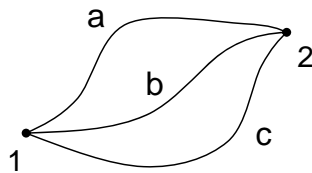


Abbildung 2.1.30: Wegunabhängigkeit der Arbeit in konservativen Kraftfeldern. Die Arbeit ist auf den Wegen a, b und c gleich.

Die Einheit der Arbeit ist $\text{Nm}=\text{J}$ mit J, dem **Joule**. Die geleistete Arbeit pro Zeit bezeichnet man als **Leistung** mit der Definition:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.1.99)$$

Die Einheit der Leistung ist $\text{Js}^{-1}=\text{W}$ mit W, der Einheit **Watt**. Leistung und Kraft sind wie folgt verknüpft:

$$P = \frac{d}{dt} \int_0^r \vec{F} d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F} \vec{v} \quad (2.1.100)$$

Für die Beschreibung der Arbeit lassen sich sog. **konservativen Kraftfeldern** und **nicht-konservative** Kraftfelder unterscheiden.

- **konservative Kraftfelder**

Bei konservativen Kraftfeldern hängt die Arbeit *nicht* vom Weg ab, der zwischen den Punkten P_1 und P_2 genommen wird; im Beispiel ist es egal welchen Weg der Wanderer nimmt, die Arbeit die er leisten muß ist immer gleich.

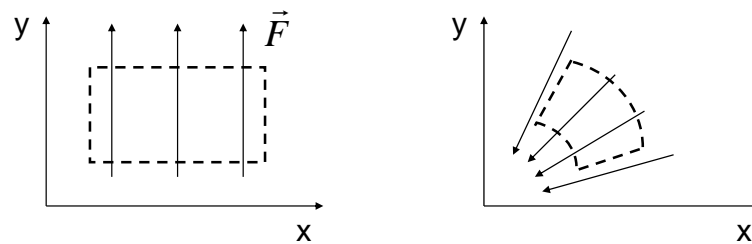


Abbildung 2.1.31: Wegunabhängigkeit der Arbeit in konservativen Kraftfeldern.

- **nicht-konservative Kraftfelder**

Ein Kraftfeld muß nicht immer konservativ sein. Nimmt man zum Beispiel an, daß die Kraft abhängt von der Geschwindigkeit, z.B. Luftwiderstand, so ändert sich die geleistete Arbeit zwischen den Punkten P_1 und P_2 je nach gewählter Route.

Auf dem Weg von P_1 nach P_2 bewegt sich der Körper durch ein Kraftfeld. Nach den Newton'schen Axiomen ist damit eine Änderung der Geschwindigkeit verbunden gemäß:

$$F = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.1.101)$$

Durch eine mathematische Umformung läßt sich das Integral über den Ortsraum in ein Integral über die Zeit und schließlich in ein Integral über die Geschwindigkeit umformen:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt \\
&= m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (2.1.102)
\end{aligned}$$

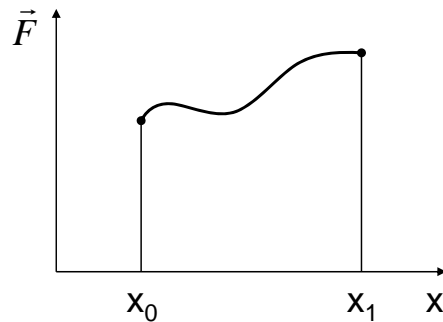


Abbildung 2.1.32: Die Arbeit, die in einen Körper gesteckt wird entspricht einer Zunahme der kinetischen Energie.

D.h. die Arbeit, die in dem Kraftfeld geleistet wird, ist verknüpft mit einer Änderung der Geschwindigkeit des Körpers. Wir nennen den Ausdruck

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2} \quad (2.1.103)$$

die **kinetische Energie** eines Körpers der Masse m und Geschwindigkeit v .

Energiesatz der Mechanik

Nachdem in einem konservativen Kraftfeld die geleistete Arbeit unabhängig vom Weg ist, kann sie nur noch abhängen von der Wahl des Ausgangsortes P_1 und des Endortes P_2 . Damit kann man diese Arbeit als Differenz einer neuen Funktion E_{pot} darstellen:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) \quad (2.1.104)$$

Die Funktion E_{pot} nennt man die **potentielle Energie**. Die Arbeit, die zwischen den Orten P_1 und P_2 geleistet wird, ist die Differenz der potentiellen Energien. Wie der Weg verläuft ist unerheblich. Um für die Integration von Gl. 2.1.98 einen mathematisch günstigen Weg zu wählen (der ja beliebig war), nehmen wir einen Weg von Höhe 0 zu dem Berggipfel der Höhe h parallel zur Richtung der Kraft ($\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |F||r|$, da $\vec{F} \parallel \vec{r}$) und dann auf gleicher Höhe h von P_1 zu P_2 ($\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0$, da $\vec{F} \perp \vec{r}$):

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = - \int_0^h mg dz = -mgh = E_{pot}(0) - E_{pot}(h) \quad (2.1.105)$$

Setzt man $E_{pot}(0) = 0$, so bekommt man schließlich für die potentielle Energie $E_{pot}(h) = mgh$. Wie wird jetzt bei der Bewegung des Körpers diese Arbeit aufgebracht? Wir hatten die geleistete Arbeit auf dem Weg von P_1 nach P_2 jetzt auf zwei Arten abgeleitet. Beide Formulierungen nach Gleichungen 2.1.105 und 2.1.102 lassen sich zusammenfassen zu:

$$E_{pot}(P_1) - E_{pot}(P_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (2.1.106)$$

oder

$$\boxed{E_{pot}(P_1) + \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{pot}(P_2) + \frac{1}{2}mv_2^2 = E} \quad (2.1.107)$$

D.h. die Summe aus potentieller Energie und kinetischer Energie ändert sich *nicht* bei einer Bewegung von P_1 nach P_2 . Man bezeichnet diese Summe als **Gesamtenergie** E , die eine Konstante der Bewegung in einem konservativen Kraftfeld ist. Diese Gesamtenergie ist eine Erhaltungsgröße. Auf dem Weg von P_1 nach P_2 wandelt sich nur potentielle in kinetische Energie um (bzw. umgekehrt).

Im folgenden wollen wir drei Beispiele für die potentielle Energie betrachten. Für die Berechnung der potentiellen Energie definiert man zunächst einen Punkt an dem diese gleich Null sein soll. Dann wird in geeigneter Weise bis zu dem Punkt integriert an dem die potentielle Energie zu bestimmen ist.

- **potentielle Energie der Gravitation auf der Erdoberfläche**

Wir integrieren von der Erdoberfläche zu einer Höhe h :

$$E_{pot} = - \int_0^h -mg dz = mgh \quad (2.1.108)$$

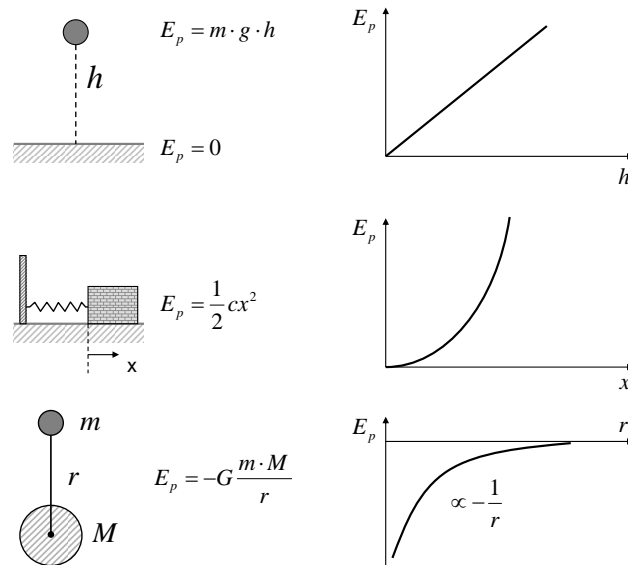


Abbildung 2.1.33: 3 Beispiele für potentielle Energie: Gravitation an der Erdoberfläche, gespeicherte Energie einer Feder, Gravitation allgemein.

- **potentielle Energie einer gespannten Feder**

Wir integrieren vom Ruhepunkt $x = 0$ bis zu einer Auslenkung x :

$$E_{pot} = - \int_0^x -cxdx = \frac{1}{2}cx^2 \quad (2.1.109)$$

- **potentielle Energie der Gravitation, allgemein**

Für das Gravitationsgesetz verwenden wir einen Punkt im Unendlichen, an dem die Gravitation Null sein soll. Wir integrieren dann bis zu einem Abstand r :

$$E_{pot} = - \int_{\infty}^r -G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r} \quad (2.1.110)$$

Als Beispiel für die Anwendung des Energiesatzes der Mechanik, betrachten wir einen Looping, wie er in Abb. 2.1.34 gezeigt ist. Wir stellen die Frage, bei welcher Höhe h die Kugel starten muß, damit sie den ganzen Looping durchläuft und nicht von der Bahn fällt.

Am höchsten Punkt des Loopings muß die Kugel eine Minimalgeschwindigkeit haben, die ausreicht um auf Grund der Zentrifugalkraft die Schwerkraft auszugleichen. D.h. für den höchsten Punkt muß gelten:

$$mg = m \frac{v^2}{R} \quad (2.1.111)$$

Die Geschwindigkeit an diesem höchsten Punkt läßt sich aus der Energieerhaltung ableiten. Es gilt:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg2R \quad (2.1.112)$$

Für die potentielle Energie haben wir als Nullpunkt die untersten Punkt des Loopings gewählt. Bei der Bewegung der Kugel wird fortwährend kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt, die Summe bleibt konstant. Am höchsten Punkt der Kurve, hat sich die potentielle Energie gemäß Abbildung 2.1.34 um $mg(h - 2R)$ geändert. Diese Energie steckt jetzt in der Bewegungsenergie. Falls die Kugel in Ruhe startet ($v_1 = 0$) bekommen wir mit $v_2 = v$:

$$mg(h - 2R) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.1.113)$$

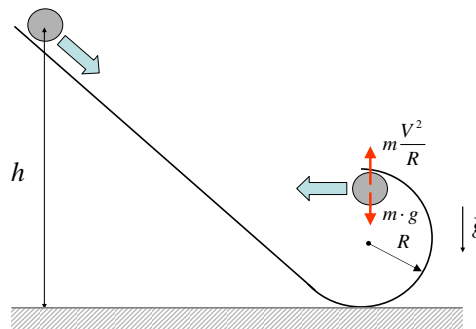


Abbildung 2.1.34: Energieerhaltung am Beispiel Looping.

Vergleichen wir die Gleichungen 2.1.111 und 2.1.113, so erhalten wir schließlich als Bedingung für h ¹:

$$h = \frac{5}{2}R \quad (2.1.114)$$

Welchen Vorteil hat die Verwendung der potentiellen Energie für die Beschreibung eines Kraftfeldes. Dies sei am Beispiel der Gravitation illustriert.

¹In dem Beispiel einer rollenden Kugel gilt diese Beziehung allerdings nicht, da zusätzlich noch Energie in die Rotation der Kugel gesteckt werden muß. Das Beispiel gilt nur für ein reibungsfreies Gleiten eines Gegenstandes.

An jedem Punkt in einem beliebigen Gravitationsfeld wirkt eine Kraft deren Richtung durch die Superposition der Gravitationswirkung der beteiligten Körper bestimmt ist. D.h. für jeden Punkt im Raum brauchen wir drei Komponenten des Kraftvektors. Die selbe Information läßt sich praktischer in der Form eines skalaren Potentials speichern. Die Änderung der potentiellen Energie bei einer Variation des Ortes um $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y + \Delta z\vec{e}_z$ ist²:

$$\Delta E_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \Delta z \quad (2.1.115)$$

Gleichzeitig ist die Arbeit die auf dem Wegstück Δr geleistet wird:

$$\Delta W = \vec{F} \Delta\vec{r} = -\Delta E_p \quad (2.1.116)$$

Nach der Definition der Beziehung zwischen Arbeit und potentieller Energie gilt immer $\Delta W = -\Delta E_p$. Das Skalarprodukt aus Kraft und Weg ist:

$$W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \quad (2.1.117)$$

Ein Vergleich der Gleichungen 2.1.115 und 2.1.117 zeigt:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad (2.1.118)$$

Dies läßt sich kompakt schreiben als :

$$\boxed{\vec{F} = -\mathbf{grad} E_p} \quad (2.1.119)$$

In dieser Schreibweise bezeichnet man die Kraft als den negativen **Gradienten** der potentiellen Energie. Die Kraft ist die räumliche Ableitung der potentiellen Energie. Dies läßt sich wieder am Beispiel der Gravitation veranschaulichen. Betrachten wir dazu eine Variation der potentiellen Energie entsprechend einem "Berghang". Die räumliche Ableitung an einem Ort ist als die "Hangneigung" gegeben. Entsprechend wirkt in dieser Richtung die Kraft auf einen Körper.

²Die Schreibweise ∂ für die Ableitung wird als *partielle* Ableitung bezeichnet und bringt zum Ausdruck, daß hier explizit nur nach x, y bzw z abgeleitet wird. Es wird nicht berücksichtigt, daß x selber noch von y abhängen könnte.

2.1.4 Gravitation

Die Kepler'schen Gesetze

Diese Gesetze der Mechanik fanden ihre Bestätigung durch die Berechnung der Bewegung der Planeten um die Sonne. Diese Bewegung wurde als erstes quantitativ von Kepler erfasst, der die Beobachtungsdaten am genauesten auswertete. Auf dieser Basis und dem Kopernikanischen Weltbild stellte er 3 Gesetze auf:

- **1. Gesetz**

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

- **2. Gesetz**

Der Radiusvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, wie in Abb. 2.1.35 illustriert.

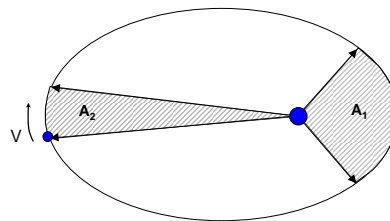


Abbildung 2.1.35: In gleichen Zeiten überfährt der Fahrstrahl die gleichen Flächen.

- **3. Gesetz**

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen zueinander.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (2.1.120)$$

Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetz läßt sich folgender Zusammenhang ableiten. Betrachten wir dazu ein infinitesimales Dreieck der Fläche dA , das der Fahrstrahl in einer Zeit dt überstreicht. Die zurückgelegte Strecke seit $ds = vdt$. Die Fläche des Dreieck dA ist gemäß Abb. 2.1.36:

$$dA = \frac{1}{2}|r||ds| \sin \alpha = \frac{1}{2}|r||v|dt \sin \alpha \quad (2.1.121)$$

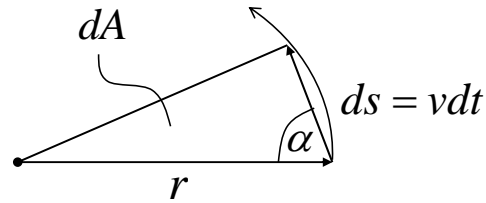


Abbildung 2.1.36: Ein Flächenelement dA wird in einer Zeit dt durchlaufen.

Auf der rechten Seite von Gl. 2.1.121 entsteht ein Ausdruck der dem Kreuzprodukt der Vektoren \vec{r} und \vec{v} entspricht. Dies ist in Vektorschreibweise:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const.} \quad (2.1.122)$$

Nachdem die überstrichene Fläche dA pro Zeit dt zeitlich konstant bleibt ($dA/dt = \text{const.}$), muß auch der Ausdruck $(\vec{r} \times \vec{v})$ während eines Umlaufes zeitlich konstant bleiben. Man definiert dazu eine neue Größe:

$$\boxed{\vec{L} = m (\vec{r} \times \vec{v})} \quad (2.1.123)$$

als den **Drehimpuls**, der in zentralsymmetrischen Problemen zeitlich konstant bleibt und damit eine **Erhaltungsgröße** ist.

Newton hatte jetzt aus dem dritten Kepler'schen Gesetz sein Gravitationsgesetz abgeleitet. Zunächst sagte er, daß die Kraft zwischen Sonne und Planeten immer in Richtung der Verbindungsgeraden zwischen beiden wirken müsse. Zusätzlich sollte sie proportional (Proportionalitätskonstante G) zu den Massen m_1 und m_2 der beteiligten Körper sein, also

$$\vec{F}_{\text{Gravitation}} = G m_{\text{Planet}} m_{\text{Sonne}} f(r) \quad (2.1.124)$$

wobei $f(r)$ zunächst irgendeine Abhängigkeit von r darstellt. Nach dem 1. Newton'schen Axiom muß auf die Planeten auf ihrer Umlaufbahn eine Kraft wirken, da sie nicht einer *gradlinige* Bewegung folgen. Diese Zentripetalkraft ist:

$$F_{\text{Zentripetal}} = m_{\text{Planet}} \omega^2 R \quad (2.1.125)$$

mit ω^2 der Umlauffrequenz und R dem Abstand Planet Sonne. Diese Zentripetalkraft ist im Bezugssystem des Planeten die nach außen gerichtete

Zentrifugalkraft, die im Gleichgewicht mit der Gravitationskraft der Sonne (siehe Abb. 2.1.37) steht. Somit gilt:

$$Gm_{Planet}m_{Sonne}f(r) = m_{Planet}\omega^2 R \quad (2.1.126)$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz gilt für die Umlaufzeit T :

$$T^2 \propto R^3 \quad (2.1.127)$$

Mit der Umlauffrequenz $\omega \propto \frac{1}{T}$ ist $\omega^2 \propto \frac{1}{R^3}$. Damit wird:

$$Gm_{Planet}m_{Sonne}f(R) \propto m_{Planet} \frac{1}{R^3} R \quad (2.1.128)$$

In dieser Gleichung befinden sich bis auf R nur noch Konstanten. D.h. die Abhängigkeit $f(R)$ auf der linken Seite muß durch die Abhängigkeit von R auf der rechten Seite gegeben sein. Man bekommt somit als Lösung:

$$f(R) = \frac{1}{R^2} \quad (2.1.129)$$

Aus dieser Schlussfolgerung hat Newton schließlich sein **Gravitationsgesetz** für die Bewegung der Planeten formuliert:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM_{Sonne}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1.130)$$

Dieses Gesetz gilt allerdings nicht nur für die Planetenbewegung sondern ganz allgemein für die Gravitationswirkung zweier Massen untereinander. Allgemein gilt somit für zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r :

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}} \quad (2.1.131)$$

Die Schwerkraft auf der Erde auf der Erdoberfläche läßt sich mit Hilfe dieses Gesetzes verkürzt darstellen als:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM_{Erde}}{r_{Erde}^2} \frac{\vec{r}}{r} = -m \underbrace{G \frac{M_{Erde}}{r_{Erde}^2}}_{=-\vec{g}} \frac{\vec{r}}{r} = m\vec{g} \quad (2.1.132)$$

D.h. die Erdbeschleunigung entspricht der Näherung des Gravitationsgesetzes am Ort der Erdoberfläche. Die Gravitationskonstante läßt sich auch experimentell mit einer sog. **Gravitationswaage** messen. Hierbei werden zwei Testmassen an einem Torsionsfaden aufgehängt. Bringt man in die Nähe dieser Massen weitere große Massen, so wird der Faden durch die Anziehung

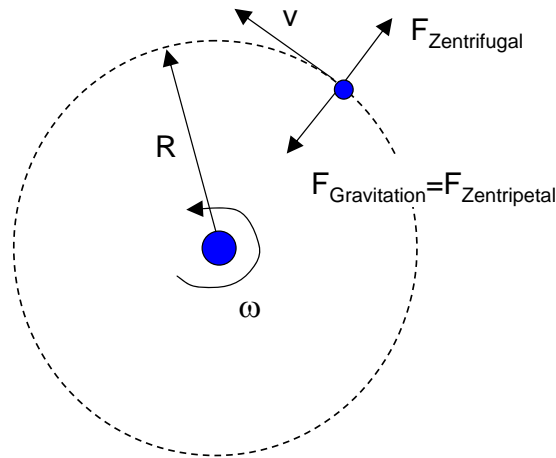


Abbildung 2.1.37: Das Gleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Zentrifugalkraft bestimmt die Umlaufbahn der Planeten.

der Massen verdrillt. Diese Verdrillung wird über einen Laser und einen kleinen Spiegel an dem Torsionsfaden sichtbar gemacht. Dies ist in Abb. 2.1.38 illustriert.

Gravitation bei ausgedehnten Körpern

Das Newton'sche Gravitationsgesetz betrachtet zwei Massen in einem Abstand zueinander. Im Falle von zwei ausgedehnten Körpern muß man die Massenanziehung aller Volumenelemente aufaddieren um die Gravitation dieser beiden Körper zu bestimmen. Allerdings kann die Berechnung stark vereinfacht werden, wenn man Newtons **Kugelschalentheorem** verwendet:

- Befindet sich ein Körper außerhalb einer Kugelschale mit Masse M , so verspürt er eine Gravitationswirkung als sei diese Masse M im Zentrum der Kugelschale *lokalisiert*.
- Befindet sich ein Körper innerhalb einer Kugelschale mit Masse M , so mittelt sich die Gravitationswirkung der Kugelschale heraus und er befindet sich im Inneren in einem *kräftefreien* Zustand.

Dieses Theorem wollen wir im folgenden beweisen. Betrachten wir dazu ein Koordinatensystem, wie es in Abb. 2.1.39 aufgespannt ist. Die Kugelschale habe einen Radius a und eine Dicke da . Daraus schneiden wir eine Scheibe

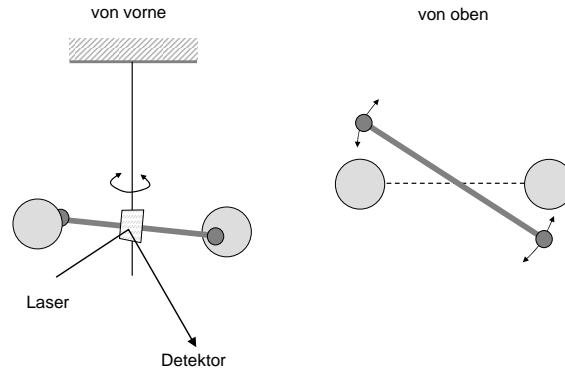


Abbildung 2.1.38: Bei einer Gravitationswaage wird die Massenanziehung über die Verdrillung eines dünnen Fadens sichtbar gemacht. An diesem Faden ist ein Spiegel befestigt über den ein Laserstrahl abgelenkt wird. Dies macht kleinste Änderungen sichtbar.

mit dem Radius y und der Dicke dx heraus. Diese Dicke dx ergibt auf der Kugeloberfläche einen Ring der Breite ds . Die Masse dM dieses Ringes ist:

$$dM = 2\pi y \rho ds da \quad (2.1.133)$$

mit $dx = ds \sin \vartheta$ und $y = a \sin \vartheta$ (siehe Abb.2.1.39) kann man dies ausdrücken als:

$$dM = 2\pi a \rho dx da \quad (2.1.134)$$

Der Beitrag dE_{pot} zur potentiellen Energie E_{pot} einer kleiner Masse m am Ort P im Abstand r von diesem Ring ist:

$$dE_{pot} = -G \frac{mdM}{r} \quad (2.1.135)$$

Wir addieren die potentielle Energie aller ausgeschnitten Ringe durch Integration über x und erhalten den Ausdruck:

$$E_{pot} = -2\pi \rho G m a d a \int_{x=-a}^a \frac{dx}{r} \quad (2.1.136)$$

Die Integration in dx läßt sich in eine Integration über dr umwandeln via $r^2 = y^2 + (R - x)^2$ und $r dr = -R dx$ mit R dem Abstand von P zum Kugelmittelpunkt. Je nach Lage des Ortes P bekommen wir unterschiedliche Ergebnisse für dieses Integral.

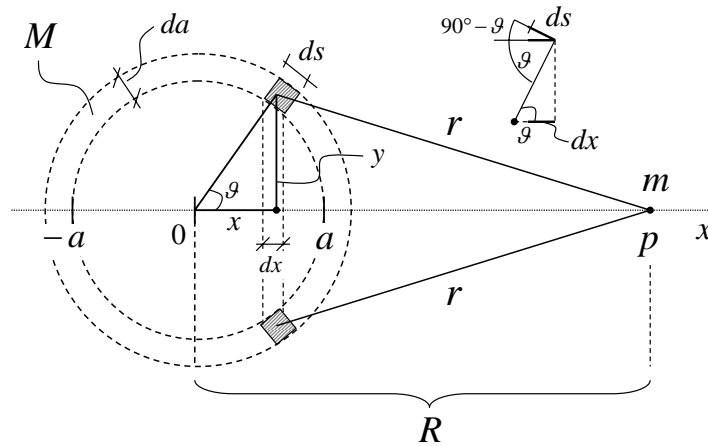


Abbildung 2.1.39: Gravitationswirkung einer Kugelschale der Dicke da und Radius a .

- **P außerhalb**

Falls der Ort außerhalb der Kugelschale liegt, müssen wir von $r = R + a$ bis $r = R - a$ integrieren und bekommen:

$$E_{pot} = \frac{2\pi\rho a d a m}{R} G \underbrace{\int_{r=R+a}^{R-a} dr}_{-2a} \quad (2.1.137)$$

mit $M = 4\pi a^2 d a \rho$ ergibt sich:

$$E_{pot} = -G \frac{mM}{R} \quad (2.1.138)$$

Man sieht, daß die potentielle Energie einer Masse m am Ort P im Schwerfeld einer Kugelschale nur von der Masse M und dem Abstand zum Kugelmittelpunkt R abhängt. D.h. die Gravitationswirkung ist identisch mit einer punktförmigen Masse M die im Kugelmittelpunkt lokalisiert ist!

Dies vereinfacht die Berechnung der Gravitation zwischen ausgedehnten Körpern sehr stark. Für die Bewegung ist in der Tat ausreichend einfach Massenpunkte mit unterschiedlichen Massen zu betrachten.

- **P innerhalb**

Betrachten wir jetzt einen Punkt P innerhalb der Kugelschale. Dadurch ändern sich die Integrationsgrenzen und wir bekommen:

$$E_{pot} = \frac{2\pi\rho a d a m}{R} G \underbrace{\int_{r=R+a}^{r=a-R} dr}_{-2R} \quad (2.1.139)$$

mit $M = 4\pi a^2 d a \rho$ ergibt sich:

$$E_{pot} = -G \frac{mM}{a} = \text{const.} \quad (2.1.140)$$

Man sieht, daß die potentielle Energie im Innern der Kugel konstant ist. Nachdem $\vec{F} = -\text{grad}E_{pot}$ und $E_{pot}=\text{const.}$ gilt, ist ein Körper im Innern der Kugel *kräftefrei*. Dort heben sich alle Gravitationskräfte aller Kugelschalenelemente untereinander weg.

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p = 0 \quad (2.1.141)$$

Im folgenden wollen wir das Kugelschalentheorem auf die Gravitation im Innern der Erde anwenden. Betrachten wir dazu die Kraft auf eine Masse m im Innern der Erde (Radius R_E , Masse M) mit Abstand R zum Zentrum:

$$\vec{F} = -G \frac{m}{R^2} M \frac{R^3}{R_E^3} \hat{r} \quad (2.1.142)$$

Für die Berechnung der Kraft dürfen wir nur die Masse innerhalb einer gedachten Kugel mit Radius R verwenden. D.h der Anteil der Gesamtmasse ist dabei $M_{Kugel} = M \frac{R^3}{R_E^3}$. Damit ergibt sich im Innern eine Kraft, die linear vom Erdmittelpunkt aus zunimmt.

$$\vec{F} = -G \frac{m}{R_E^3} M R \hat{r} \quad (2.1.143)$$

Außerhalb der Erde ergibt sich das bekannte Gravitationsgesetz mit:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{R^2} \hat{r} \quad (2.1.144)$$

Integrieren wir diesen Verlauf der Kraft von ∞ bis zum Ort R , so erhalten wir die potentielle Energie, wie in Abb. 2.1.40 veranschaulicht. D.h im Innern nimmt die potentielle Energie quadratisch mit dem Abstand zum Mittelpunkt zu.

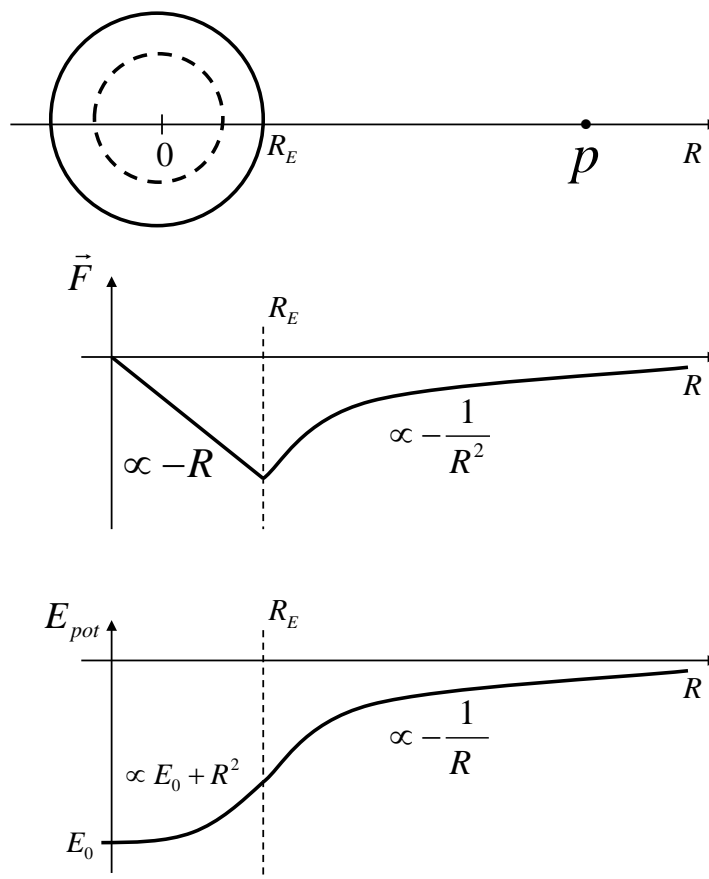


Abbildung 2.1.40: Gravitationskraft auf und potentielle Energie von einer Masse m im Abstand R vom Mittelpunkt der Erde.

2.2 Systeme von Massenpunkten

Im folgenden wollen wir keinen isolierten Massenpunkt betrachten auf den eine Kraft wirkt, sondern ein System von Teilchen, das in Wechselwirkung zueinander tritt.

2.2.1 Schwerpunkt

Definieren wir zunächst den sog. **Schwerpunkt** eines Systems von Teilchen. Dazu gewichten wir die einzelnen Orte mit den jeweiligen Massen und erhalten bei zwei Teilchen den Schwerpunkt gemäß Abb. 2.2.1 bei:

$$x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \quad (2.2.1)$$

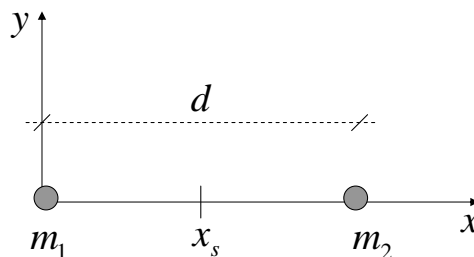


Abbildung 2.2.1: Definition Schwerpunkt in einem Teilchensystem bestehend aus zwei Teilchen.

Im allgemeinen erhalten wir bei diskreten Massenpunkten den Ausdruck.

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad (2.2.2)$$

mit $M = \sum_i m_i$. Für eine beliebige Dichteverteilung im Ortsraum bekommen wir:

$$x_s = \frac{1}{M} \int x dm \quad (2.2.3)$$

2.2.2 Kraft und Impuls

Wie verhält sich ein System von Teilchen unter dem Einfluss von äußeren Kräften? Stellen wir uns zwei Teilchen vor, die untereinander in Wechselwirkung stehen, wie zum Beispiel bei einem Stoßprozeß harter Kugeln. Es besteht die Behauptung, daß die äußeren Kräfte F_{eff} einer Beschleunigung der *Gesamtmasse* M , bzw. des Schwerpunktes entsprechen. Betrachten wir zunächst zwei Körper. Der Ort des Schwerpunktes ist:

$$M\vec{r}_s = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \quad (2.2.4)$$

Die erste Ableitung liefert die Geschwindigkeit des Schwerpunktes zu:

$$M\vec{v}_s = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad (2.2.5)$$

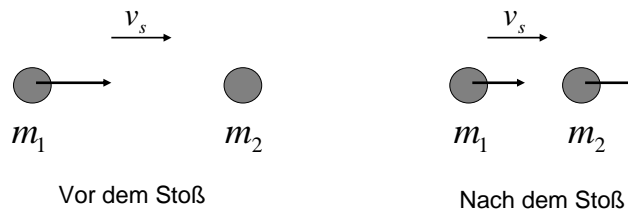


Abbildung 2.2.2: Beim Stoß zweier Teilchen bleibt die Schwerpunkts-
geschwindigkeit gleich.

Noch eine weitere zeitliche Ableitung liefert die Beschleunigung des Schwerpunktes. Auf der rechten Seite stehen die Kräfte die auf die beiden Massenpunkte wirken.

$$M\vec{a}_s = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.2.6)$$

Falls es keine äußeren Kräfte gibt muß nach dem dritten Newton'schen Axiom gelten $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. D.h. $M\vec{a}_s = 0$. D.h. in einem isolierten System (ohne äußere Kräfte) ist die Beschleunigung des Schwerpunktes gleich Null. Dies ist in Abb. 2.2.2 verdeutlicht, bei dem zwei Körper miteinander stoßen und gemäß der Impuls- und Energieerhaltung ihre Geschwindigkeiten ändern. Der Schwerpunkt selber bewegt sich allerdings *gleichförmig* weiter.

Mit einer äußeren Kraft, beobachtet man eine entsprechende Beschleunigung des Schwerpunktes unseres Teilchensystems. Als Beispiel dient hier eine Silvesterrakete. Durch die Explosion zerfällt diese in viele kleine Teile, für die

allerdings alle *actio=reactio* gilt. Die Rakete ist ein abgeschlossenes System und die Bewegung des Schwerpunktes ändert sich *nicht* durch die Explosion!

Analog zu der äußeren Kraft betrachten wir den Impuls eines Teilchensystems. Für jedes Teilchen ist der Impuls definiert als:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (2.2.7)$$

bzw. für zwei Teilchen:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (2.2.8)$$

mit $M\vec{v}_s = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ ergibt sich

$$\vec{p} = M\vec{v}_s \quad (2.2.9)$$

d.h. der Gesamtimpuls ist Gesamtmasse mal Schwerpunktschwindigkeit in unserem Teilchensystem. Die Änderung des Gesamtimpulses ist die äußere Kraft:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_s}{dt} = M\vec{a}_s = \vec{F}_{eff} \quad (2.2.10)$$

Auch hier gilt, falls keine äußere Kraft wirkt, daß die zeitliche Ableitung des Gesamtimpulses gleich Null ist. Der Gesamtimpuls ist eine Konstante der Teilchenbewegungen. Man spricht von **Impulserhaltung**. Diese Impulserhaltung wollen wir am Beispiel einer Rakete, wie in Abb. 2.2.3 illustriert.

Eine Rakete stößt Treibstoff aus, der Gesamtimpuls bleibt allerdings erhalten. Vor dem Ausstoßen des Treibstoffs hat die Rakete eine Masse M und eine Geschwindigkeit v . Nach dem Ausstoßen eines Massenelements dM hat sich die Geschwindigkeit auf $v + dv$ erhöht. Das ausgestoßene Massenelement selbst bewegt sich mit der Geschwindigkeit u , die etwas langsamer als $v + dv$ ist. Die Impulsbilanz vor und nach dem Ausstoßen des Treibstoffs ist:

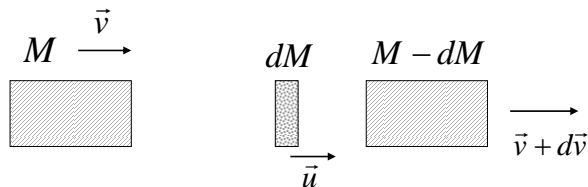


Abbildung 2.2.3: Beispiel: Beschleunigung einer Rakete.

$$Mv = dMu + (M - dM)(v + dv) \quad (2.2.11)$$

Wir führen die Austoßgeschwindigkeit als die Relativgeschwindigkeit v_{rel} gegeben durch die Differenz von u und $v + dv$ ein:

$$u - (v + dv) = v_{rel} \quad (2.2.12)$$

Nachdem u kleiner ist als $v + dv$ ist v_{rel} hier zunächst eine negative Zahl. Wir erhalten den Ausdruck:

$$Mv = dM(v_{rel} + v + dv) + (M - dM)(v + dv) \quad (2.2.13)$$

der sich vereinfacht zu:

$$0 = dMv_{rel} + Mdv \quad (2.2.14)$$

Wir teilen beide Seiten durch dt und bekommen F_{Rakete} . An dieser Stelle gilt es allerdings zu beachten, daß wir als Massenelemente dM in gleichwertiger Weise, die Änderung der Raketenmasse als auch die Änderung der ausgestoßenen Gasmasse benutzt haben. Dies ist zulässig, da $dM_{Gas} = dM_{Rakete}$. Allerdings ist die zeitliche Änderung unterschiedlich, da die Masse des ausgestoßenen Gases zunimmt und die der Rakete abnimmt, d.h. $\frac{dM_{Gas}}{dt} = -\frac{dM_{Rakete}}{dt}$. Demzufolge müssen wir bei der Division von Gl. 2.2.14 durch dt die Vorzeichen genau beachten: falls wir als dM grundsätzlich die Masse der Rakete definieren und v_{rel} als positive Geschwindigkeit, bekommen wir für F_{Rakete} :

$$-\frac{dM}{dt}v_{rel} = M\frac{dv}{dt} = F_{Rakete} \quad (2.2.15)$$

Die Gleichung

$$-\frac{dM}{dt}v_{rel} = M\frac{dv}{dt} \quad (2.2.16)$$

setzt den Treibstoffverbrauch $\frac{dM}{dt}$ mal Ausströmgeschwindigkeit in Bezug zur Beschleunigungskraft $M\frac{dv}{dt}$. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Massenänderung läßt sich aus der Differentialgleichung 2.2.14

$$dv = -v_{rel}\frac{dM}{M} \quad (2.2.17)$$

lösen. Durch Integration bekommen wir

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{M_1}^{M_2} -v_{rel}\frac{dM}{M} = -v_{rel}\ln\frac{M_2}{M_1} \quad (2.2.18)$$

als Endergebnis:

$$v_2 - v_1 = -v_{rel} \ln \frac{M_2}{M_1} \quad (2.2.19)$$

D.h. die Endgeschwindigkeit hängt logarithmisch von dem Verhältnis aus Anfangsmasse M_1 und Endmasse M_2 ab (Nachdem gilt $M_2 < M_1$ ist der Logarithmus negativ).

2.2.3 Stoßprozesse

Im folgenden wollen wir Stoßprozesse näher untersuchen. Betrachten wir dazu zwei Körper A und B, die miteinander stoßen und dabei Energie und Impuls austauschen (siehe Abb. 2.2.4). Nach dem Stoß wird der Körper A um den Winkel Θ abgelenkt, während der Körper B unter einem Winkel ϑ angestoßen wird. Für diese Stoßprozesse gelten mehrere Erhaltungssätze:

Erhaltungssätze

Betrachten wir den Impuls vor (ungestrichene Größen) und nach dem Stoßprozess (gestrichene Größen). Nachdem wir ein isoliertes System betrachten und somit keine äußeren Kräfte wirken, ist die Summe der Impulse vor und nach dem Stoß identisch. Die **Impulserhaltung** lautet:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (2.2.20)$$

Die Impulserhaltung in einem geschlossenen System gilt grundsätzlich.

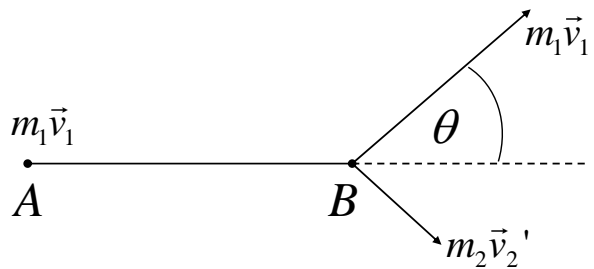


Abbildung 2.2.4: Stoß zwischen zwei Teilchen. B ruht vor dem Stoß.

Für die kinetische Energie vor und nach dem Stoß können wir folgende Bilanz aufstellen. Hierbei betrachten wir die Teilchen vor dem Stoß unendlich

voneinander entfernt, d.h. die potentielle Energie der Wechselwirkung sei Null. Diese **Energieerhaltung** ergibt:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 - Q \quad (2.2.21)$$

Der Wert für Q entscheidet unterschiedliche Arten von Stoßprozessen:

- $Q = 0$, **elastische Stöße**

Falls $Q = 0$ gilt, handelt es sich um elastische Stöße. D.h. die kinetische Energie in dem Stoßprozeß ist eine Erhaltungsgröße.

- $Q < 0$, **inelastische Stöße**

Falls $Q < 0$ gilt, handelt es sich um inelastische Stöße. D.h. die kinetische Energie nach dem Stoßprozeß ist *kleiner* als vor dem Stoß. Ein Teil der Bewegungsenergie wird bei einem inelastischen Stoß in interne Anregung der Stoßpartner umgewandelt. Zum Beispiel können bei einem Stoßprozeß von zwei Molekülen, diese in Schwingung oder Rotation versetzt werden. Beides entspricht inneren Anregungen der Stoßpartner.

- $Q > 0$, **superelastische Stöße**

Falls $Q > 0$ gilt, handelt es sich um superelastische Stöße. D.h. die kinetische Energie nach dem Stoßprozeß ist *größer* als vor dem Stoß. Ein Teil der internen Anregung der Stoßpartner wird bei einem superelastischen Stoß in Bewegungsenergie umgewandelt. Zum Beispiel können bei einem Stoßprozeß von zwei Molekülen, die sich in Schwingung oder Rotation befinden, sich die Moleküle nach dem Stoß schneller bewegen. Dafür schwingen bzw. rotieren sie dann nicht mehr.

Für diese Betrachtung von Stoßprozessen ist wichtig, daß die Impulserhaltung *immer* gilt, während die Erhaltung der kinetischen Energie nur bei elastischen Stößen gültig ist.

Schließlich haben wir noch die **Drehimpulserhaltung** in einem System, in dem keine äußeren Kräfte wirken. Der Gesamtdrehimpuls bei zwei Teilchen ist gegeben als (siehe Abb. 2.2.5):

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \quad (2.2.22)$$

Die Änderung des Drehimpulses mit der Zeit ist:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} \right) + \left(\vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} \right) \quad (2.2.23)$$

Die Terme $(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p})$ fallen weg, da das Kreuzprodukt aus Zeitableitung von \vec{r} und \vec{p} Null ist (wegen $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \parallel \vec{p} = m\vec{v}$). Dies läßt sich schreiben als:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2) \quad (2.2.24)$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite entsprechen einem **Drehmoment**. Dieses Drehmoment ist definiert als:

$$\boxed{\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad (2.2.25)$$

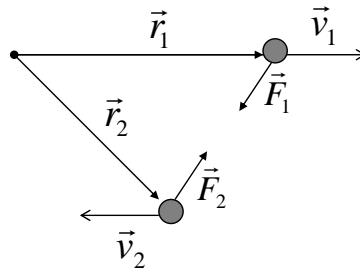


Abbildung 2.2.5: Für die Bewegung eines Teilchens läßt sich immer ein Drehimpuls bezüglich eines Punktes definieren: $\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1$. In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtdrehimpuls eine Erhaltungsgröße.

Hat man ein System aus zwei Körpern, die in Wechselwirkung zueinander stehen muß gelten $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Dadurch vereinfacht sich Gl. 2.2.24 zu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 \quad (2.2.26)$$

Nachdem $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ gleich dem Verbindungsvektor zwischen den beiden Massenpunkten entspricht ist der Vektor \vec{F}_2 parallel zu $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ und das Kreuzprodukt wird Null. D.h. in einem abgeschlossenen System muß gelten:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \vec{L} = \text{const.} \quad (2.2.27)$$

D.h. der Gesamtdrehimpuls in einem Teilchensystem bleibt konstant und ist Erhaltungsgröße. Während die Erhaltung des Gesamtimpulses ein Ausdruck für die *gleichförmige Translation des Schwerpunktes* ist, ist die Erhaltung des Drehimpulses ein Ausdruck für die *gleichförmige Rotation eines Systems von Massenpunkten um den Schwerpunkt*.

Beispiele für Stoßprozesse

Betrachten wir als Illustration für die Anwendung der Erhaltungssätze das eindimensionale Beispiel von zwei Wagen, wobei der Wagen 1 (Geschwindigkeit v_1) auf den ruhenden Wagen 2 auffährt. Wir wollen drei Fälle unterscheiden, die Stöße seien jeweils elastisch. Nach dem Stoß hat der Wagen 1 die Geschwindigkeit v'_1 und der Wagen 2, v'_2 . Die Größen vor und nach dem Stoß sind jeweils ungestrichen und gestrichen.

- **Beide Wagen gleich schwer**

Zunächst gelten im eindimensionalen Impuls- und Energieerhaltung:

$$v_1 = v'_1 + v'_2 \quad (2.2.28)$$

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 \quad (2.2.29)$$

Aus der Impulserhaltung bekommen wir $v'_1 = v_1 - v'_2$. Eingesetzt in die Energieerhaltung ergibt sich:

$$v_1^2 = (v_1 - v'_2)^2 + v'^2_2 = v_1^2 - 2v_1v'_2 + v'^2_2 + v'^2_2 \quad (2.2.30)$$

bzw.

$$0 = -2v_1v'_2 + 2v'^2_2 \quad (2.2.31)$$

Als Endergebnis bekommt man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu:

$$v'_2 = v_1 \quad v'_1 = 0 \quad (2.2.32)$$

D.h. der erste Wagen bleibt stehen, während der zweite Wagen mit der Geschwindigkeit des ersten Wagens weiterläuft.

- **Wagen 2 doppelt so schwer wie Wagen 1**

Zunächst gelten im eindimensionalen Impuls- und Energieerhaltung:

$$v_1 = v'_1 + 2v'_2 \quad (2.2.33)$$

$$v_1^2 = v'^2_1 + 2v'^2_2 \quad (2.2.34)$$

Aus der Impulserhaltung bekommen wir $v'_1 = v_1 - 2v'_2$. Eingesetzt in die Energieerhaltung ergibt sich:

$$v_1^2 = (v_1 - 2v'_2)^2 + 2v'^2_2 = v_1^2 - 4v_1v'_2 + 4v'^2_2 + 2v'^2_2 \quad (2.2.35)$$

bzw.

$$0 = -4v_1v'_2 + 6v'^2_2 \quad (2.2.36)$$

Als Endergebnis bekommt man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu:

$$v'_2 = \frac{2}{3}v_1 \quad v'_1 = -\frac{1}{3}v_1 \quad (2.2.37)$$

D.h. der erste Wagen kommt mit einem Drittel der Geschwindigkeit zurück, während der zweite Wagen mit zwei Drittel der Geschwindigkeit des ersten Wagens weiterläuft.

- **Wagen 1 doppelt so schwer wie Wagen 2**

Zunächst gelten im eindimensionalen Impuls- und Energieerhaltung:

$$2v_1 = 2v'_1 + v'_2 \quad (2.2.38)$$

$$2v_1^2 = 2v'^2_1 + v'^2_2 \quad (2.2.39)$$

Aus der Impulserhaltung bekommen wir $v'_1 = v_1 - \frac{1}{2}v'_2$. Eingesetzt in die Energieerhaltung ergibt sich:

$$2v_1^2 = 2\left(v_1 - \frac{1}{2}v'_2\right)^2 + v'^2_2 = 2\left(v_1^2 - v_1v'_2 + \frac{1}{4}v'^2_2\right) + v'^2_2 \quad (2.2.40)$$

bzw.

$$0 = -2v_1v'_2 + \frac{3}{2}v'^2_2 \quad (2.2.41)$$

Als Endergebnis bekommt man die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu:

$$v'_2 = \frac{4}{3}v_1 \quad v'_1 = \frac{1}{3}v_1 \quad (2.2.42)$$

D.h. der erste Wagen fährt mit einem Drittel der Geschwindigkeit weiter, während der zweite leichtere Wagen mit vier Drittel der Geschwindigkeit des ersten Wagens davon läuft.

- **zentraler, elastischer Stoß**

Betrachten wir einen zentralen Stoß im Laborsystem, bei dem der Stoßpartner 2 sich zunächst in Ruhe befindet ($v_2 = 0$). Für die Impuls- und Energiebilanz bekommen wir:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \quad (2.2.43)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \quad (2.2.44)$$

Daraus lassen sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoß ausrechnen mit:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad (2.2.45)$$

Die übertragene Energie ΔE ist die Bewegung des Körpers 2 nach dem Stoß. Man bekommt:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m_2v'^2_2 = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1 + m_2)^2}v_1^2 = 4\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}E_1 \quad (2.2.46)$$

Dieser **Energieübertrag** wird maximal, wenn die Massen der beiden Stoßpartner gleich ist!

- **zentraler, inelastischer Stoß**

Betrachten wir denselben Stoß, diesmal aber als komplett inelastischen Fall, d.h. beide Stoßpartner verbinden sich beim Stoß und fliegen als gemeinsamer Körper weiter (siehe Abb. 2.2.6). Die Schwerpunkts-geschwindigkeit bleibt wegen der Allgemeingültigkeit der Impulserhaltung bestehen. D.h. man bekommt:

$$v_s = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.2.47)$$

Die Differenz der kinetischen Energie nach dem Stoß und vor dem Stoß ist gegeben als Q :

$$Q = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_s^2 - \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad (2.2.48)$$

bzw.

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad (2.2.49)$$

Man erkennt, daß die Relativenergie als die kinetische Energie im Schwerpunktsystem umgewandelt wird in innere Energie Q . Nach dem Stoß ist die Relativgeschwindigkeit gleich Null.

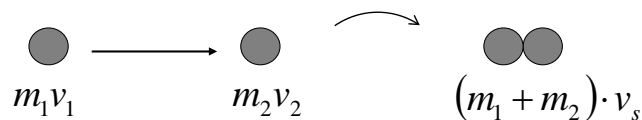


Abbildung 2.2.6: Komplett inelastischer Stoß.

Als Beispiel für die Anwendung des komplett inelastischen Stoßes sei das ballistische Pendel genannt (siehe Abb. 2.2.7). Hier trifft ein Geschoss der Masse m und Geschwindigkeit v auf eine schwere Masse M und bleibt dort stecken. Diese schwere Masse ist als Pendel aufgehängt. Die Bewegungsenergie des Geschosses überträgt sich nach der Impulserhaltung auf die Bewegungsenergie des schweren Körpers (Geschwindigkeit V). D.h. die Impulsbilanz lautet:

$$mv = (m + M)V \quad (2.2.50)$$

Die kinetische Energie des schweren Körpers führt zu einer Auslenkung des Pendels, das gegen die Schwerkraft Arbeit verrichten kann. Die kinetische Energie des Körpers wird in potentielle Energie umgewandelt. D.h. am Umkehrpunkt des Pendels muß gelten (siehe Abb. 2.2.7):

$$\frac{1}{2} (m + M)V^2 = (m + M)gh \quad (2.2.51)$$

wenn h die Höhe der Pendelauslenkung im Umkehrpunkt bezeichnet. Aus dieser Impuls- und Energiebilanz läßt sich die Geschwindigkeit des Geschosses v bestimmen zu:

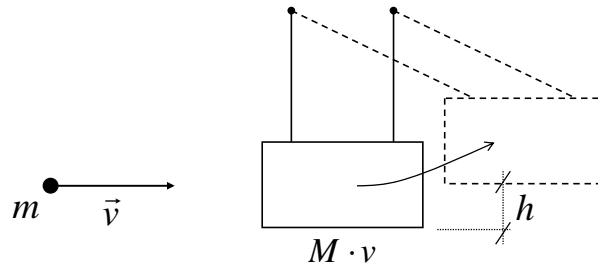


Abbildung 2.2.7: Ballistisches Pendel.

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} \quad (2.2.52)$$

Bevor es explizite Möglichkeiten gab die Geschwindigkeit schneller Körper zu messen (z.B. Lichtschranken), war das ballistische Pendel eine sehr gebräuchliche Methode. Durch das Verhältnis der Massen wurde eine sehr hohe Geschwindigkeit v in eine sehr langsame Geschwindigkeit V herunter transformiert.

2.2.4 Streuung

Schwerpunkt- und Laborsystem

Für die Beschreibung von Streuung ist es zweckmäßig ein Bezugssystem zu wählen, dessen Schwerpunkt in Ruhe bleibt. Nachdem Stoßprozesse in einem isolierten System die gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes nicht ändern verwendet man ein ausgezeichnetes Bezugssystem, das sich mit dem Schwerpunkt gleichförmig *mit bewegt*, das **Schwerpunktsystem**. Dies läßt sich aus einem Stoßprozeß im Laborsystem konstruieren indem man von jedem Geschwindigkeitsvektor den Vektor der Schwerpunktschwindigkeit abzieht, wie in Abb. 2.2.8 illustriert. Man erkennt, daß vor aber auch nach dem Stoß, die Teilchen sich kollinear zueinander bewegen und nur ein einziger Streuwinkel den Stoßprozeß beschreibt. Der Impuls vor und nach dem Stoß im Schwerpunktsystem ist gleich 0, da der Schwerpunkt sich ja nicht bewegt!

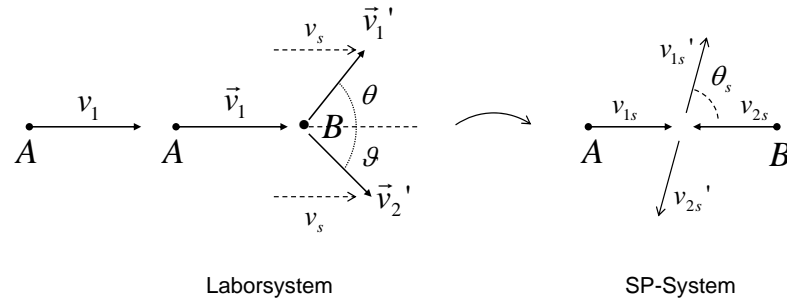


Abbildung 2.2.8: Übergang vom Labor- ins Schwerpunktsystem.

Die kinetische Energie im Schwerpunktsystem läßt sich berechnen, wenn man die Geschwindigkeiten durch den entsprechend verschobenen Vektor $\vec{v}_{1s} = \vec{v}_1 - \vec{v}_s$ ersetzt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} (m_1 v_{1s}^2 + m_2 v_{2s}^2) + \underbrace{(m_1 \vec{v}_{1s} + m_2 \vec{v}_{2s})}_{=0} \vec{v}_s + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_s^2 \quad (2.2.53)$$

Wegen der Impulserhaltung im Schwerpunktsystem fällt der mittlere Term weg und man bekommt schließlich zwei Anteile der kinetischen Energie: die Bewegung der einzelnen Massenpunkte und die Bewegung des Schwerpunktes selbst.

$$E_{kin} = E_{kin,S} + \frac{1}{2} M v_s^2 \quad (2.2.54)$$

Betrachten wir jetzt die Kräfte die in einem Stoßprozeß wirken.

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \quad \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \quad (2.2.55)$$

mit dem dritten Newton'schen Axiom gegeben als $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} \quad (2.2.56)$$

Wir definieren die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen als $\vec{v}_{12} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$.

$$\frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12} \quad (2.2.57)$$

bzw.

$$\vec{F}_{12} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}_{\mu} \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} \quad (2.2.58)$$

Dies läßt sich als Bewegungsgleichung eines *einzigsten* Teilchens darstellen, wenn wir mit μ die sog. **reduzierte Masse** einführen. Man bekommt:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \mu \frac{d\vec{v}_{12}}{dt}} \quad (2.2.59)$$

D.h. die Bewegung zweier Körper läßt sich formal als die Bewegung eines einzigen Körpers mit der reduzierten Masse μ und der Relativgeschwindigkeit \vec{v}_{12} lösen. Die kinetische Energie in dieser Beschreibungsform ist

$$E_{kin}|_S = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{is}^2 - \frac{1}{2} M v_s^2 \quad (2.2.60)$$

Mit $v_s = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{is}$ ergibt sich:

$$E_{kin}|_S = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 \quad (2.2.61)$$

D.h. die kinetische Energie im Schwerpunktsystem ist formal durch die Bewegung der reduzierten Masse mit der Relativgeschwindigkeit charakterisiert.

Das Streuproblem

Was lernt man jetzt aus Experimenten an denen zwei Teilchen aneinander gestreut werden? Betrachten wir dazu noch einmal die Streuung zweier Teilchen im Schwerpunktsystem. Es herrsche zum Beispiel eine abstoßende Wechselwirkung und die Trajektorien der einzelnen Teilchen sehen wie in Abb. 2.2.9 aus.

Wie für jeden elastischen Streuprozeß gelten Energie- und Impulserhaltung. Diese Erhaltungssätze betrachten aber nur die Situation vor- und nach dem Stoß, bei dem die Teilchen unendlich voneinander entfernt sind. Die genaue Trajektorie bei dem Stoß selber entscheidet aber, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Teilchen genau in eine *bestimmte Richtung* gestreut wird. Die Größe nach der in dieser Situation die Trajektorien unterschieden werden können ist der sogenannte **Stoßparameter** b (siehe Abb. 2.2.7). Je kleiner der Stoßparameter, desto näher kommen sich die Teilchen, wie in

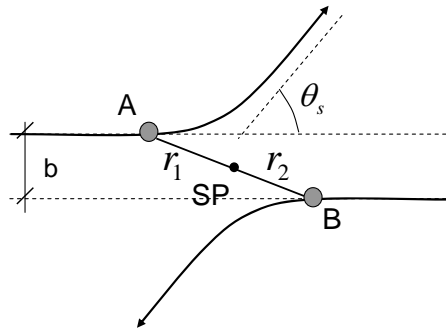


Abbildung 2.2.9: Streuung im Schwerpunktsystem.

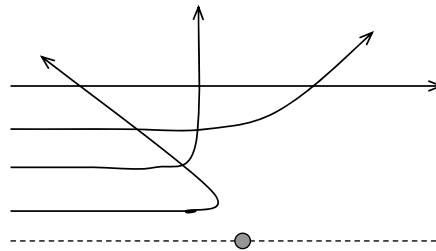


Abbildung 2.2.10: Typische Trajektorien in einem repulsiven Potential in Abhängigkeit vom Stoßparameter.

Abb. 2.2.10 illustriert. Für kleine Stoßparameter erfolgen in einem repulsiven Potential große Ablenkwinkel.

Den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Ablenkwinkel wollen wir an einem einfachen und einem komplizierten Beispiel analysieren:

- **Stoß harter Kugeln**

Betrachten wir zunächst den Stoß zweier harter Kugeln. Dazu betrachten wir die Geometrie wie in Abb. 2.2.9 gezeigt. Aus der Zeichnung können wir ablesen, daß für den Fall $m_2 \gg m_1$ gelten muß:

$$b = (r_1 + r_2) \cos \alpha \quad (2.2.62)$$

Falls die Massen m_1 und m_2 vergleichbar sind, würde man zunächst in das Schwerpunktsystem transformieren, dort den Zusammenhang zwi-

schen Stoßparameter und Ablenkwinkel bestimmen und danach diese Abhängigkeit wieder in das Laborsystem zurück transformieren.

Für $m_2 \gg m_1$ ergibt sich der Streuwinkel Θ zu:

$$\Theta(b) = 2 \arccos \frac{b}{r_1 + r_2} \quad (2.2.63)$$

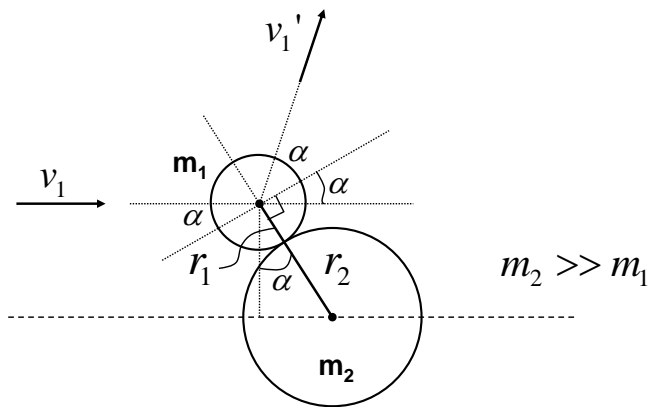


Abbildung 2.2.11: Streuung zweier harter Kugeln aneinander. Hierbei sei $m_2 \gg m_1$, d.h. die Kugel mit Masse m_2 nimmt nur sehr wenig Energie auf.

• Streuung in einem beliebigen Potential

Für die Streuung in einem beliebigen zentral-symmetrischen Potential betrachten wir die Streuebene wie in Abb. 2.2.12 gezeigt. Ein Teilchen solle in einem abstoßenden Potential mit einem Stoßparameter b auf den Streupartner stoßen und wird dabei um einen Winkel Θ im Schwerpunktsystem abgelenkt. Es ist zweckmäßig die Bewegung der Teilchen in Polarkoordinaten anzuzeigen. D.h. der Ort eines Teilchens ist durch den Abstand der beiden Teilchen r und einen Winkel φ charakterisiert. Die Relativgeschwindigkeit \vec{v}_{12} , kann dann in einen radialen Anteil v_{\parallel} und einen Winkelanteil v_{\perp} aufgeteilt werden:

$$v_{\parallel} = \dot{r} \quad (2.2.64)$$

$$v_{\perp} = \omega r = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} \quad (2.2.65)$$

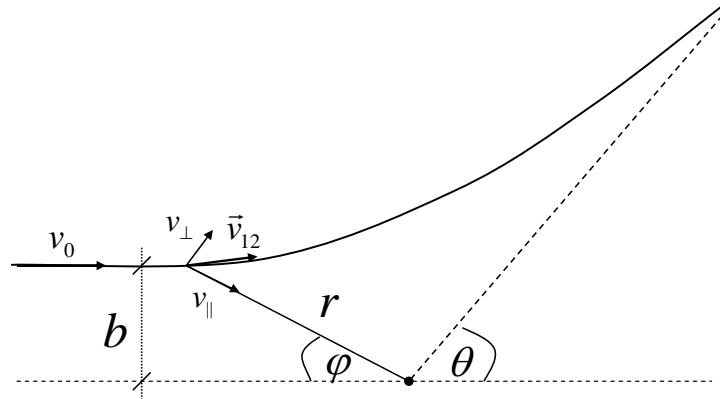


Abbildung 2.2.12: Die Streuung an einem Potential läßt sich als die Bewegung eines Teilchens der Masse μ im Abstand r zum Stoßpartner mit einer Relativgeschwindigkeit v_{12} beschreiben. Es ist zweckmäßig dafür Polarkoordinaten r und ϕ zu benutzen sowie die jeweiligen Geschwindigkeiten parallel zu r v_{\parallel} und senkrecht zur r v_{\perp} .

Mit der kinetischen Energie im Unendlichen E_0 benutzen wir den Energiesatz der Mechanik im Schwerpunktsystem und bekommen:

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 + V(r) \quad (2.2.66)$$

D.h. die Energie E_0 teilt sich zwischen der kinetischen Energie im Schwerpunktsystem und der potentiellen Energie $V(r)$ (=zentralsymmetrisches Potential) auf. Die Relativgeschwindigkeit v_{12} in Polarkoordinaten ist $v_{12} = v_r + v_t$ bzw. die Energie:

$$E_0 = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) \quad (2.2.67)$$

Der Betrag des Drehimpulses im Unendlichen ist:

$$L = \mu r \sin \phi v_0 = \mu v_0 b \quad (2.2.68)$$

Mit v_0 der Relativgeschwindigkeit im Unendlichen. An einem *beliebigen* Ort während der Streuung unter Verwendung der Geschwindigkeit v_{\perp} senkrecht zu r bekommt man:

$$L = \mu r v_{\perp} = \mu r^2 \dot{\phi} \quad (2.2.69)$$

D.h. wegen der Drehimpulserhaltung muß gelten:

$$\mu r^2 \dot{\phi} = \mu v_0 b \quad (2.2.70)$$

Wir können $\dot{\phi}$ in Gl. 2.2.67 einsetzen und bekommen:

$$\dot{r} = v_0 \left[1 - \frac{V(r)}{E_0} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.71)$$

Wir haben jetzt zwei Gleichungen 2.2.70 und 2.2.71, die die Bewegung der beiden Teilchen als die Bewegung einer reduzierten Masse μ am Ort r unter dem Winkel ϕ beschreiben. Die explizite Zeitableitung interessiert nicht und mit

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{1}{\frac{dr}{dt}} = \dot{\phi} \frac{1}{\dot{r}} \quad (2.2.72)$$

bekommt man aus $\frac{d\phi}{dr}$ eine Differentialgleichung für $\phi(r)$. Diese löst man durch Integration mit den entsprechenden gültigen Grenzen für r [$r_{min} \rightarrow \infty$] und ϕ [$0 \rightarrow \pi - \Theta$]. Mit der Annahme, daß $V(r) \propto 1/r$ und mit r_{min} als dem minimal möglichen Abstand der beiden Teilchen erhält man schließlich:

$$b = \frac{1}{2} \cot \frac{\Theta}{2} \quad (2.2.73)$$

D.h. für einen Stoßparameter $b = 0$ bekommen wir wieder Rückstreuung, d.h. $\Theta = \pi$.

Typische Verläufe für die Abhängigkeit des Streuwinkels von dem Stoßparameter sind in Abb. 2.2.13 gezeigt. Für ein Experiment bedeutet dies, daß unterschiedliche Stoßparameter zu unterschiedlichen Ablenkwinkel führen und daß dieser Zusammenhang stark von der Art der Wechselwirkung abhängt. Diese Abhängigkeit findet auch ihren Ausdruck in der Wahrscheinlichkeit unterschiedlicher Streueignisse. D.h. durch eine Messung dieser Verteilung läßt sich auf die Natur der Wechselwirkung schließen.

Die Analyse von Streueignissen ist eine ganz wesentliche Experimentier-technik in der Physik. In jedem Streuprozeß ist ein streuendes Teilchen eine Sonde, die das Wechselwirkungspotential vermisst. Durch ein Vergleich zwischen Messung und Vorhersage kann aus einem Streuexperimente die Form des Wechselwirkungspotentials bestimmt werden. Klassisches Beispiel ist die

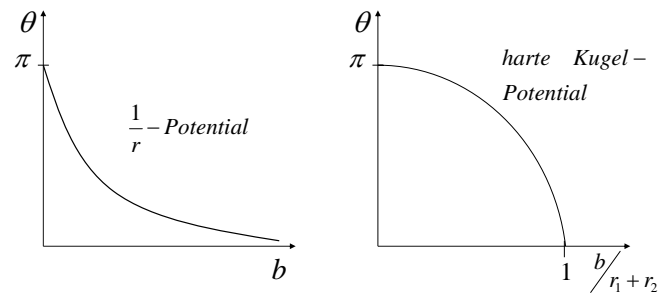


Abbildung 2.2.13: Abhängigkeit des Streuwinkels vom Stoßparameter für den Stoß zweier Teilchen für die ein $1/r$ -Potential gilt und für den Stoß zweier harter Kugeln.

Rutherfordstreuung als die Streuung sehr schneller Heliumkerne an Atomen. Rutherford konnte zeigen, daß diese Streuereignisse durch ein einfaches abstoßendes Potential, das im Kern des Atoms lokalisiert ist, beschreibbar waren. Er entdeckte den Atomkern (Wäre die Masse der Atome homogen auf das Volumen eines Atoms verteilt, hätte sich eine andere Verteilung der Streuereignisse ergeben).

2.3 Bezugssysteme

Bezugssysteme spielen eine große Rolle in der Physik, da sie ein Koordinatensystem für die Naturbeobachtung vorgeben. Im einfachsten Fall kann dieses Bezugssystem ruhend sein oder sich gleichförmig bewegen. Führt man zum Beispiel ein Experiment in Ruhe durch oder in einem sich gleichmäßig bewegenden Zug, so ist der Ausgang des Experimentes immer gleich. Wird dieses Bezugssystem allerdings beschleunigt, so treten zusätzliche Kräfte auf, die eben durch diese Beschleunigung des Koordinatensystems selbst hervorgerufen werden.

Weiterhin treten in der Physik oft Fälle auf, in denen ein Beobachter außerhalb des Bezugssystem steht und ein sich bewegendes System beobachtet. Auch dann ist es wichtig, daß der ruhende Beobachter die Physik in dem sich bewegenden System richtig beschreiben kann. Dies soll an drei Beispielen erläutert werden:

2.3.1 Galilei-Transformation

Stellen wir uns ein Bezugssystem vor, das sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. Beispiel sei ein Zug. Ein Beobachter im ruhenden System des Bahnsteiges sieht für den Ort \vec{r} eines Gegenstandes im sich bewegenden Zug wie:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t \quad (2.3.1)$$

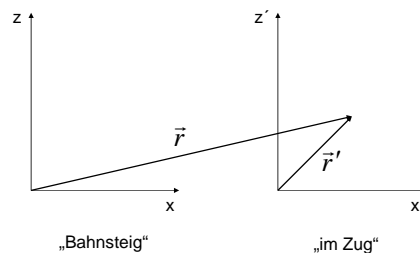


Abbildung 2.3.1: Der Ort \vec{r} im Ruhesystem und \vec{r}' im bewegten Bezugssystem.

Der Beobachter im Zug sieht den Ort \vec{r}' . Die Ableitung von Gl. 2.3.1 nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (2.3.2)$$

Eine weitere Ableitung ergibt die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (2.3.3)$$

D.h. die Beschleunigung vom Bahnsteig aus gesehen (\vec{a}) wie auch für den Beobachter im Zug (\vec{a}') sind gleich. D.h. ein Beobachter kann nicht entscheiden, ob er sich in einem sich gleichförmig bewegendem System befindet oder nicht. Diese Systeme bezeichnet man auch als **Inertialsysteme**.

Betrachten wir diese Galilei-Transformation am Beispiel des freien Falls von einer Höhe h in negative z -Richtung in einem Zug, der mit Geschwindigkeit u in x -Richtung vorbeifährt (siehe Abb. 2.3.1). Ein Beobachter vom Bahnsteig aus wird eine Wurfparabel beobachten. Für ihn überlagert sich die gleichförmige Bewegung in x -Richtung mit der beschleunigten Bewegung in z -Richtung. D.h. er beobachtet:

$$x = ut \quad (2.3.4)$$

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.3.5)$$

Durch die Galilei-Transformation können wir uns in das gleichförmig bewegte Bezugssystem begeben und bekommen in den Koordinaten im Zug:

$$x' = 0 \quad (2.3.6)$$

$$z' = h - \frac{1}{2}gt'^2 \quad (2.3.7)$$

In beiden Systemen beobachten wir dieselbe Physik des freien Falls.

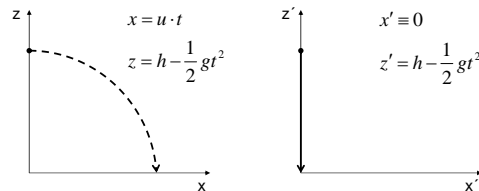


Abbildung 2.3.2: Der freie Fall im Ruhesystem und im bewegten Bezugssystem.

2.3.2 Beschleunigte Bezugssysteme

geradlinig beschleunigtes Bezugssystem

Falls das sich bewegende System mit \vec{a}_{System} beschleunigt wird (d.h. der Zug fährt an), bekommen wir:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}_{System}t^2 \quad (2.3.8)$$

Die Ableitung von Gl. 2.3.8 nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} + \vec{a}_{System}t \quad (2.3.9)$$

eine weitere Ableitung ergibt die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{System} \quad (2.3.10)$$

D.h. der Beobachter im Zug (\vec{a}') sieht eine Beschleunigung, die sich aus zwei Anteilen zusammensetzt, einer Beschleunigung durch eine wirkende Kraft (\vec{a}) und eine Beschleunigung des Bezugssystem (a_{System}) selbst.

Nehmen wir an, daß der Beobachter vom Bahnsteig keine Beschleunigung des Körpers beobachtet, also $\vec{a} = 0$. Der Beobachter im Zug muß allerdings annehmen, daß der Körper mit $\vec{a}' = -\vec{a}_{System}$ beschleunigt wird. Auf den Körper wirkt eine *Scheinkraft*, die **Trägheitskraft**. D.h. läßt zum Beispiel der Beobachter im Zug einen Körper fallen, so wird er sich im Moment des Anfahrens des Zuges von ihm weg bewegen.

rotierendes Bezugssystem

Das prominenteste rotierende Bezugssystem ist unsere Erde, die sich in 24 Stunden einmal um sich selbst dreht. Wie ändert sich jetzt die Beobachtung eines physikalischen Phänomens, wenn wir ein Experiment im rotierenden Koordinatensystem Erde oder im festen Koordinatensystem eines externen Beobachters aus dem Weltall durchführen? Der Ort in einem festen Koordinatensystem ist gegeben aus den Achsenabschnitten x, y und z mit den jeweiligen Einheitsvektoren:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (2.3.11)$$

Die Geschwindigkeit ist:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad (2.3.12)$$

In dem rotierenden Koordinatensystem, wie in Abb. 2.3.2 wird derselbe Ort als \vec{r}' wahrgenommen:

$$\vec{r}' = x' \vec{e}'_x + y' \vec{e}'_y + z' \vec{e}'_z \quad (2.3.13)$$

Die Geschwindigkeit, die ein rotierender Beobachter wahrnimmt ist:

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{e}'_z \quad (2.3.14)$$

Wie sind jetzt die Geschwindigkeiten im rotierenden und im festen Koordinatensystem miteinander verknüpft? Für die Geschwindigkeit des festen Beobachters müssen wir die Geschwindigkeit des rotierenden Beobachters plus die Bahngeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems addieren. Wir bekommen somit:

$$\vec{v} = \vec{v}' + x' \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + y' \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + z' \frac{d\vec{e}'_z}{dt} \quad (2.3.15)$$

bzw.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (2.3.16)$$

Dieser Zusammenhang ist anschaulich in Abb. 2.3.3 verdeutlicht: betrachten wir zunächst einen Körper, der sich mit einer Geschwindigkeit \vec{v}' auf dieser Erde bewegt. Befinden wir uns im Bezugssystem der Oberfläche der Erde werden wir genau diese Geschwindigkeit \vec{v}' auch messen. Befinden wir uns allerdings im Weltall und schauen auf die Bewegung herab, so beobachten wir eine andere Geschwindigkeit, da sich die Erde ja dreht. Die Winkelgeschwindigkeit bei einer Umlauffrequenz $\vec{\omega}$ ist $\vec{\omega} \times \vec{r}'$. Demnach sieht ein Beobachter aus dem Weltraum (= "Bahnsteig") die Geschwindigkeit \vec{v} .

Welche *Beschleunigung* sieht jetzt ein Beobachter im Bezugssystem der Erde (= "im Zug"), wenn diese rotiert? Vom Weltall (= "Bahnsteig") aus gesehen ist die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Mit Gl. 2.3.16 ergibt sich daraus:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) \quad (2.3.17)$$

Für die weitere Berechnung müssen wir jetzt den Ausdruck $\frac{d\vec{v}'}{dt}$ näher betrachten. Die Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem \vec{v}' war:

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{e}'_z \quad (2.3.18)$$

Für die zeitliche Ableitung mit der Produktregel müssen wir einmal die Variation in x' , y' und z' aber auch in den Einheitsvektoren berücksichtigen:

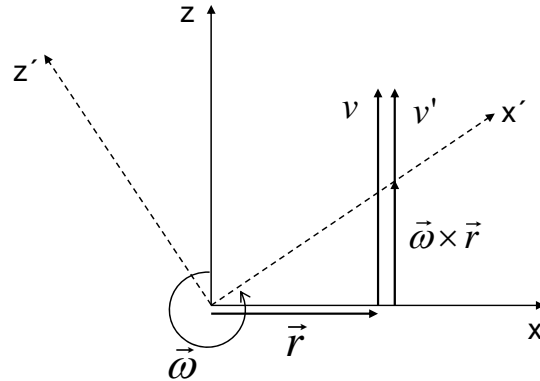


Abbildung 2.3.3: Die Geschwindigkeit im Ruhesystem ist \vec{v} und im rotierenden System \vec{v}' .

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}vece'_x + \frac{d^2y'}{dt^2}vece'_y + \frac{d^2z'}{dt^2}vece'_z + \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{e}'_z}{dt} \quad (2.3.19)$$

bzw.

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{e}'_z}{dt} \quad (2.3.20)$$

Die Änderung des Einheitsvektors im rotierenden Bezugssystem $\frac{d\vec{e}'_z}{dt}$ entspricht der Bahngeschwindigkeit des Einheitsvektors:

$$\frac{d\vec{e}'_z}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_x \quad (2.3.21)$$

D.h. wir bekommen

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (2.3.22)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in 2.3.17 ein und erhalten die Verknüpfung zwischen \vec{a} und \vec{a}' als:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \omega \times \vec{v}' + \omega \times \vec{v} \quad (2.3.23)$$

Jetzt setzen wir \vec{v} aus Gl. 2.3.16 ein, und erhalten damit:

$$\vec{a}' = \vec{a} + 2(\vec{v}' \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) \quad (2.3.24)$$

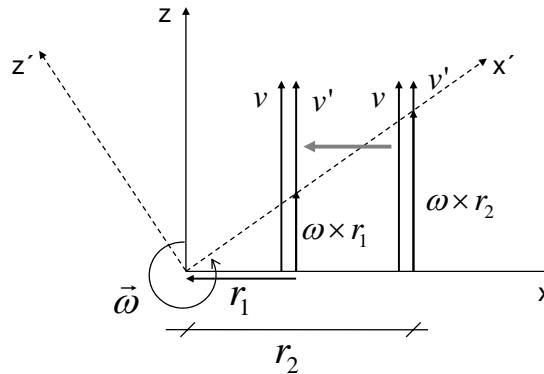


Abbildung 2.3.4: Bewegt sich der Körper auf das Zentrum der Rotation zu, so erscheint die Geschwindigkeit im rotierenden System sich zu erhöhen.

D.h. während ein Beobachter im ruhenden System (= "Bahnsteig" bzw. Weltall) einfach die Beschleunigung \vec{a} beobachtet, muß der Beobachter im rotierenden System (= "im Zug" bzw. auf der Erdoberfläche) zwei zusätzliche Beschleunigungen einführen um die Bewegung des Körpers auf dem Erdboden zu beschreiben. Diese zusätzliche Bewegungen werden durch zwei zusätzliche Kräfte hervorgerufen:

- **Corioliskraft**

$$\boxed{F_c = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega})} \quad (2.3.25)$$

- **Zentrifugalkraft**

$$\boxed{F_z = m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega})} \quad (2.3.26)$$

Beides sind **Scheinkräfte**, da sie nur wirken, wenn der Vorgang im rotierenden Bezugssystem betrachtet wird.

Auf der Nordhalbkugel bewirkt die Corioliskraft immer eine Rechtsablenkung der beobachteten Geschwindigkeit, wie in Abb. 2.3.5 verdeutlicht ist. Diese Rechtsablenkung spielt in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens eine Rolle, so müssen Bahnschienen entsprechend erhöht werden, um die Corioliskraft auf den fahrenden Zug ausgleichen zu können. Die Folgen dieser Corioliskraft sollen an zwei weiteren Beispielen illustriert werden:

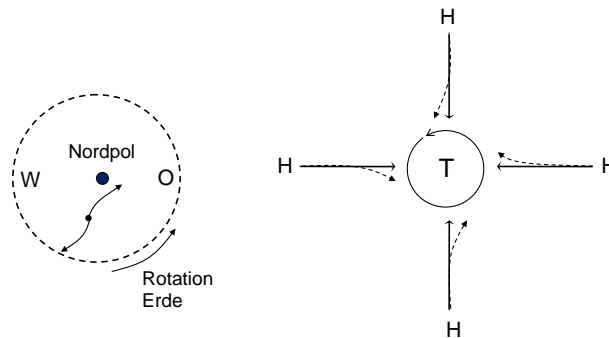


Abbildung 2.3.5: Die Corioliskraft bewirkt eine Rechtsablenkung auf der Nordhalbkugel der Erde. Die Luftmassen, die in ein Tiefdruckgebiet einströmen werden im Bezugssystem der rotierenden Erde nach rechts abgelenkt. Am Ort des Tiefdruckgebietes ergibt dies dann einen Linkswirbel.

- **Foucault'sches Pendel**

Bei einem Foucault'schen Pendel beobachtet man die Änderung der Schwingungsebene eines Pendels im Laufe der Erdrotation. Betrachtet man eine schwingende Masse, so wird diese während ihrer Pendelbewegung immer nach rechts hin abgelenkt. Aus Abb. 2.3.6 erkennt man, daß die Ablenkung das Pendel in seiner Schwingungsebene einmal pro Tag rotieren läßt.

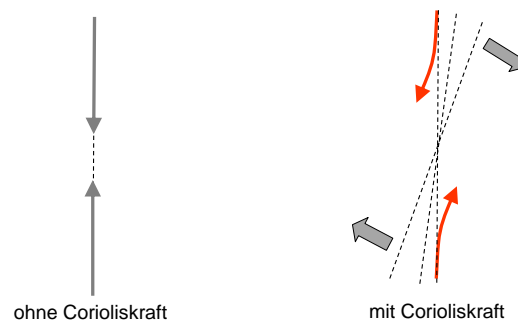


Abbildung 2.3.6: Durch die Rechtsablenkung ändert sich die Schwingungsebene eines Pendels.

- **Wirbelstürme**

Bei Luftdruckunterschieden strömt Luft immer von einem Hochdruckgebiet in ein Tiefdruckgebiet. Durch die Corioliskraft werden die Luftströmung immer nach *rechts* abgelenkt. Durch dieses Einströmen auf das Tiefdruckgebiet entsteht dort ein *Linkswirbel*, wie in Abb. 2.3.5 dargestellt.

2.3.3 Spezielle Relativitätstheorie

Bei sich bewegenden Bezugssystemen (Geschwindigkeit \vec{u}) sollten sich die Geschwindigkeit \vec{v} , die ein ruhender Beobachter (= "Bahnsteig") sieht und die Geschwindigkeit \vec{v}' , die ein sich mit-bewegender Beobachter (= "im Zug") sieht, immer wie:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (2.3.27)$$

zueinander verhalten. Diese Galileo-Transformation ist allerdings nur gültig für Geschwindigkeiten, die deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind. Für beliebige Geschwindigkeiten muß eine neue Transformation entwickelt werden, die berücksichtigt, daß unabhängig vom Beobachterstandpunkt keine Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit beobachtbar sind.

Beobachten wir zum Beispiel die Geschwindigkeit eines Lichtpulses in einem Zug, so legt er die Strecke \vec{r}' in einer Zeit t' zurück, so daß die Geschwindigkeit genau c die Lichtgeschwindigkeit ergibt: $\vec{r}' = ct'$. Ein ruhender Beobachter auf dem Bahnsteig macht allerdings dieselbe Beobachtung. Wenn er die Ausbreitung des Lichtpulses im fahrenden Zug beobachtet, misst er in seinem Bezugssystem wieder die Lichtgeschwindigkeit: $\vec{r} = ct$. Dies ist in Abb. 2.3.7 illustriert.

Michelson-Morley-Experiment

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wurde zum ersten mal im Michelson-Morely Experiment 1881 nachgewiesen. Sie betrachteten ein Interferometer in dem ein Lichtstrahl über eine Glasplatte auf zwei Teilstrahlen aufgespalten wurde (siehe Abb. 2.3.8). Diese Teilstrahlen wurden über Spiegel wieder zurück geworfen, zum Überlapp gebracht und auf einen Detektor fokussiert. Beide Lichtstrahlen interferieren und können sich jetzt je nach Überlagerung gegenseitig auslöschen oder verstärken. Ein Interferenzmuster wird sichtbar. Bewegt man jetzt einen Spiegel so ändert sich die Wegstrecke in einem der Teilstrahlen und dementsprechend ändert sich das Interferenzmuster. Bewegt man das Spektrometer als ganzes so sollte auch hier die Geschwindigkeit der

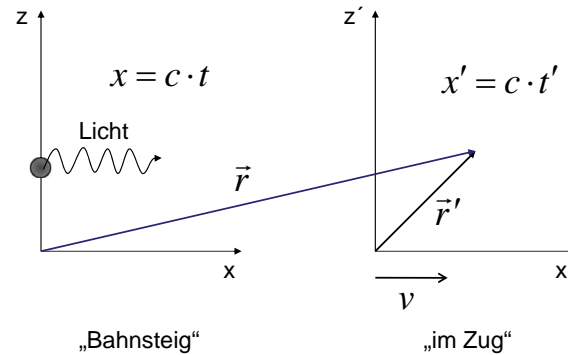


Abbildung 2.3.7: Bezugssystem bewegt sich nahe der Lichtgeschwindigkeit. Der Beobachter im Zug und auf dem Bahnsteig messen gleichermaßen die Lichtgeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Lichtpulses.

Spiegel im Verhältnis zur Geschwindigkeit des Lichtstrahls zu einer entsprechenden Verzögerung der Wegstrecke und damit zu einer Verschiebung des Interferenzmusters führen: Nehmen wir an, daß das Interferometer sich mit knapp Lichtgeschwindigkeit in eine Richtung bewegt und wir dieses System von außen betrachten. Die Laufzeit des Lichtstrahls auf dem Interferometerteil in einer Richtung *senkrecht* zu dieser Bewegungsrichtung ist unbeeinflusst. Die Laufzeit des Lichtstrahls auf dem Interferometerteil, das *parallel* zur Richtung der Bewegungsrichtung liegt, wäre allerdings sehr lang, da der Spiegel dem Lichtstrahl ja fast mit Lichtgeschwindigkeit "davon eilt".

Michelson und Morley konnten ihr Interferometer nicht mit knapp Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die größte zugängliche Geschwindigkeit war die Bewegung der Erde selbst mit 30 km/s um die Sonne. D.h. hält man einen bestimmten Interferometerarm einmal in Richtung der Flugrichtung der Erde und einmal senkrecht dazu sollte sich das Interferenzmuster dabei ändern. Demnach montierten Michelson und Morley das Interferometer auf einem Drehtisch und suchten nach einer Änderung des Interferenzmusters beim Drehen des ganzen Aufbaus. Sie machten allerdings die zunächst überraschende Beobachtung, daß die Orientierung des Interferometers keinen Einfluss auf das Interferenzmuster hat. D.h. egal ob man sich bewegt oder nicht, ändert sich die Laufzeit des Lichtes nicht. D.h. die Lichtgeschwindigkeit bleibt konstant *unabhängig* von der Bewegung des Beobachters.

Wie müssen jetzt Ort und Geschwindigkeit zwischen sich bewegenden Bezugssystemen umgerechnet werden, wenn Gl. 2.3.27 bei hohen Geschwindigkeiten anscheinend nicht mehr gilt? Der Schlüssel dazu liegt in der Tatsache,

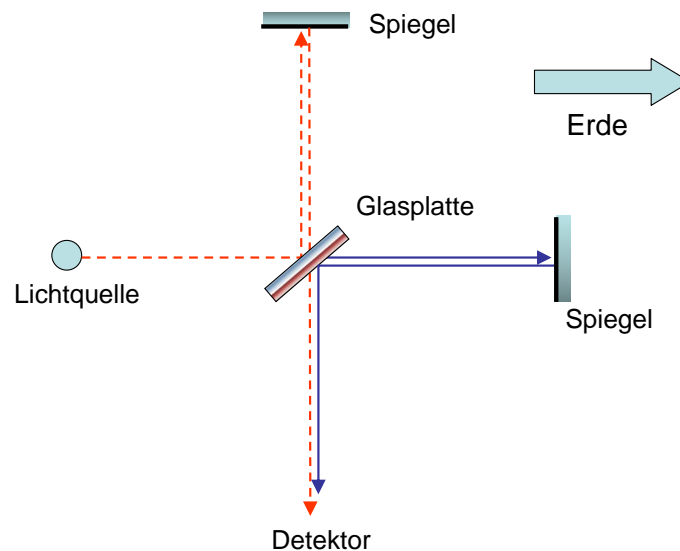


Abbildung 2.3.8: Michelson-Morley-Experiment.

dass die Zeit t wie sie ein ruhender Beobachter (= "Bahnsteig") und wie sie ein Beobachter im bewegten System t' (= "im Zug") erfährt nicht mehr gleich sein müssen! Dies soll an zwei anschaulichen Beispielen erläutert werden.

Zeit-Dilatation

Einstein schlug folgendes Gedankenexperiment vor. Man betrachte eine **Lichtuhr**, bei der ein Lichtblitz ausgesandt wird, der nach einer Strecke Δl von einem Spiegel reflektiert wird und wieder auf die Quelle zurückfällt und dort detektiert wird. Die Wegstrecke pro abgelaufener Zeit ergibt die Lichtgeschwindigkeit. Jetzt bewegt sich diese Lichtuhr senkrecht zur Wegstrecke. Was sieht der ruhende Beobachter (= "Bahnsteig") von diesem System?

Betrachten wir dazu Abb.2.3.9: Bewegt sich der Beobachter mit (= "im Zug") so ruht die Lichtuhr und die Wegstrecke, die der Lichtstrahl zurücklegt, ist $2\Delta l$. Dementsprechend ist die Zeitspanne $\Delta t' = \frac{2\Delta l}{c}$. Beobachtet man dieselbe Uhr allerdings von außen (= "Bahnsteig"), so ändert sich die Wegstrecke, die ein Beobachter sieht:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 2 \left[\Delta l^2 + \left(v \frac{\Delta t}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3.28)$$

Aber obwohl sich die Lichtuhr jetzt bewegt, muß der ruhende Beobachter

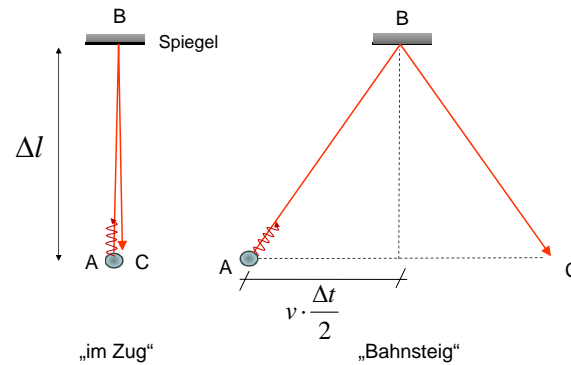


Abbildung 2.3.9: Lichtuhr einmal in Ruhe, und einmal wie man sie beobachten würde, wenn sie sich bewegt.

(= „Bahnsteig“) wieder die Lichtgeschwindigkeit messen, d.h. $\overline{AB} + \overline{BC} = c\Delta t$, wenn Δt die Zeit ist die er selbst mißt. Damit bekommt man:

$$\Delta t = \frac{2\Delta l}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \quad (2.3.29)$$

Mit $2\Delta l = \Delta t' c$ ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} \quad (2.3.30)$$

D.h. die Zeitspanne Δt , wenn man das bewegte System beobachtet (auf dem „Bahnsteig“ zeigt die lokale Uhr, daß 10 Minuten abgelaufen sind), muß länger sein als die Zeitspanne $\Delta t'$ falls der Beobachter sich mit dem System bewegt (im „Zug“ zeigt die Uhr, daß z.B. nur 8 Minuten abgelaufen sind). Umgekehrt formuliert, bewege ich mich mit der Uhr mit, so schreitet die Zeit langsamer voran, im Vergleich zu einer Uhr, die in Ruhe zurückbleibt. Dies läßt sich knapper formulieren als: *Bewegte Uhren gehen langsamer*. Dieses Phänomen wird als **Zeit-Dilatation** bezeichnet. Diesen Effekt kann man auch beobachten, wenn man zwei Uhren vergleicht, wobei eine im Flugzeug von Europa nach Amerika und zurück fliegt. Dabei wird man feststellen, daß die bewegte Uhr etwas nachgeht.

Die Zeitdilatation wurde zum ersten Mal bei $M\mu$ onen, einer Sorte von Elementarteilchen beobachtet. Die Lebensdauer eines $M\mu$ ons in Ruhe is ca. 10^{-6} s. Diese $M\mu$ onen werden auch in Kernreaktionen der kosmischen Höhenstrahlung mit der oberen Atmosphäre gebildet. Dabei entstehen $M\mu$ onen hoher Energie, die man auch noch auf der Erdoberfläche nachweisen

konnte. Benutzt man allerdings die Geschwindigkeit, wie sie in der Kernreaktion die $M\mu$ onen aufnehmen und die Entfernung der oberen Atmosphäre bis zum Erdboden, ist die Zeit die ein $M\mu$ on zum Boden benötigt, *länger* als die Lebensdauer von 10^{-6} s. Wie ist das möglich? Die Zeit, die wir beobachten ist *nicht* die Zeit, die im Ruhesystem des sich bewegenden $M\mu$ ons verstreicht. Da das $M\mu$ on sich mit hoher Geschwindigkeit bewegt, ist die Zeit, die das $M\mu$ on "sieht" sehr viel kürzer als die, die wir auf dem Boden messen. Damit kann das $M\mu$ on ohne weiteres den Erdboden in seiner eigenen Lebensdauer erreichen.

Die Zeitdilatation ist mit einem weiteren bekannten Disput verknüpft, dem **Zwillingsparadoxon**. Betrachten wir einen Zwilling A, der sich auf der Erde befindet, und sein Zwilling B, der auf eine Reise mit hoher Geschwindigkeit sich entfernt, umdreht und wieder zurück kehrt. Da sich B bewegt hat, sollte sein Uhr langsamer laufen und er ist dementsprechend jünger, wenn er sich nach seiner Reise mit seinem daheim gebliebenen Zwilling A wieder trifft (B jünger als A). Wir können dieselbe Situation allerdings auch anders herum betrachten. Für den Zwilling B, entfernt sich Zwilling A von ihm, er dreht um und kommt zurück. D.h. wenn sie sich beider wieder treffen sollte jetzt A jünger sein als B (A jünger als B). Dies ist das Paradoxon. Es klärt sich auf, wenn wir berücksichtigen, daß wir in diesem Fall nicht zwei *Inertialsysteme* betrachten. Das System des Zwilling A auf der Erde ist Inertialsystem. Das System in dem sich B bewegt ist allerdings ein *beschleunigtes System*, da B umkehren muß, um zu A zurück zu kehren. Damit sind beide Betrachtungsweisen nicht gleichwertig. Unter Berücksichtigung der Beschleunigung ist die Zeit, die für den reisenden Zwilling B vergeht kürzer als die für den daheim gebliebenen Zwilling A.

Längen-Kontraktion

Ein weiteres Phänomen der speziellen Relativitätstheorie ist die Tatsache, dass bewegte Objekte in Flugrichtung kürzer erscheinen. Betrachten wir wieder unsere Lichtuhr, die sich aber diesmal in Richtung der Lichtausbreitung mit der Geschwindigkeit v bewegen soll. Ist die Uhr in Ruhe so ergibt sich wieder die Laufzeit:

$$t'_2 - t'_0 = 2 \frac{\Delta l_0}{c} \quad (2.3.31)$$

falls die Distanz zwischen den Spiegeln l_0 ist. Was passiert nun, wenn wir diese Lichtuhr beobachten? Die Wegstrecke vom Spiegel 1 zum Spiegel 2 ist:

$$c(t_1 - t_0) = \Delta l + v(t_1 - t_0) \quad (2.3.32)$$

wenn die Zeiten, die wir vom Bahnsteig aus messen als t bezeichnet werden. Die Wegstrecke vom Spiegel 2 wieder zurück zu Spiegel 1 ist:

$$c(t_2 - t_1) = \Delta l - v(t_2 - t_1) \tag{2.3.33}$$

Demnach ist die Zeitspanne unserer Lichtuhr, wie sie vom Bahnsteig aus beobachtet wird:

$$t_2 - t_0 = \frac{2\Delta l/c}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.3.34}$$

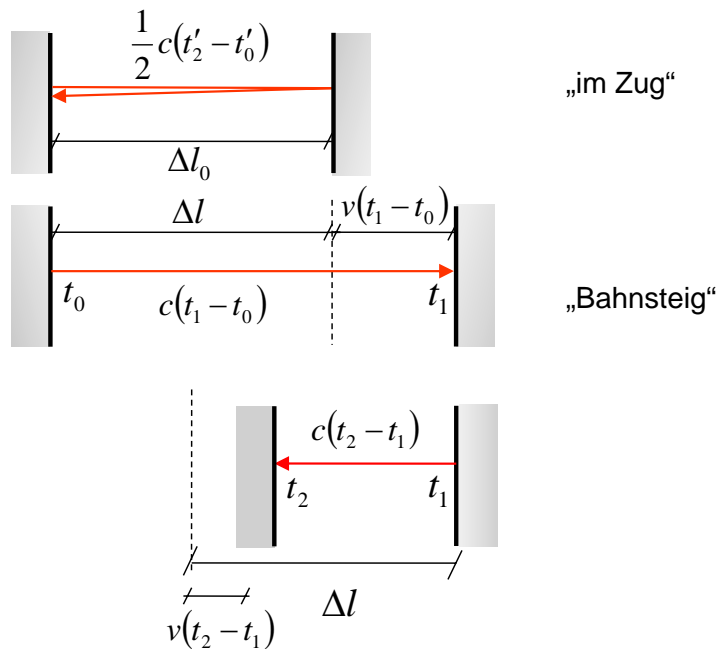


Abbildung 2.3.10: Längenkontraktion: ein Lichtpuls eilt zwischen zwei Spiegeln hin und her. Einmal im Ruhesystem der sich bewegenden Spiegel, und einmal wie es ein Beobachter von außen sieht.

Die Zeitspanne, die wir vom Bahnsteig aus messen und die Zeit, die wir im Zug messen sind nach Gl. 2.3.30 verknüpft via:

$$t_2 - t_0 = \frac{t'_2 - t'_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.3.35}$$

Verknüpft man Gl. 2.3.34, Gl. 2.3.35 und Gl. 2.3.31, so bekommt man schließlich:

$$\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.3.36)$$

D.h. die Länge Δl vom "Bahnsteig" aus gesehen ist kürzer als die Länge Δl_0 , die ein sich mit bewegender Beobachter (im "Zug") messen würde.

Die spezielle Relativitätstheorie fordert eine Längenkontraktion und eine Zeitdilatation, damit jeder Beobachter unabhängig von seinem Standpunkt immer nur maximal die Lichtgeschwindigkeit misst. Daneben ergeben sich aber auch Verzerrungen der wahrgenommenen sich bewegenden Objekte durch **Laufzeiteffekte** wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit. Dies ist verknüpft mit dem Problem der **Gleichzeitigkeit** von Ereignissen. Betrachten wir noch einmal einen ruhenden Maßstab der Länge Δl_0 . Für den ruhenden Beobachter, der sich in der Mitte des Maßstabes befindet, kommt das Licht vom Anfang des Maßstabes und vom Ende des Maßstabes *gleichzeitig* beim ihm an; er mißt die Länge Δl_0 . Bewegt sich dieser Maßstab allerdings mit einer Geschwindigkeit v an ihm vorbei, so kommt das Licht vom Anfang des Maßstabes *etwas früher* und vom Ende *etwas später* an. Er sieht diese beiden Lichtblitze also *nicht gleichzeitig*. Die Länge des vorbei fliegenden Maßstabes kann der ruhende Beobachter allerdings *nur* aus Lichtblitzen ableiten, die zu gleicher Zeit bei ihm eintreffen. Diese müssen allerdings nicht zu gleichen Zeiten gestartet sein. Was heißt das? Falls wir den Lichtblitz vom Anfang des Maßstabes als Referenz nehmen (der früher ankommt), muß der Lichtblitz vom Ende des Maßstabes (der zu spät ankommt) zu einem *früheren Zeitpunkt* ausgesandt werden, damit er *zeitgleich* mit dem ersten Lichtblitz bei dem ruhenden Beobachter ankommt. Diese frühere Aussendung des Lichtblitzes bedeutet, daß der Maßstab sich noch nicht so weit gemäß v fortbewegt hat. Vergleichen wir die Position vom Anfang des Maßstabes zum Ende des Maßstabes so wie es der ruhende Beobachter *gleichzeitig* mißt, so erscheint er ihm deshalb verkürzt.

Diese sehr anschauliche Erklärung geht zunächst von der Gleichzeitigkeit bei dem ruhenden Maßstab aus, d.h. der Beobachter muß sich *genau* in der Mitte des Maßstabes befinden. Bewegt sich der Maßstab auf den Betrachter zu oder von ihm weg, addiert sich zu der Längenkontraktion noch eine Verzerrung durch einfache Laufzeiteffekte hinzu, da das Licht schon im ruhenden System unterschiedlich lange Wege zurücklegen muß (die Entfernung zum hinteren Ende ist größer als zum vorderen). Ein Maßstab, der auf einen zu fliegt wird dadurch länger, da die Laufzeiteffekte die Längenkontraktion überkompensieren. Ein Maßstab, der sich hingegen vom Beobachter entfernt, wird noch stärker verkürzt als die Längenkontraktion vorhersagen würde.³

³Simulationen zu diesem Phänomen unter www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de

Bei der Beschreibung der speziellen Relativitätstheorie in Form der Zeitdilatation bzw. Längenkontraktion ist wichtig sich zu vergegenwärtigen, daß diese Beziehungen immer dann wichtig sind, wenn *ein Beobachter ein anderes Bezugssystem beobachtet*. Beobachtete Zeiten und Längen *erscheinen* ihm gedehnt bzw. verkürzt. Betrachten wir dazu zwei Raumschiffe die sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit v bewegen. Jeder Astronaut altert in seinem Raumschiff auf *gleiche* Weise. Nur wenn ich selbst als Astronaut den anderen beobachte, dann *erscheint* der beobachtete Astronaut jünger zu bleiben als man selbst.

Lorentztransformation

Betrachten wir der Einfachheit halber ein Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt. Als einfache Verknüpfung zwischen den Orten, die der ruhende x und der sich mit bewegende Beobachter x' sieht, hatten wir:

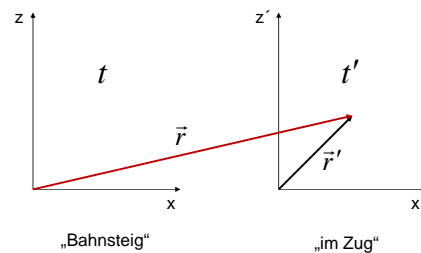


Abbildung 2.3.11: Lorentztransformation.

$$x = x' + vt' \quad (2.3.37)$$

Diese Gleichung scheint für hohe Geschwindigkeiten nicht mehr zu gelten und wir modifizieren sie zu:

$$x' = k(x - vt) \quad (2.3.38)$$

Jetzt behaupten wir, daß die Zeiten, die der ruhende Beobachter (= "Bahnsteig") sieht t und die der sich bewegende Beobachter sieht t' (= "im Zug") unterschiedlich sind. Als Ansatz setzen wir:

$$t' = a(t - bx) \quad (2.3.39)$$

Die Größen k, a und b müssen erst noch bestimmt werden. Nach dem Michelson-Morley Experiment sollte ja die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit für den ruhenden und den bewegten Beobachter das selbe Ergebnis liefern. Betrachten wir dazu einen Lichtblitz der eine Strecke x in einer Zeit t durchläuft. Diese Strecke sei auf einem Zug montiert, der sich bewegt: (i) Eine Lichtquelle sendet zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Lichtblitz aus, der zur Zeit t des ruhenden Beobachters (= "Bahnsteig") am Ort x empfangen wird; (ii) der sich bewegende Beobachter (= "im Zug") misst den Lichtstrahl, wie er zu einem Zeitpunkt t' am Ort x' ankommt. nachdem in *beiden* Fällen die Lichtgeschwindigkeit gemessen werden soll, muß gelten:

$$\vec{r} = ct \quad (2.3.40)$$

$$\vec{r}' = ct' \quad (2.3.41)$$

Mit $y = y'$ und $z = z'$ ergibt sich aus $x' = ct'$ bzw. $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$:

$$k^2 (x^2 - 2vxt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 = c^2 a^2 (t^2 - 2bxt + b^2 x^2) \quad (2.3.42)$$

Diese Gleichung wird nach Potenzen von x und t sortiert zu:

$$(k^2 - b^2 a^2 c^2) x^2 - 2(k^2 v - b a^2 c^2) xt + y^2 + z^2 = (a^2 - k^2 v^2 / c^2) c^2 t^2 \quad (2.3.43)$$

Nachdem diese Gleichung für beliebige Werte von x und t gelten soll, müssen alle Vorfaktoren jeweils Null ergeben. Dies ergibt drei Bestimmungsgleichungen für die unbekanntenen Koeffizienten k, a und b . Man bekommt schließlich:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.3.44)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.3.45)$$

Mit der Abkürzung:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (2.3.46)$$

ergibt sich schließlich die sog. **Lorentztransformation**:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.3.47)$$

$$y' = y \quad (2.3.48)$$

$$z' = z \quad (2.3.49)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (2.3.50)$$

In umgekehrter Richtung ist diese Transformation:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (2.3.51)$$

$$y = y' \quad (2.3.52)$$

$$z = z' \quad (2.3.53)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \quad (2.3.54)$$

Nähert man diese Transformation für kleine Geschwindigkeiten im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit ($v \ll c$), so ergibt sich mit $\gamma = 1$ wieder die Galilei-Transformation. Auf der Basis der Lorentztransformation wollen wir noch einmal die Zeitdilatation und die Längenkontraktion betrachten. Wenn wir zum Beispiel in Gl. 2.3.50 und Gl. 2.3.54 jeweils x und x' Null setzen, bekämen wir einmal $t' = \gamma t$ und einmal $t = \gamma t'$. Wie läßt sich dieser scheinbare Widerspruch auflösen?

- **Zeitdilatation in der Lorentztransformation**

Betrachten wir ein Ereignis, das im gestrichenen System am gleichen Ort stattfindet (d.h. zum Beispiel $x' = 0$ für den Start und das Wiederauftreffen des Lichtpulses der Lichtuhr in Abb. 2.3.9). Wir benutzen Gleichung 2.3.54, da auf der rechten Seite nur Größen im gestrichenen System stehen. Wir bekommen damit

$$t = \gamma t' \quad (2.3.55)$$

die Zeitdilatation. D.h. die Zeit im gestrichenen System t' ist kürzer als die Zeit t , die wir von diesem Ereignis im ungestrichenen System wahrnehmen. Gl. 2.3.50 wäre ungeeignet, da wir für das Ereignis zunächst nur Eigenschaften im gestrichenen System kennen (wenn $x' = 0$ gilt muß nicht $x = 0$ gelten!).

Wie müsste man vorgehen, wenn man trotzdem Gl. 2.3.50 benutzt? Zunächst haben wir:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (2.3.56)$$

Vom Beobachter am "Bahnsteig" ist die bewegte Uhr allerdings *nicht* in Ruhe sondern legt eine Wegstrecke x zurück. Bei einer Geschwindigkeit v des SZuges ist diese Strecke $x = vt$. Dies eingesetzt ergibt:

$$t' = \gamma \left(t - t \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma t \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{1/\gamma^2} = \frac{1}{\gamma} t \quad (2.3.57)$$

Dies Ergebnis ist identisch zu dem wie wir es aus Gleichung 2.3.54 abgeleitet hatten.

- **Längenkontraktion in der Lorentztransformation**

Betrachten wir eine Länge $l_0 = x'$ im gestrichenen System. Wenn wir im ungestrichenen System diesen Maßstab beobachten, können wir dies nur gleichzeitig machen (siehe oben), d.h. $t = 0$ (wenn $t = 0$ gilt, muß nicht $t' = 0$ gelten. Ereignisse die zu gleichen Zeiten im ungestrichenen System wahrgenommen werden, können sich zu unterschiedlichen Zeiten im gestrichenen System ereignen). Somit benutzen wir Gleichung 2.3.48 in denen die Größen x', t vorkommen und erhalten, für die beobachtete Länge $l = x$:

$$l_0 = \gamma l \quad (2.3.58)$$

die Längenkontraktion. D.h. die beobachtete Länge l ist kürzer als die wahre Länge l_0 im bewegten System.

Bei der Benutzung der Lorentztransformation ist es *besonders wichtig* sich die Problemstellung vorher genau zu vergegenwärtigen. D.h. was ist meine Beobachtung und welche Längen und Zeiten gelten für das Problem? Dies soll noch einmal an der Zeitdilatation erläutert werden. Für die Berechnung der Zeit-Dilatation hatten wir die beiden Gleichungen:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (2.3.59)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \quad (2.3.60)$$

Für die Zeitdilatation haben wir oben die Gleichung 2.3.60 benutzt und mit $x' = 0$

$$t = \gamma t' \quad (2.3.61)$$

erhalten. Bei Gleichung haben natürlich t und t' die gleiche Bedeutung, aber wir hätten das Ereignis an zwei unterschiedlichen Orten x beobachtet, da der externe Beobachter sich im Vergleich zur ruhenden Uhr am Ort $x' = 0$ in der Zeit t bewegt. Wenn wir die zurückgelegte Strecke $x = vt$ ansetzen bekommen wir aus Gl. 2.3.3:

$$t' = \gamma \left(t - t \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma t \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}_{\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{1}{\gamma} t \quad (2.3.62)$$

was identisch ist mit der Lösung unter Benutzung von Gl. 2.3.60.

Die Beziehungen zwischen den Zeiten t in t' beschreiben die Relativität der Zeit. Dies kann man an folgendem Beispiel illustrieren: zwei gleich alte Raumfahrer 1 und 2 starten zu einem Zeitpunkt $t = t' = 0$ gleichzeitig und bewegen sich mit einer Geschwindigkeit v auseinander. Zu einem Zeitpunkt t , zum Beispiel nach 40 Jahren, blickt der Raumfahrer 1 auf den anderen Raumfahrer 2. Da dieser sich mit v bewegt, *erscheint* dieser ihm jünger, zum Beispiel 20 Jahre jünger. Allerdings zeigt sowohl die biologische Uhr (=ruhende Uhr im jeweiligen Bezugssystem) von Raumfahrer 1 als auch die von Raumfahrer 2 zu diesem Zeitpunkt jeweils 40 Jahre an. Dies ist kein Widerspruch, da Raumfahrer 1 von seinem Bezugssystem auf das *andere* sich bewegende Bezugssystem schaut, und nur deshalb ihm der Raumfahrer als 20 Jahre jünger *erscheint*. Umgekehrt sieht auch der Raumfahrer 2, wenn er zurück blickt, den Raumfahrer 1 um 20 Jahre verjüngt. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß jeder der beiden Raumfahrer den anderen als 20 Jahre jünger sieht.

Nach der Transformation von Ort und Zeit, wollen wir im folgenden noch eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten ableiten. Zunächst gilt:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (2.3.63)$$

Wir können dies erweitern zu:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (2.3.64)$$

Mit $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$ und $t = \gamma (t' + vx'/c)$ ergibt sich:

$$u'_x = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right) \quad (2.3.65)$$

Nachdem $\frac{dx}{dt} = u_x$ und $\frac{dx'}{dt'} = u'_x$ gilt, bekommen wir:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \frac{v}{c^2}} \quad (2.3.66)$$

auch u'_y und u'_z hängen von v und u_x ab:

$$u'_y = \frac{u_y}{1 - u_x \frac{v}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma} \quad (2.3.67)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{1 - u_x \frac{v}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma} \quad (2.3.68)$$

Die Transformation von Längen y, z senkrecht zur Richtung x die sich mit Geschwindigkeit v bewegt ist nicht mehr einfach $y = y'$ und $z' = z$ weil für die Bestimmung einer Geschwindigkeit eine Strecke pro Zeit gebildet wird. D.h. während sich eine Länge y oder z zunächst nicht ändert so muss doch die Zeit transformiert werden.

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Auch für Teilchenstöße bei sehr hohen Geschwindigkeiten soll die Impulserhaltung gelten. Wir betrachten dazu zwei Teilchen A und B, die miteinander stoßen. Hierbei kann man zwei Beobachtungsstandpunkte wählen: zum einen befindet sich der Beobachter am Ort des Teilchens B und beobachtet den Stoß mit einem herankommenden Teilchen A; zum anderen befindet sich der Beobachter am Ort des Teilchens A und beobachtet den Stoß mit dem herankommenden Teilchen B. In beiden Fällen soll der Beobachter die Gültigkeit der Impulserhaltung bestätigen können.

Nehmen wir an, daß der Impuls vor und nach dem Stoß in y -Richtung gleich Null sei. D.h. für einen Beobachter, der auf B sitzt, muß gelten:

$$m_A v_{y1} + m_B v_{y2} = 0 \quad (2.3.69)$$

während ein Beobachter, der A sitzt gelten muß:

$$m_A^* v_{y1}^* + m_B^* v_{y2}^* = 0 \quad (2.3.70)$$

Wie stehen jetzt die beiden Bezugssysteme im Zusammenhang? Wir betrachten dazu die Transformation die entsteht, wenn wir von dem System mit ruhendem B in ein bewegtes Bezugssystem gehen, daß sich mit v_x mit

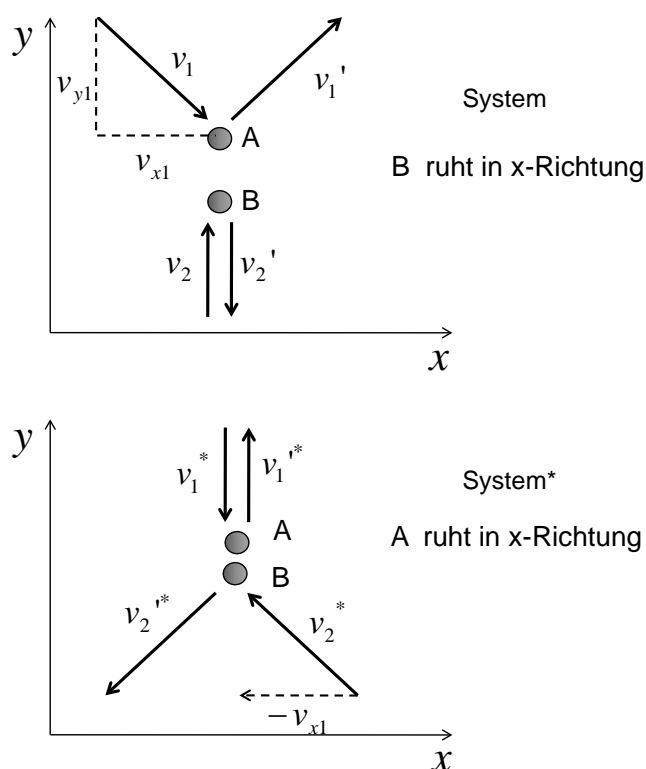


Abbildung 2.3.12: Impulserhaltung bei relativistischen Geschwindigkeiten.

bewegt, was dazu führt, daß jetzt A ruht. Nach der Lorentztransformation verknüpfen sich die Geschwindigkeiten:

$$v_y^* = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_x \frac{v}{c^2}} \quad (2.3.71)$$

Aufgelöst nach den Komponenten v_{y1} und v_{y2} ergibt sich mit $v_{x1} = v$ und $v_{x2} = 0$:

$$v_{y1}^* = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_{x1} \frac{v}{c^2}} = \frac{v_y/\gamma}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma v_{y1} \quad (2.3.72)$$

$$v_{y2}^* = \frac{v_y/\gamma}{1 - v_{x2} \frac{v}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} v_{y2} \quad (2.3.73)$$

D.h. setzen wir diese Beziehungen in die Impulserhaltung ein so erhalten wir:

$$m_A v_{y1} + m_B v_{y2} = m_A^* v_{y1}^* + m_B^* v_{y2}^* = m_A^* \gamma v_{y1} + m_B^* \frac{1}{\gamma} v_{y2} \quad (2.3.74)$$

Dies kann *nicht* erfüllt werden für $m_A = m_A^*$ und $m_B = m_B^*$. Wir versuchen den Ansatz einer *geschwindigkeitsabhängigen* Masse:

$$\boxed{m(v) = \gamma m_0} \quad (2.3.75)$$

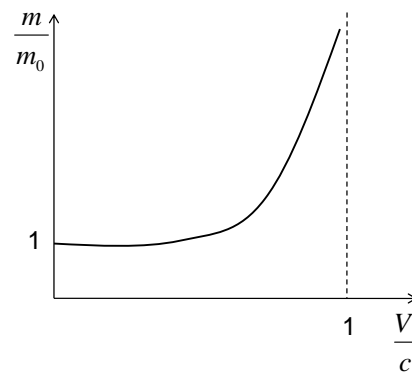


Abbildung 2.3.13: Relativistische Massenzunahme.

und bezeichnen m_0 als **Ruhemasse** eines Objektes. Mit dieser Ersetzung läßt sich zeigen, daß

$$m_A(v) v_{y1} + m_{B,0} v_{y2} = m_{A,0} \gamma v_{y1} + m_B(v) \frac{1}{\gamma} v_{y2} \quad (2.3.76)$$

zu dem Ausdruck wird:

$$m_{A,0} \gamma v_{y1} + m_{B,0} v_{y2} = m_{A,0} \gamma v_{y1} + m_{B,0} \gamma \frac{1}{\gamma} v_{y2} \quad (2.3.77)$$

$$m_{A,0} \gamma v_{y1} + m_{B,0} v_{y2} = m_{A,0} \gamma v_{y1} + m_{B,0} v_{y2} \quad (2.3.78)$$

D.h. die Impulserhaltung läßt sich erfüllen, wenn man formal die Masse eines Körpers als geschwindigkeitsabhängig definiert. Demzufolge wird der **relativistische Impuls** eines Teilchens zu:

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}} \quad (2.3.79)$$

Was bedeutet dies für die kinetische Energie, die ein ruhender Beobachter sieht für ein Teilchen, daß sich nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegt? Die

kinetische Energie ändert sich durch die Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld gemäß:

$$dE_{kin} = \vec{F}d\vec{s} = \frac{dp}{dt}ds = \frac{dp}{dt}\frac{ds}{dt}dt = vdp \quad (2.3.80)$$

Durch Integration ergibt sich E_{kin} zu

$$E_{kin} = \int_0^v vdp = \int_0^v v \frac{dp}{dv} dv \quad (2.3.81)$$

mit

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 v \quad (2.3.82)$$

ergibt sich:

$$E_{kin} = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \quad (2.3.83)$$

Auch hier kann man für den Fall $v \ll c$ wieder den nicht-relativistischen Fall für die kinetische Energie ableiten. Aus

$$E_{kin} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} m_0 c^2 - m_0 c^2 \quad (2.3.84)$$

wird mit der Entwicklung für kleine Größen ξ : $(1 - \xi)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\xi + \dots$ die kinetische Energie zu:

$$E_{kin} = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) m_0 c^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (2.3.85)$$

Man definiert die **Ruheenergie** zu:

$$\boxed{E_0 = m_0 c^2} \quad (2.3.86)$$

und die relativistische Gesamtenergie als:

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2 = E_{kin} + m_0 c^2} \quad (2.3.87)$$

Laut dieser Formel sind die Energie E und die Masse eines Teilchens äquivalent. Man spricht vom **Äquivalenzprinzip**, da Masse und Energie nur unterschiedliche Beschreibungsformen für ein und dieselbe Sache sind. Dies widerspricht zunächst der normalen Anschauung, da Masse und Energie in der nicht-relativistischen Beschreibung für ganz unterschiedliche Dinge eingeführt wurden. Es gilt aber zu beachten, daß die Masse eines Körpers

als *Proportionalitätskonstante* zwischen Beschleunigung und der wirkenden Kraft eingeführt wurde. Nur als diese Größe wird die Masse in den Experimenten und der Naturbeobachtung sichtbar. Wenn, die Naturbeobachtung sagt, daß bei hohen Geschwindigkeiten der Ausdruck m (die Proportionalitätskonstante Masse) eine Abhängigkeit von der Geschwindigkeit enthält so entspricht dies einer erweiterten *Definition* von m , so wie sie Newton eingeführt hatte. Die Masse eines Körpers hängt von der Geschwindigkeit ab, um sein Verhalten bei Beschleunigungen richtig zu beschreiben. Die kinetische Energie ist mit der Geschwindigkeit eines Körpers verknüpft. Wenn jetzt die Masse auch mit der Geschwindigkeit verknüpft ist, so muß auch die Energie und Masse in einer Beziehung zueinander stehen, nämlich $E = \gamma m_0 c^2$.

Diese Äquivalenz von Masse und Energie hat Einstein in einem Gedankenexperiment demonstriert. Betrachten wir dazu einen geschlossenen Kasten wie in Abb. 2.3.14 illustriert. Auf der linken Seite des Kastens soll ein Lichtblitz ausgesandt werden. Dieser hat einen Impuls der Größe:

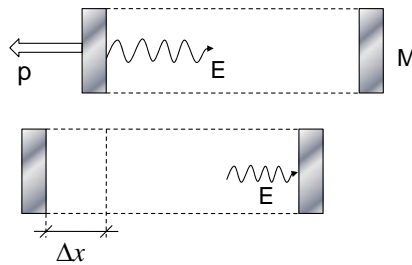


Abbildung 2.3.14: Einstein's Gedankenexperiment zur Äquivalenz von Masse und Energie.

$$p_{\text{Licht}} = \frac{E}{c} \quad (2.3.88)$$

Wegen der Impulserhaltung bekommt der Kasten der Masse M einen entsprechenden Impuls übertragen ($\vec{p}_{\text{Kasten}} = -\vec{p}_{\text{Licht}}$) und bekommt die Geschwindigkeit:

$$v_{\text{Kasten}} = \frac{p_{\text{Kasten}}}{M} \quad (2.3.89)$$

Während der Zeit $\Delta t = \frac{L}{c}$, kann der Kasten sich um eine Strecke Δx bewegen, bevor die Absorption des Lichtpulses auf der anderen Seite des Kastens diese Bewegung wieder stoppt.

$$\Delta x = v \frac{L}{c} = \frac{p}{M} \frac{L}{c} = -\frac{E}{Mc^2} L \quad (2.3.90)$$

Das negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, daß der Kasten sich in negative x-Richtung bewegt hat. Nachdem der Kasten allerdings nach aussen hin abgeschlossen ist, darf sich sein Schwerpunkt nicht ändern. D.h. wenn der Kasten sich um eine Strecke Δx nach links verschoben hat, muß eine entsprechende Masse m mit dem Lichtblitz nach rechts gewandert sein.

$$M\Delta x + mL = 0 \quad (2.3.91)$$

Setzen wir dies in ein, folgt daraus:

$$E = mc^2 \quad (2.3.92)$$

D.h. durch diese einfache Überlegung hat Einstein wieder das Äquivalenzprinzip von Masse und Energie abgeleitet. Dieses Äquivalenzprinzip wird auf eindrucksvolle bei dem Zerfall von Atomkernen und der Bildung von neuen Elementarteilchen sichtbar: Beim Zerfall von Atomkernen wird Ruheenergie m_0c^2 in Bewegungsenergie $\gamma m_0c^2 - m_0c^2$ der Reaktionsprodukte umgewandelt. Da die Ruheenergie sehr groß ist (In Einheiten eV, hat ein Proton eine Ruheenergie von ca. 1 GeV), entstehen bei diesen Kernreaktionen entsprechend schnelle Produkte. Auch der umgekehrte Prozeß ist möglich. Bei einem inelastischen Stoß zweier Teilchen wird die kinetische Relativenergie in innere Anregung umgesetzt. Falls diese frei gesetzte Energie ausreicht, um die Ruheenergie eines neuen Teilchens zur Verfügung zu stellen wird dieses gebildet. Schießt man zum Beispiel zwei Elektronen auf einander (bzw. Elektron und Positron) mit einer Relativgeschwindigkeit, die einer Energie von 1 GeV entspricht, kann dabei spontan ein Proton entstehen. D.h. wenn Teilchenphysiker neue Elementarteilchen zu entdecken versuchen, so benutzen sie Beschleuniger, die Energien zur Verfügung stellen, die ausreichen, um die Ruheenergie des vorhergesagten Teilchens in einem inelastischen Stoß frei zu setzen.

In einem weiteren Schritt hat Einstein die spezielle zur **allgemeinen Relativitätstheorie** erweitert. Während die spezielle Relativitätstheorie von den Voraussetzungen *konstante Lichtgeschwindigkeit* und *Inertialsystem* ausgeht, basiert die allgemeine Relativitätstheorie nur noch auf der konstanten Lichtgeschwindigkeit. Einstein erkannte, daß es durch die Verknüpfung von Masse, Energie, Zeit und Längen so etwas wie ein *absolutes* Koordinatensystem bzw. Inertialsystem nicht gibt. Masse und Raum stehen in Beziehung zueinander wobei sich der Raum durch die Anwesenheit einer großen Masse

krümmt und Lichtstrahlen grundsätzlich auf diesen gekrümmten Koordinatenachsen ausbreiten. 1920 wurde dies experimentell nachgewiesen durch die Beobachtung der Ablenkung des Lichtes von Sternen im Schwerefeld der Sonne.

2.4 Ausgedehnte starre Körper

Nach der Betrachtung der Mechanik eines Massenpunktes bzw. eines Systems von Massenpunkten, werden im folgenden ausgedehnte, starre Körper behandelt.

2.4.1 Translation und Rotation

Ein ausgedehnter Körper ist zunächst durch eine Massenverteilung charakterisiert, die sich über sein Volumen erstreckt. Für die Beschreibung der Bewegung dieses Körpers im Raum (Translation) im Sinne eines Massenpunktes, läßt sich diese Masse auf den **Schwerpunkt** zusammenführen. Der Ort des Schwerpunktes $\vec{r}_{\text{Schwerpunkt}}$ ergibt sich aus einer Integration über das Volumen des Körpers der Gesamtmasse M zu (siehe Abb. 2.4.1):

$$\vec{r}_{\text{Schwerpunkt}} = \frac{1}{M} \int_{\text{Volumen}} \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_{\text{Volumen}} \vec{r} \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.4.1)$$

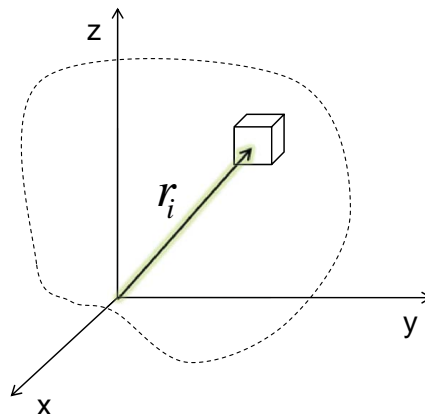


Abbildung 2.4.1: Bestimmung des Massenschwerpunkts eines Körpers.

mit $\rho(\vec{r})$ der Dichte des Körpers. Ein ausgedehnter Körper besitzt die Möglichkeit zu rotieren. Man unterscheidet **feste Achsen** und **freie Achsen**. Bei festen Achsen ist die Rotationsachse durch ein mechanisches Lager festgelegt. Bei einer freien Achse betrachtet man den Körper isoliert im Raum. Die Bewegung dieses Körpers läßt sich als Überlagerung einer gradlinigen Bewegung, der **Translation** und einer **Rotation** darstellen. In einem Bezugssystem, das sich mit dem Schwerpunkt mit bewegt, geht die Achse der Rotation *immer* durch den Schwerpunkt.

Nehmen wir einen isolierten Körper, der sich um eine Achse durch den Schwerpunkt dreht. Der Vektor, der einen Punkt i mit dem Schwerpunkt verbindet ist:

$$\vec{r}_{is} = \vec{r}_i - \vec{r}_s \quad (2.4.2)$$

Dadurch wird die Relativgeschwindigkeit v_{is} zu:

$$\frac{d\vec{r}_{is}}{dt} = \vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s \quad (2.4.3)$$

Der Abstand $|\vec{r}_{is}|$ ist konstant bei einer Rotation des Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt. Deshalb gilt:

$$\frac{d}{dt} r_{is}^2 = 0 \quad (2.4.4)$$

Leitet man r_{is}^2 nach der Kettenregel ab, so bekommt man:

$$2\vec{r}_{is}\vec{v}_{is} = 0 \quad (2.4.5)$$

D.h. der Vektor \vec{v}_{is} steht senkrecht auf \vec{r}_{is} . Diese **Bahngeschwindigkeit** läßt sich somit einfach mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\vec{\omega}$ ausdrücken zu:

$$\vec{v}_{is} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{is} \quad (2.4.6)$$

Jedem Punkt auf dem Körper kann somit nach Gl. 2.4.2 eine Geschwindigkeit \vec{v}_i zugeschrieben werden, die sich aus der Schwerpunktschwindigkeit \vec{v}_s und der Bahngeschwindigkeit zusammensetzt:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{iS}) \quad (2.4.7)$$

2.4.2 Drehmoment und Drehimpuls

Drehmoment

An einem Körper greift an einem Punkt eine Kraft \vec{F} an. Falls diese Kraft nicht am Schwerpunkt angreift, erzeugt diese Kraft eine beschleunigte Translation und Rotation des Körpers. Gemäß der Hilfskonstruktion in Abb. 2.4.3 lassen sich die Anteile Translation und Rotation ableiten. Dazu erzeugen wir ein Kräftepaar \vec{F}_1 und \vec{F}_2 , das am Schwerpunkt angreift. Die Kraft, die zu einer beschleunigten Translation führt ist \vec{F}_2 . Die Kräfte, die zu einer Rotation führen sind die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_3 . Nachdem die Rotationsachse durch den Schwerpunkt geht, erzeugt nur \vec{F}_1 ein sogenanntes **Drehmoment** gemäß:

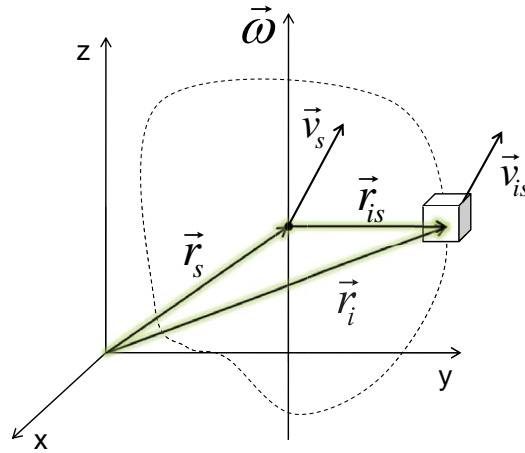


Abbildung 2.4.2: Rotation eines Körpers um eine Achse durch den Schwerpunkt.

$$\boxed{\vec{D}_S = \vec{r}_\perp \times \vec{F}} \quad (2.4.8)$$

wobei r_\perp der senkrechte Abstand zwischen dem Punkt an dem die Kraft angreift und der Rotationsachse ist. Das Drehmoment auf einem Körper im Schwerfeld der Erde läßt sich auch ausnutzen um den Massenschwerpunkt experimentell zu bestimmen (siehe Abb. 2.4.4). Die Summe der Drehmomente, die gemäß $m\vec{g}$ an einem Körper angreifen, falls die Drehachse am Ursprung von \vec{r} liegt:

$$\vec{D} = \int_V \vec{r} \times \vec{g} dm = -\vec{g} \times \int \vec{r} dm = -\vec{g} \times \vec{r}_s M \quad (2.4.9)$$

Falls die Drehachse durch den Schwerpunkt geht ist $\vec{r}_s = 0$, d.h. die Drehmomente gleichen sich aus. Im Schwerpunkt kann ein Körper in beliebige Orientierungen aufgehängt sein. Dies ist gleichbedeutend mit der einer Gewichtskraft, die immer am Schwerpunkt eines Körpers angreift. Wenn man einen Körper an unterschiedlichen Punkten aufhängt, so ist im Gleichgewicht der Schwerpunkt immer unterhalb des Punktes an dem der Körper aufgehängt ist. Wählt man nun mehrere Aufhängepunkte, so läßt sich der entsprechende Schwerpunkt interpolieren.

In einem abgeschlossenen System müssen sich die Drehmomente untereinander aufheben. Liegt der Körper auf, wie zum Beispiel bei einer Balkenwaage (siehe Abb. 2.4.5), so müssen sich die angreifenden Drehmomente in

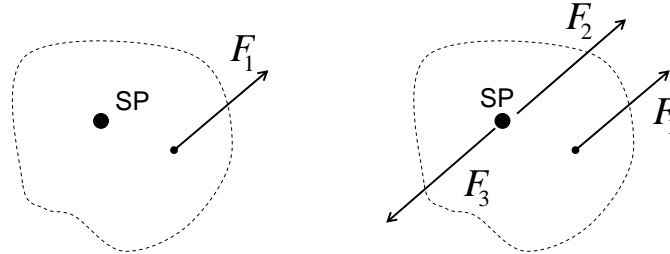


Abbildung 2.4.3: Greift eine Kraft \vec{F}_1 an einem Körper an, läßt sich durch eine Hilfskonstruktion ein Kräftepaar \vec{F}_2 und \vec{F}_3 einführen, das am Schwerpunkt angreift. \vec{F}_2 führt zu einer beschleunigten Translation, \vec{F}_1 und \vec{F}_3 führen zu einer Rotation.

der Summe aufheben:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad (2.4.10)$$

Für ausgedehnte Körper, die sich gleichförmig bewegen, muß immer die Summe über alle Kräfte und Drehmomente gleich Null sein:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \quad (2.4.12)$$

Drehimpuls

Analog zum Impuls kann man auch der Rotation eines Körpers einen **Drehimpuls** zuordnen. Das einzelnen Volumenelement gemäß Abb. 2.4.6 besitzt einen Drehimpuls bezüglich der Rotationsachse von:

$$\vec{L}_i(\Delta m_i) = \vec{r}_i \times (\Delta m_i \vec{v}_i) \quad (2.4.13)$$

bzw.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (\Delta m_i \vec{v}_i) \quad (2.4.14)$$

mit $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ ergibt sich

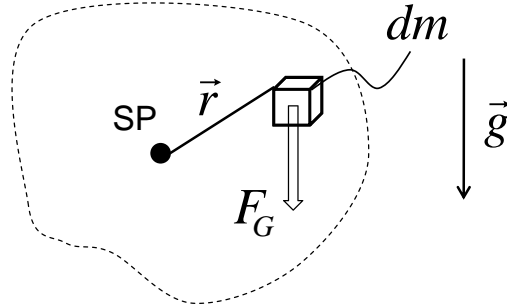


Abbildung 2.4.4: Wird ein Körper in einer Achse durch den Schwerpunkt aufgehängt, so ist er in jeder Position im Gleichgewicht, d.h. es wirkt kein Netto-Drehmoment.

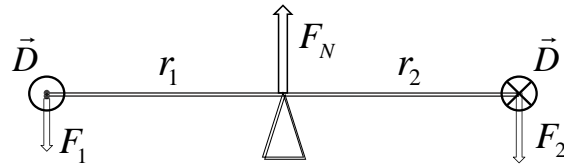


Abbildung 2.4.5: Beispiel Balkenwaage. Im Gleichgewicht heben sich die Drehmomente auf.

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)m_i = \vec{\omega} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) m_i - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) m_i \quad (2.4.15)$$

Für $r_i = r_{i,\perp}$ fällt der zweite Term weg, da der Ortsvektor senkrecht zur Drehachse steht:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_{i,\perp}^2 \vec{\omega} m_i \quad (2.4.16)$$

Integriert man über alle Volumenelemente m_i so bekommt man den gesamten Drehimpuls zu:

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_{i,\perp}^2 m_i}_I \vec{\omega} \quad (2.4.17)$$

Dieser Ausdruck läßt sich verkürzt schreiben als

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}} \quad (2.4.18)$$

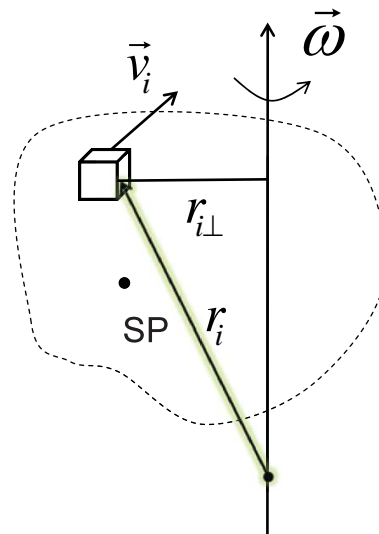


Abbildung 2.4.6: Drehimpuls eines Körpers, der sich um eine Achse $\vec{\omega}$ dreht.

Den Ausdruck:

$$I = \int r_{\perp}^2 \rho dV \quad (2.4.19)$$

bezeichnet man als **Trägheitsmoment**. Dieses Trägheitsmoment bezieht sich *immer* auf eine gegebene Rotationsachse! Wie bei dem System von Massenpunkten gilt auch für den Drehimpuls bei ausgedehnten Körpern die Drehimpulserhaltung. Dies soll an zwei Beispielen erläutert werden:

- **Drehimpulserhaltung**

Betrachten wir einen Eisläufer der eine Pirouette dreht. Dabei bleibt sein Drehimpuls konstant. Hat er zwei Hanteln in der Hand mit der Gesamtmasse m , so ist deren Drehimpuls

$$\vec{L} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega} \quad (2.4.20)$$

Wenn er den Abstand r_{\perp} zu seiner Drehachse verkleinert, muß sich $\vec{\omega}$ erhöhen, damit \vec{L} konstant bleibt. D.h. seine Winkelgeschwindigkeit erhöht sich!

• **Versuch Drehstuhl**

Eine Person sitzt auf einem Drehstuhl und bekommt ein rotierendes Rad überreicht, dessen Drehachse parallel zur Drehachse des Drehstuhls orientiert ist. Wenn diese Person die Drehachse des rotierenden Rades um 180° dreht, so beginnt der Drehstuhl sich gegenläufig zu drehen. Dies läßt sich wieder durch die Drehimpulserhaltung erklären, wie in Abb. 2.4.7 verdeutlicht. Es gilt:

$$\vec{L}_{vorher} = \vec{L}_{Rad} \quad (2.4.21)$$

$$\vec{L}_{nachher} = -\vec{L}_{Rad} + \vec{L}_{Drehstuhl} \quad (2.4.22)$$

$$(2.4.23)$$

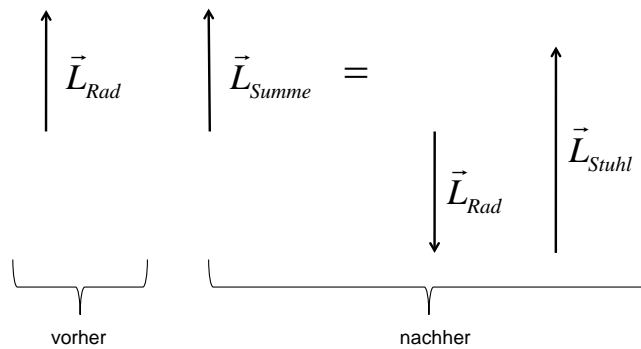


Abbildung 2.4.7: Drehstuhl-Experiment: Falls jemand auf einem Drehstuhl ein rotierendes Rad, entsprechend einem Drehimpuls \vec{L}_{Rad} umdreht, so beginnt sich der Drehstuhl wegen der Drehimpulserhaltung zu drehen.

Für die Definition des Drehimpulses haben wir eine neue Größe, das Trägheitsmoment, eingeführt. Betrachten wir den allgemeinen Fall eines Körpers der um eine Achse \mathbf{B} rotiert. Das Trägheitsmoment I_B ist:

$$I_B = \int_V r^2 dm = \int_V (\vec{r}_s + \vec{a})^2 dm \quad (2.4.24)$$

Mit \vec{a} dem senkrechten Abstand des Schwerpunktes von der Achse und \vec{r}_s dem Ort des Massenpunktes bezüglich des Schwerpunktes. Beide Vektoren \vec{a} und \vec{r}_s befinden sich in einer Ebene *senkrecht* zur Drehachse. Wir bekommen:

$$I_B = \int_V \vec{r}_s^2 dm + 2a \underbrace{\int_V \vec{r}_s dm}_{=0} + a^2 \underbrace{\int_V dm}_{=M} \quad (2.4.25)$$

Man erkennt, daß sich das Trägheitsmoment aus zwei Anteilen zusammensetzt:

$$\boxed{I_B = I_S + a^2 M} \quad (2.4.26)$$

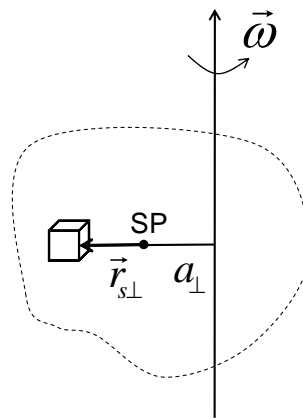


Abbildung 2.4.8: Steiner'scher Satz: das Trägheitsmoment durch eine Achse $\vec{\omega}$ läßt sich als Summe des Trägheitsmomentes bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt plus Ma^2 darstellen. Mit M der Masse des Körpers und a dem senkrechten Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt. Die Vektoren \vec{a} und \vec{r}_s befinden sich in einer Ebene senkrecht zur Rotationsachse.

Man bezeichnet dieses Gesetz als den **Steiner'schen Satz**. Im folgenden sind einige Trägheitsmomente einfacher Körper abgeleitet:

- **dünne Scheibe**

Das Trägheitsmoment einer dünnen Scheibe der Höhe h und Radius R ist gemäß Abb. 2.4.9:

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV = 2\pi h \rho \int_0^R r r^2 dr = \frac{1}{2} \rho h \pi R^4 \quad (2.4.27)$$

mit $M = \pi R^2 h \rho$ ergibt sich:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (2.4.28)$$

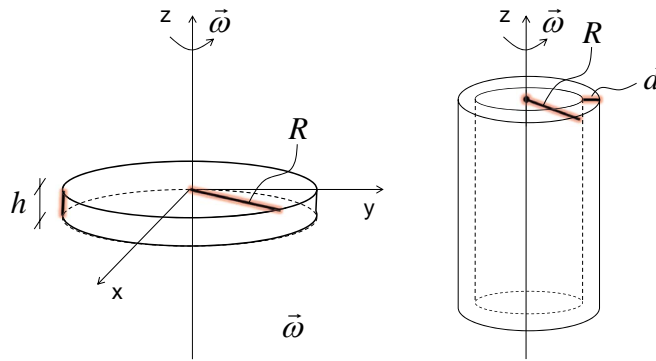


Abbildung 2.4.9: Berechnung des Trägheitsmomentes für eine flache Scheibe und einen Hohlzylinder.

- **Hohlzylinder**

Für das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders mit Radius R und einer Wandstärke d bekommt man:

$$I_z = \rho \int_V r^2 dV = 2\pi h \rho \int_{R-d}^R r^3 dr \simeq 2\pi \rho h R^3 d \quad (2.4.29)$$

für $d \ll R$. Mit $M = 2\pi R d h \rho$ ergibt sich:

$$I_z = MR^2 \quad (2.4.30)$$

- **Vollzylinder**

Für das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius R bekommt man:

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 \quad (2.4.31)$$

- **Kugel**

Für das Trägheitsmoment einer Kugel mit Radius R erhalten wir:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad (2.4.32)$$

Betrachten wir noch einmal den allgemeinsten Fall eines einfachen Körpers wie einer Hantel, der asymmetrisch bezüglich einer festen Achse $\vec{\omega}$ rotiert. Der Drehimpuls der beiden Massen m am Ort \vec{r}_1 und \vec{r}_2 ergibt sich zu (siehe Abb. 2.4.10):

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \quad (2.4.33)$$

Aus der Abb. 2.4.10 erkennt man, daß die Richtung des Drehimpulsvektors zu einem beliebigen Zeitpunkt nicht in die Richtung $\vec{\omega}$. Während der Rotation überstreicht die Spitze des Vektors \vec{L} einen Kreis um die Richtung von $\vec{\omega}$, so daß wir einen mittleren Vektor $\langle \vec{L} \rangle$ angeben können. Dieser berechnet sich zu:

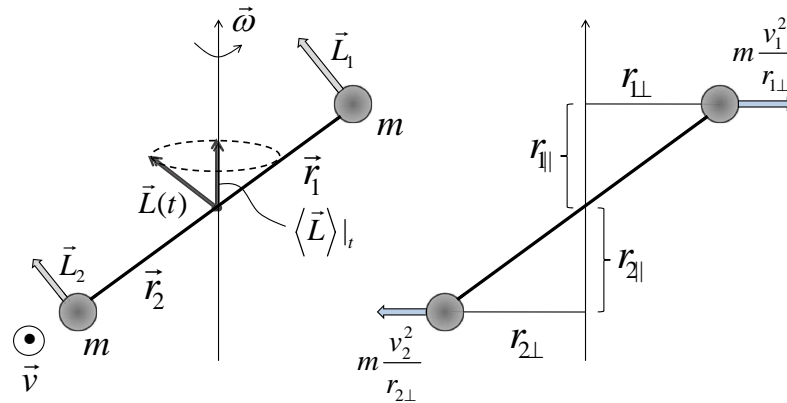


Abbildung 2.4.10: Rotation einer Hantel um eine asymmetrische Achse $\vec{\omega}$. Durch die Fliehkräfte wirkt ein Drehmoment auf das Lager der Achse.

$$\langle \vec{L} \rangle = \vec{r}_{1,\perp} \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_{2,\perp} \times m\vec{v}_2 \quad (2.4.34)$$

und man bekommt wieder die Beziehung wie oben:

$$\langle \vec{L} \rangle = (\vec{r}_{1,\perp}^2 \times m + \vec{r}_{2,\perp}^2) \vec{\omega} \quad (2.4.35)$$

D.h. $\langle \vec{L} \rangle$ ist wieder parallel zu $\vec{\omega}$. Durch die Zentrifugalkräfte wirkt allerdings ein Drehmoment auf die Achse: durch die *Zentripetalkraft* entsteht ein Drehmoment, daß die Richtung de Vektors \vec{L} im Sinne der obigen Präzession ändert, da gilt $\vec{D}_{Hantel} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Diesem Drehmoment wirkt ein Drehmoment im Lager \vec{D}_{Lager} entgegen gemäß: $\vec{D}_{Hantel} = -\vec{D}_{Lager}$. Gemäß Zeichnung ist dieses Drehmoment \vec{D}_{Lager} gegeben als:

$$|\vec{D}_{Lager}| = r_{1,\parallel} m \frac{v_1^2}{r_{1,\perp}} + r_{2,\parallel} m \frac{v_2^2}{r_{2,\perp}} \quad (2.4.36)$$

Dieses Drehmoment wirkt auf eine Ausrichtung der Hantel senkrecht zur Drehachse. Demnach bewirken die Fliehkräfte eine *Maximierung* des Trägheitsmomentes. Das Drehmoment auf das Lager bei der Rotation eines unsymmetrischen Körpers um eine feste Achse wird im täglichen Leben als *Unwucht* wahr genommen, die dieses Lager *ausschlagen* kann. Das **Auswuchten** eines Autorades, versucht genau diese Unwucht durch entsprechende Zusatzgewichte zu vermeiden.

2.4.3 Die kinetische Energie der Rotation

Neben dem Drehimpuls, läßt sich auch eine Energie definieren, die sich in der Rotationsbewegung befindet. Diese ist gegeben durch die Geschwindigkeiten aller Massenelemente. Für ein einzelnes Massenelement Δm_i gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_{i,\perp}^2 \omega^2 \quad (2.4.37)$$

damit ergibt die gesamte Rotationsenergie:

$$E_{Rotation} = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_{\perp}^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_{\perp}^2 \rho dV \quad (2.4.38)$$

bzw.

$$\boxed{E_{Rotation} = \frac{1}{2} I \omega^2} \quad (2.4.39)$$

Mit dem Drehimpuls $\vec{L} = I\omega$, können wir die **Rotationsenergie** auch darstellen als:

$$\boxed{E_{Rotation} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}} \quad (2.4.40)$$

Die Rotationsenergie ist neben der kinetischen und der potentiellen Energie eine weitere Möglichkeit wie ein Körper Energie speichern kann. Der Einfluss dieser Energie sei an zwei Beispielen illustriert:

- **Voll- und Hohlzylinder auf der schiefen Ebene**

Betrachten wir das Abrollen eines Voll- und Hohlzylinders auf einer schiefen Ebene. Welcher Zylinder erreicht das Ende der Rampe am schnellsten? Bei der Mechanik eines Massenpunktes war die Antwort

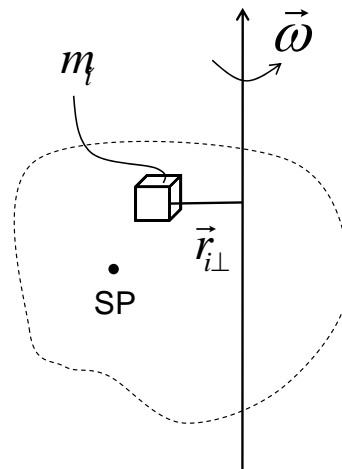


Abbildung 2.4.11: Berechnung der Rotationsenergie eines Körpers, der um eine Achse $\vec{\omega}$ rotiert.

gleichzeitig, da die Beschleunigung im Schwerfeld der Erde unabhängig von der Masse des Körpers ist. Im Falle eines ausgedehnten Körpers, wirkt jedoch zusätzlich ein Drehmoment, das den Körper in Rotation versetzt, wie in Abb. 2.4.12 veranschaulicht.

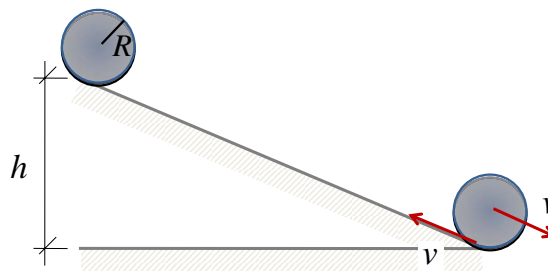


Abbildung 2.4.12: Abrollen eines Zylinders von einer Ebene. Bewegt sich die Achse mit einer Geschwindigkeit \vec{v} , so muß die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf der Zylinderfläche am Kontaktpunkt $-\vec{v}$ sein.

Dieses Drehmoment führt zu einer Änderung des Drehimpulses und der Zylinder beschleunigt seine Rotation. Bei dem Abrollen auf der schiefen Ebene wird potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Diese kinetische Energie bei ausgedehnten Körpern setzt sich aus einem

Beitrag der Schwerpunktsbewegung und der Rotation zusammen.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 \quad (2.4.41)$$

D.h. bei Körpern mit einem großen Trägheitsmoment verbleibt eine kleinere Beitrag der zur Verfügung stehenden Energie, der in der Schwerpunktsbewegung steckt. D.h. Körper mit einem großen Trägheitsmoment kommen später unten an. Vergleicht man somit einen Vollzylinder ($I_s = \frac{1}{2}Mr^2$) und einen Hohlzylinder ($I_s = Mr^2$) gleicher Masse, so erreicht der Vollzylinder den Fuß der schiefen Ebene als erstes. Die Winkelgeschwindigkeit ω läßt sich aus der Geschwindigkeit des Schwerpunktes v ableiten. Nachdem der Kontaktpunkt der Rolle zur Ebene in Ruhe ist, muß v des Schwerpunktes identisch mit der Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Zylindermantel sein, d.h. $\omega = \frac{v}{R}$. Damit ergibt sich für die kinetische Energie mit $I_S = \frac{1}{2}MR^2$

$$E_{kin} = \frac{3}{4}Mv^2 \quad (2.4.42)$$

Im Vergleich zu einer gleitenden Rolle, bei der die kinetische Energie $\frac{1}{2}Mv_{\text{gleitend}}^2$ ist, kann die Geschwindigkeit der rollenden Kugel v_{rollend} nur kleiner als v_{gleitend} sein, da in beiden Fällen die potentielle Energie mgh umgewandelt wird.

- **rotierende Kette**

Betrachten wir jetzt eine bewegliche Kette, die an einem Faden aufgehängt ist, den ein Motor in Rotation versetzt. Die Rotation des Motors gibt dem System eine konstante Winkelgeschwindigkeit vor. Durch die Änderung der Form der Kette ändert sich aber auch die Rotationsenergie:

$$E_{Rotation} = \frac{1}{2}I\vec{\omega}^2 \quad (2.4.43)$$

Zu Beginn wird die Zentrifugalkraft dazu führen, daß sich die Kette der Masse M zu einem Ring mit Radius R weitet, der zunächst um die Achse des Fadens rotiert. Für eine solche Rotationsachse, die durch den Durchmesser des Kreises führt bekommt man ein Trägheitsmoment von $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Bei höherer Drehgeschwindigkeit werden allerdings die Zentrifugalkräfte wichtiger und die Fliehkräfte führen zu einer *Maximierung*

des Trägheitsmomentes. D.h. rotiert das System schließlich wie in Abb. 2.4.13 illustriert, so bekommt man einen günstigeren Zustand, da das Trägheitsmoment für eine Rotationsachse senkrecht zur Ebene des Kreises ($I = MR^2$) sich vergrößert. Man sieht, dass das Trägheitsmoment sich kontinuierlich erhöht, weil die Zentrifugalkraft das Objekt so lange verformt bzw. dessen Rotationsachse ändert bis das die Zentrifugalkraft die Form nicht weiter ändern kann.

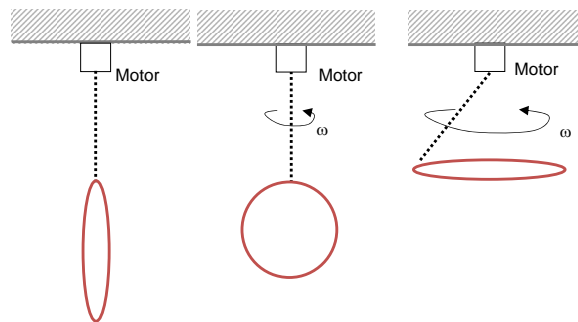


Abbildung 2.4.13: Die Rotation eines Motors gibt einem System bestehend aus einem Faden, an dem eine bewegliche Kette aufgehängt ist einen festen Drehimpuls vor. Durch die Fliehkräfte wird das Trägheitsmoment maximal.

- **wirbelndes Buch**

Ähnlich zu dem Beispiel der rotierenden Kette, läßt sich auch die Rotation eines Buches zumindest qualitativ erklären. Wie schon erwähnt ist eine Rotation um eine Achse mit dem geringsten Trägheitsmoment am günstigsten für die Rotationsenergie. Allerdings führen die Zentrifugalkräfte dazu, daß eine Rotation um eine Achse mit dem größten Trägheitsmoment angestrebt wird (siehe rotierende Kette). Bei einem Buch mit seinen 6 Seitenflächen, kann man drei Trägheitsmomente unterscheiden. Die Rotation um die Achsen mit dem kleinsten und größten Trägheitsmoment sind stabil. Die Rotation um eine Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist instabil, das Buch taumelt.

2.4.4 Kinematik der Rotation

Rotation um eine feste Achse

Wird auf einen Körper ein Drehmoment ausgeübt, so ändert sich dessen Drehimpuls. Leitet man Gl. 2.4.13 nach der Zeit ab, so erkennt man, daß

Translation		Rotation	
Geschwindigkeit	\vec{v}	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = I\omega$
Kraft	\vec{F}	Drehmoment	\vec{D}
2. Newton'sche Axiom	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
kinetische Energie	$\frac{1}{2}mv^2$		$\frac{1}{2}I\omega^2$

Tabelle 2.2: Vergleich der Beschreibung von Translation und Rotation

die Änderung des Drehimpulses von Massenelement Δm_i mit der Zeit gleich dem angreifenden Drehmoment ist. Es gilt:

$$\frac{d\vec{L}_i(\Delta m_i)}{dt} = \left[\underbrace{\frac{d\vec{r}_\perp}{dt}}_{\vec{v}_i} \times (\Delta m_i \vec{v}_i) \right] + \left[\vec{r}_\perp \times \underbrace{\left(\frac{d\Delta m_i \vec{v}_i}{dt} \right)}_{\vec{F}} \right] \quad (2.4.44)$$

Die erste Klammer fällt weg, da $\vec{v}_i \parallel \vec{v}_i$ und damit das Kreuzprodukt zu Null wird. Die zweite Klammer ergibt $\vec{r}_\perp \times \vec{F}$, das Drehmoment. Damit bekommen wir:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}} \quad (2.4.45)$$

mit $L = I\omega = I \frac{d\phi}{dt}$ ergibt sich:

$$\boxed{\vec{D} = I \frac{d^2\phi}{dt^2} =} \quad (2.4.46)$$

Man erkennt, daß man ähnlich zu den Gesetzen für die Translation einen Zusammenhang zwischen dem Winkel und den wirkenden Drehmomenten bekommt, ähnlich zum zweiten Newton'schen Axiom. Diese Tatsache läßt sich durch die Verknüpfung von Drehimpuls, Drehmoment und Trägheitsmoment darstellen, die den Größen zur Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes, Impuls, Kraft und Masse entsprechen. Dies ist in Tab. 2.2 gegenübergestellt:

Auch bei einer gleichmäßig beschleunigten Rotation können wir analog zur Translation die Kraftgleichung

$$\vec{D} = I \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (2.4.47)$$

integrieren und erhalten eine Funktion $\phi(t)$ von:

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{D}{I} t^2 + \omega_0 t + \phi_0 \quad (2.4.48)$$

Der Ausdruck D/I entspricht einer Winkelbeschleunigung ($= F/m$ bei der Translation) und der Ausdruck ω_0 ist die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Auf der Basis dieser Bewegungsgleichung wollen wir noch einmal den Fall eines Zylinders betrachten, der eine Ebene mit Winkel α herunterrollt. Aus einem Kräfte diagramm erkennen wir, daß das Drehmoment um den Auflagepunkt gegeben ist als:

$$D = Mg \sin(\alpha) \cdot r \quad (2.4.49)$$

Dieses Drehmoment versetzt den Zylinder in Rotation, der sich um seinen Auflagepunkt abrollt. Das gültige Trägheitsmoment für diesen Fall läßt sich mit dem Steiner'schen Satz ableiten zu:

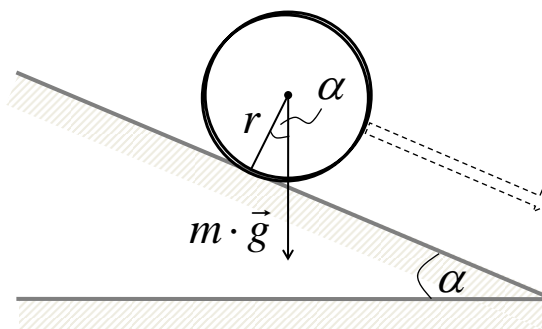


Abbildung 2.4.14: Abrollender Zylinder, der durch die Schwerkraft beschleunigt wird.

$$I = I_s + Mr^2 \quad (2.4.50)$$

Mit $D = \frac{d}{dt}(I\omega)$ ergibt sich:

$$Mgr \sin \alpha = (I_s + Mr^2) \frac{d\omega}{dt} \quad (2.4.51)$$

Die Geschwindigkeit der Achse des Zylinders muß gleich der Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Zylindermantel sein!. D.h. für die Achsengeschwindigkeit gilt $\frac{ds}{dt} = r\omega$. Somit ist der Bezug zwischen Beschleunigung der Achse nach unten und der Änderung der Winkelgeschwindigkeit:

$$a_{Achse} = \frac{d^2 s}{dt^2} = r \frac{d\omega}{dt} \quad (2.4.52)$$

D.h. wir bekommen als Beschleunigung:

$$a_{Achse} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_s}{Mr^2}} \quad (2.4.53)$$

Die Beschleunigung ist am geringsten, je größer das Trägheitsmoment ist!

Rotation um freie Achsen

Bislang haben wir immer den Fall einer Rotation um eine vorgegebene *feste* Achse betrachtet. Dabei ist der mittlere Drehimpuls \vec{L} *immer* kollinear zu der Drehachse $\vec{\omega}$. Im folgenden wollen wir jedoch einen vollkommen freien Körper betrachten, der zunächst um eine beliebige Achse $\vec{\omega}$ rotiert. Hierbei muß der Drehimpuls \vec{L} *nicht* immer in dieselbe Richtung zeigen wie *omēga* . Der Drehimpuls bezüglich dieser Achse ist definiert als:

$$\vec{L}_i = \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \Delta m_i \vec{r}_i \times (\omega \times \vec{r}_i) \quad (2.4.54)$$

wenn man das doppelte Kreuzprodukt auslöst nach der Regel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \quad (2.4.55)$$

bekommt man:

$$\vec{L} = \int r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} dm \quad (2.4.56)$$

Diese Gleichung läßt sich kompakter schreiben als

$$\boxed{\vec{L} = \tilde{I} \vec{\omega}} \quad (2.4.57)$$

wobei allerdings \tilde{I} ein Tensor ist, der **Trägheitstensor**:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4.58)$$

Die einzelnen Komponenten dieses Tensors sind

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int (r^2 - x^2) dm = \int (y^2 + z^2) dm & (2.4.59) \\
 I_{yy} &= \int (r^2 - y^2) dm = \int (x^2 + z^2) dm \\
 I_{zz} &= \int (r^2 - z^2) dm = \int (x^2 + y^2) dm
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= - \int xy dm & (2.4.60) \\
 I_{xz} &= - \int xz dm \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Die Rotationsenergie einer freien Rotation ergibt sich in dieser Notation zu:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \tilde{I} \vec{\omega} \quad (2.4.61)$$

bzw. aufgelöst nach den einzelnen Beiträgen.

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} [\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz}] + \omega_x \omega_y I_{xy} + \omega_x \omega_z I_{xz} + \omega_y \omega_z I_{yz} \quad (2.4.62)$$

Bislang haben wir die Rotation in einem willkürlichen Koordinatensystem \vec{x}, \vec{y} und \vec{z} betrachtet. Allerdings läßt sich durch eine Drehung des Koordinatensystems der Tensor des Trägheitsmomentes diagonalisieren. D.h. in einem orthogonalen Koordinatensystem, das durch *neue* Einheitsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannt wird, ergibt sich:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \quad (2.4.63)$$

In diesem neuen Koordinatensystem ist die Rotationsenergie einfach:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} [\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c] \quad (2.4.64)$$

Man bezeichnet die Trägheitsmomente I_a, I_b und I_c als **Hauptträgheitsmomente**. Die Gleichung entspricht der Form nach einer dreidimensionalen Ellipsengleichung ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Man spricht von einem

Trägheitsellipsoid. Es zeigt sich bei einfachen Körpern, das die Achsen \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} auch Symmetrieachsen des Körpers darstellen.

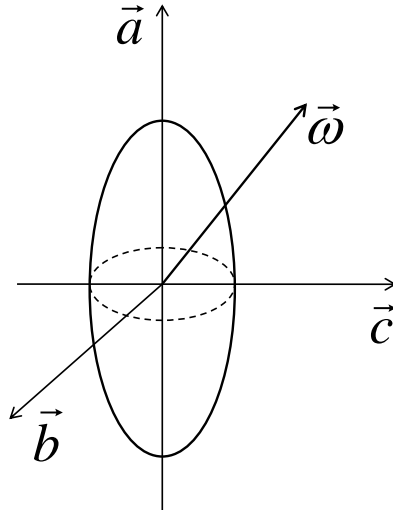


Abbildung 2.4.15: Das Trägheitsmoment ergibt ein Rotationsellipsoid für die Größe des Trägheitsmomentes in eine beliebige Richtung von $\vec{\omega}$. Die Richtungen \vec{a} und \vec{b} und \vec{c} sind die Hauptträgheitsmomente.

Wir können auch den Drehimpuls in diesen Achsen ausdrücken.

$$\vec{L} = I_a \vec{\omega}_a + I_b \vec{\omega}_b + I_c \vec{\omega}_c \quad (2.4.65)$$

Nachdem aber die Hauptträgheitsmomente I_a, I_b und I_c nicht immer gleich groß sein müssen, muß der Vektor des Drehimpulses \vec{L} *nicht* immer parallel zur Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ entsprechend der Rotationsachse sein! Dies kann signifikante Folgen für die Bewegung des Körpers haben. Wir können mehrere Fälle unterscheiden:

- $I_a = I_b = I_c$

Falls alle Hauptträgheitsmomente gleich sind, so gilt $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. D.h. die Drehachse kann beliebig sein, da der Körper komplett symmetrisch ist.

- $I_a \neq I_b \neq I_c$ **aber** $\omega_a = \text{const.}$ **und** $\omega_b = \omega_c = 0$

Falls alle Hauptträgheitsmomente unterschiedlich sind, aber nur eine Komponente $\vec{\omega}_a \neq 0$ ist, so gilt $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. D.h. die Drehachse trifft genau eine Symmetrieachse des Körpers.

- $I_a \neq I_b \neq I_c$ aber $\vec{\omega}$ beliebig

Falls alle Hauptträgheitsmomente unterschiedlich sind aber auch $\vec{\omega}$ beliebig ist, ist \vec{L} nicht mehr parallel zu $\vec{\omega}$. Dies läßt sich grafisch in Abb. 2.4.16 veranschaulichen. Betrachten wir den Fall daß $I_a = I_b \neq I_c$. Die Rotation teilt sich auf in eine Rotation parallel zu \vec{c} , ω_c und eine Rotation senkrecht dazu $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_a^2 + \omega_b^2}$.

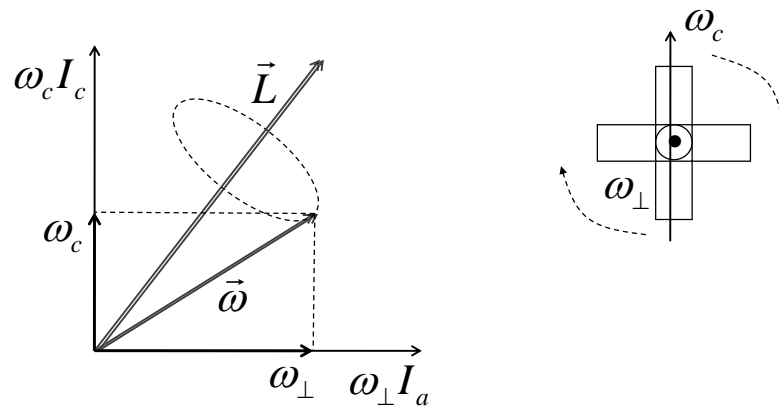


Abbildung 2.4.16: Nutation von $\vec{\omega}$ für den Fall, daß die Richtungen von \vec{L} und $\vec{\omega}$ unterschiedlich sind.

Was bedeutet dies für die Bewegung des Körpers? Wegen der Drehimpulserhaltung ist die Richtung von \vec{L} ortsfest. Die Rotation um die Achse \vec{c} und um die Achse senkrecht dazu können sich aber nicht beliebig überlagern, da immer $\vec{L} = \text{const.}$ gelten muß. Es stellt sich eine sogenannte **Nutation**⁴ ein, d.h. die Achse \vec{c} und die Richtung \perp rotieren *gemeinsam* um die Richtung von \vec{L} .

Dies läßt sich noch einmal veranschaulichen durch einen Vergleich der Drehbewegung um eine *feste* und um eine *freie* Achse:

- Bei dem obigen Beispiel der asymmetrischen Hantel, die sich um eine *feste* Achse dreht, trat ein Drehmoment auf die Achse auf („Unwucht“). Dieses Drehmoment führt zu einer Rotation von \vec{L} um die ortsfeste Richtung von $\vec{\omega}$.

⁴Die Nutation darf nicht mit der Präzession (siehe unten) verwechselt werden. Die Nutation entsteht bei einem *drehmoment-freien* Kreisel, während für die Präzession immer ein Drehmoment wirken muß.

- Bei einer freien Achse tritt wieder dasselbe Drehmoment auf, wenn \vec{L} und $\vec{\omega}$ nicht in dieselbe Richtung zeigen. In diesem Fall bleibt wegen der Drehimpulserhaltung allerdings die Richtung von \vec{L} ortsfest und $\vec{\omega}$ führt eine Nutationsbewegung um die ortsfeste Richtung von \vec{L} aus.

Ein praktisches Beispiel ist ein kardanisch aufgehängter Kreisel, auf den durch die Schwerkraft kein Drehmoment ausgeübt wird. Überlagert man der Kreiselbewegung eine Rotation in eine andere Richtung, so ist damit die Richtung des Gesamtdrehimpulses nicht mehr gleich der Symmetrieachse des Kreisels. D.h. eine Nutation stellt sich ein, die als kleine Taumelbewegung der Kreiselachse sichtbar wird.

Der Kreisel

Betrachten wir jetzt den Fall eines Kreisels. Gegeben sei ein Kreisel, der an seinem unteren Ende unterstützt wird. Wird dieser Kreisel um einen Winkel α aus seiner senkrechten Lage ausgelenkt, wirkt auf seinen Schwerpunkt ein Drehmoment:

$$\vec{D} = \vec{r} \times m\vec{g} \quad (2.4.66)$$

Ein Drehmoment führt immer zu einer Änderung des Drehimpulses:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D} \quad (2.4.67)$$

Nachdem dieses Drehmoment *immer* senkrecht zum Drehimpuls wirkt, ändert sich die Richtung von \vec{L} aber nicht dessen Betrag. Es entsteht eine **Präzessionsbewegung** (siehe Abb. 2.4.15). Die Frequenz der Präzession ist:

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} \quad (2.4.68)$$

Die Änderung des Drehimpulses bei der Präzession ist gegeben als $dL = L \sin \alpha d\phi$, wie man aus Abb. 2.4.17 ablesen kann. Daraus läßt sich ableiten:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{dt} \frac{1}{L \sin \alpha} = \frac{D}{L \sin \alpha} \quad (2.4.69)$$

Wenn wir für $D = rmg \sin \alpha$ und für $L = I\omega$ einsetzen bekommt man:

$$\omega_p = \frac{D}{L \sin \alpha} = \frac{rmg \sin \alpha}{I\omega \sin \alpha} = \frac{rmg}{I\omega} \quad (2.4.70)$$

D.h. die Präzessionsfrequenz ω_p ist unabhängig vom Winkel α .

Bei dieser Präzessionsbewegung ist der *Gesamtdrehimpuls* jetzt nicht mehr nur durch die Rotation des Kreisels um seine Figurenachse gegeben, sondern auch durch die Präzessionsbewegung selbst. D.h. die Figurenachse und die Drehimpulsrichtung sind nicht mehr identisch. Dadurch überlagert sich der Präzessionsbewegung eine Nutation.

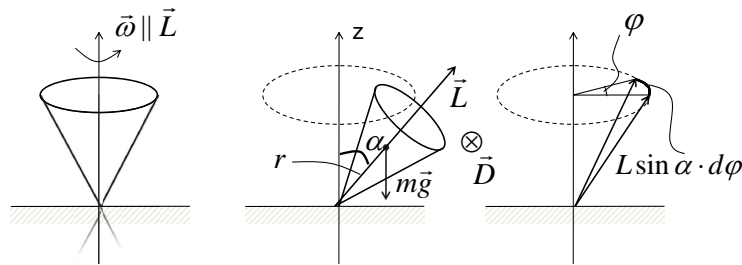


Abbildung 2.4.17: Präzession eines Kreisels.

Im folgenden seien drei Beispiele für die Anwendung der Präzessionsbewegung und der Kreiselkräfte genannt:

- **Der Kreiselkompass**

Diese Präzessionsbewegung wird beim **Kreiselkompass** ausgenutzt (siehe Abb. 2.4.16): Ein Kreisel wird in Rotation versetzt. Der Kreisel ist zusätzlich in einer Achse B senkrecht zu dieser Rotationsachse aufgehängt. Diese senkrechte Achse, kann *nur* parallel zur Erdoberfläche frei bewegen. Nehmen wir an, der Drehimpuls des Kreisels zeige zunächst in eine Richtung wie in Abb. 2.4.18 illustriert. Bei der Rotation der Erde ändert sich die Richtung dieses Drehimpulses, da die senkrechte Achse immer parallel zum Erdboden bleibt. Wenn der Kreisel komplett frei aufgehängt wird (z.B. kardanische Aufhängung) bleibt seine Ausrichtung wegen der Drehimpulserhaltung selbst bei einer Rotation der Erde beibehalten!. Durch die Zwangslage von Achse B wird allerdings ein Drehmoment ausgeübt, das die Achse des Kreisels nach Norden verkippt ($\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$). Falls diese Achse genau in Nordrichtung zeigt und damit parallel zur Rotationsachse der Erde ist, ändert sich die Richtung von \vec{L} bei einer Rotation der Erde *nicht* mehr. Damit verschwindet das Drehmoment und der Kreiselkompass behält diese Lage bei. D.h. er zeigt bei Bewegung eines Schiffes zum Beispiel immer Richtung Norden. Im Vergleich zu einer Magnetnadel hat ein Kreiselkompass den Vorteil, daß er auch bei Metallschiffen zum Einsatz

kommen kann. Eine Magnetnadel würde von der Eigenmagnetisierung eines Metallschiffes selbst zu stark abgelenkt.

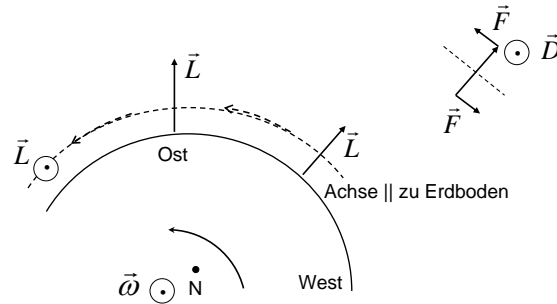


Abbildung 2.4.18: Bei einem Kreiselkompass wird ein rotierender Kreisel schwimmend gelagert, so daß er sich frei um eine Achse senkrecht zur Kreiselachse selber bewegen kann. Bewegt sich dieser Kompass am Äquator nach Westen, so ändert sich die Richtung von \vec{L} und ein Drehmoment wirkt. Erst wenn \vec{L} parallel zur Rotationsachse ausgerichtet ist bleibt $\vec{D} = 0$, d.h. der Kompass hat sich ausgerichtet.

• Präzession der Erde

Die Präzessionsbewegung wird auch bei der Bewegung der Erde um die Sonne wichtig. Die Erde rotiert um sich selbst, was zu einer Abplattung an den Polgegenden führt (siehe Abb. 2.4.19). Im Schwerpunkt der Erde heben sich Zentrifugal- und Zentripetalkraft auf. Betrachtet man aber die Schwerpunkte der Teilvolumina entsprechend der Abweichung der Erde von der Kugelform, so ist die Zentrifugalkraft auf der Sonnenabgewandten Seite im Vergleich zur Gravitationskraft größer, während auf der Sonnen-zugewandten Seite die Gravitationskraft größer als die Zentrifugalkraft ist. Dadurch wirkt auf die Erdachse netto ein Drehmoment, das zu einer Präzessionsbewegung der Erdachse mit einer Periode von 26.000 Jahren führt. Von der Erde aus betrachtet präzediert damit auch die Bahn der Sonne vor dem Fixsternhimmel mit dieser Periode. Dies hat z.B. zur Folge, daß die Sonne heute nicht mehr in den jeweiligen Sternkreisbildern steht, da die Zuordnung zwischen Sonnenbahn und Sternbild am Fixsternhimmel vor 2000 Jahren vorgenommen wurde.

• Fahrradfahren

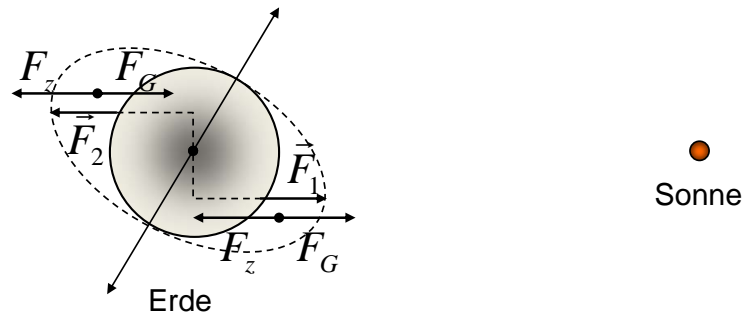


Abbildung 2.4.19: Die Erde ist durch die Rotation abgeplattet. Während sich für eine ideale Kugelform die Zentrifugalkraft und die Gravitation aufheben, so ist auf der sonnen-abgewandten Seite der Abplattung, die Zentrifugalkraft größer als die Gravitation, während sie auf der sonnen zugewandten Seite kleiner ist. D.h. ein Drehmoment entsteht, was zu einer Präzession der Erdachse mit einer Periode von 26000 Jahren führt.

Die Kreiselkräfte können auch die Fahrstabilität eines Fahrrades erklären (siehe Abb. 2.4.20). Betrachten wir zunächst das Gleichgewicht beim Fahrradfahren. Der Schwerpunkt muß immer auf der Verbindungsachse zwischen den beiden Auflagepunkten der Räder liegen. Kippt das Fahrrad nach links, muß man auch nach links lenken, um den Schwerpunkt auf die Verbindungsachse zu bringen. Durch die Kreiselkräfte geschieht dies auch beim freihändig fahren: Kippt das Fahrrad nach links, wirkt ein Drehmoment durch die Schwerkraft auf den Drehimpulsvektor des rotierenden Vorderrades. Dies erzeugt eine **Präzession**, die das Rad nach links verdreht. Während dieser Linkskurve wirkt die Zentrifugalkraft, die das Fahrrad wieder gerade stellt.

Es kommt allerdings noch ein zweiter Aspekt hinzu. Bei einem Fahrrad ist die Lenkachse des Vorderrades schräg gestellt. Die Erfahrung zeigt, daß man mit einem solchen Fahrrad einfach freihändig fahren kann. Ein Fahrrad dessen Lenkachse senkrecht steht ist dafür nicht geeignet. Woran liegt das? Durch die schräge Lenkachse bekommt man einen sogenannten **Nachlauf**, d.h. die Projektion der Lenkachse auf den Boden liegt vor dem Punkt an dem das Vorderrad den Boden berührt. Dadurch entsteht ein Nachlaufen, da das Rad immer der Lenkachse folgt.

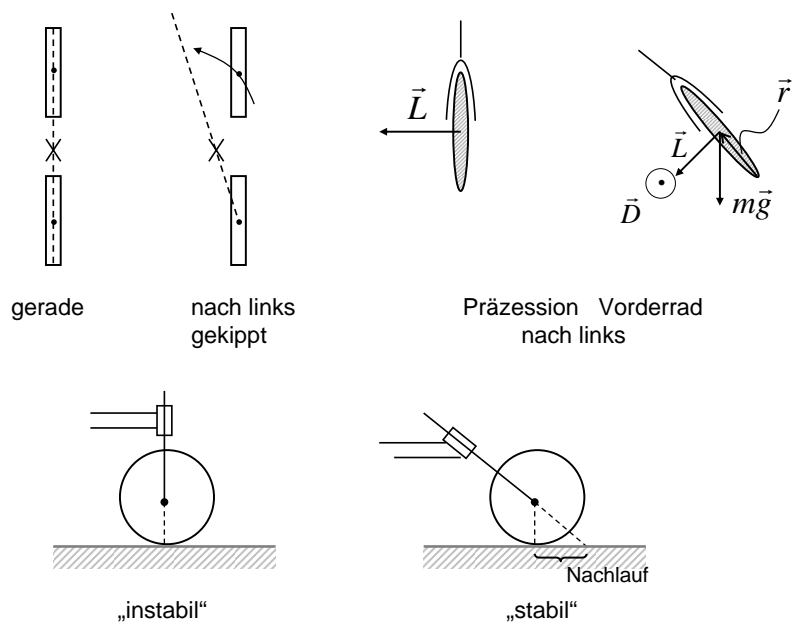


Abbildung 2.4.20: Ein Fahrrad ist stabil, wenn sein Schwerpunkt auf der Verbindungsgerade zwischen den Rädern liegt. Falls das Fahrrad nach links kippt, entsteht eine Präzession, die auch das Rad nach links dreht, d.h. der Schwerpunkt kommt wieder auf die Verbindungsachse. Die schräge Lenkachse erzeugt einen Nachlauf des Vorderrades.

2.5 Reale Körper

Bislang hatten wir entweder Massenpunkte oder starre ausgedehnte Körper betrachtet. In der Natur zeichnen sich aber alle Gegenstände durch ihre Verformbarkeit aus, die von sehr kleinen Änderungen bei elastischen Festkörpern (Volumen nahezu konstant, kleine Verformung) bis zu großen Änderungen bei Flüssigkeiten (Volumen nahezu konstant, große Verformung) und Gasen (Volumen variabel, große Verformung) reicht.

2.5.1 Elastische Festkörper

Dehnung und Stauchung

Elastische Festkörper können gedehnt oder gestaucht werden. Dies läßt sich in einem atomistischen Bild verstehen. Die Bindungsenergie zwischen zwei Atomen in einem Festkörper ist durch den Verlauf der potentiellen Energie wie in Abb. 2.5.1 illustriert. Bei sehr kleinen Atomabständen R tritt Abstoßung auf Grund des Pauliverbotes auf; bei großen Abständen bricht die chemische Bindung; bei einem Abstand r_0 liegt das Minimum der potentiellen Energie. Per Konvention wird dieses als Bindungsenergie bezeichnet und durch einen negativen Wert ausgedrückt, um einen *gebundenen* Zustand zu charakterisieren. In der Umgebung dieses Minimums r_0 läßt sich die potentielle Energie durch eine Parabel annähern.

$$E_{pot} = \frac{1}{2}c(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 + E_B \quad (2.5.1)$$

Die rückstellende Kraft bei einer Auslenkung um diese Ruhelage r_0 ist gegeben durch:

$$\vec{F} = -\mathbf{grad}E_{pot} = -c(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.5.2)$$

D.h. wir bekommen eine Kraft, die linear mit der Auslenkung ansteigt, eine *Federkraft*. Mit diesem Ansatz läßt sich eine Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x = r - r_0$ eines Atoms der Masse m ausdrücken:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad (2.5.3)$$

bzw.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0 \quad (2.5.4)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für eine Schwingung mit $x(t)$ als Lösung der Form:

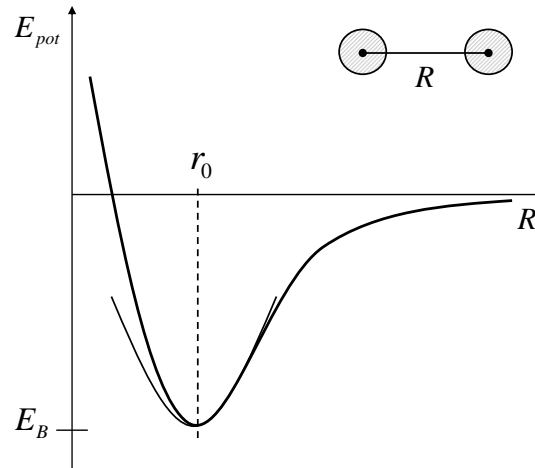


Abbildung 2.5.1: Die potentielle Energie einer Bindung zwischen zwei Atomen in einem Festkörper in Abhängigkeit von ihrem Abstand R . Das Minimum kann durch eine Parabel angenähert werden.

$$x(t) = \sin \omega_0 t \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (2.5.5)$$

Die Atome schwingen also um ihre Ruhelage, was eine direkte Folge der Parabelnäherung der potentiellen Energie ist. Man spricht auch von der **harmonischen Näherung**. Dehnt man jetzt einen realen Körper kann man den linearen Zusammenhang zwischen Zugspannung und relativer Längenänderung für kleine Dehnungen gut beobachten: die Änderung des mittleren Abstandes zwischen den Atomen wird als Dehnung oder Stauchung (siehe Abb. 2.5.2) sichtbar. Übt man eine Kraft auf einen Körper der Länge L aus, der an einem Ende eingespannt ist, so dehnt er sich. Die Kraft F , die man dabei aufwenden muß, ist in erster Näherung proportional zur Längenänderung ΔL . Hier kann man entweder einen Körper betrachten, der an zwei Enden mit der Kraft F gedehnt oder gestaucht wird, oder der eingespannt ist und an einem Ende mit F gedehnt wird. In letzterem Fall, sorgt die Normalkraft F_N am eingespannten Ende für die Bedingung $\sum F = 0$ im Gleichgewicht. Mit einem Querschnitt A dieses Festkörpers und einer Proportionalitätskonstante E bekommt man:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (2.5.6)$$

Die Proportionalitätskonstante E heißt **Elastizitätsmodul**. Zusätzlich

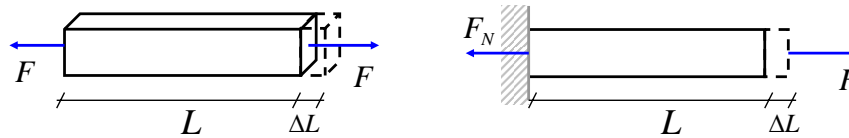


Abbildung 2.5.2: Dehnung eines Festkörpers um eine Länge ΔL .

kann man die **Zugspannung** oder **Druckspannung** σ einführen als die Kraft pro Fläche.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.5.7)$$

Mit der **relativen Längenänderung** $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ wird schließlich das **Hook'sche Gesetz** formuliert:

$$\boxed{\sigma = E\epsilon} \quad (2.5.8)$$

Bei großen Dehnungen ist die potentielle Energie der Atombindung allerdings nicht mehr durch eine Parabel anpassbar und die Dehnung damit auch *nicht* mehr proportional zur Kraft, wie in Abb. 2.5.3 illustriert. Die Abweichung der potentiellen Energie von der Parabelform wird sichtbar. Man spricht von der **Anharmonizität** des Bindungspotentials und die Dehnung ist *nicht mehr* proportional zur wirkenden Zugspannung. In einem Übergangsbereich ist diese Dehnung allerdings immer noch *reversibel*. Ab einem bestimmten Punkt kehrt der Körper nicht mehr in seine Ausgangslage zurück, da sich in seinem Innern *irreversible* Änderungen durch die Dehnung ergeben haben, der Körper fließt. Dies kann zum Beispiel das Abgleiten einzelner Kristallite in einem polykristallinen Festkörper sein. Bei noch größerer Dehnung wird schließlich ein Punkt erreicht an dem der Körper zerreißt (siehe Abb. 2.5.3).

Die Härte von Materialien gegenüber einer mechanischen Beanspruchung kann mit zahlreichen Messverfahren untersucht werden. Die Härte selbst ist keine physikalisch genau definierte Größe im Unterschied zum Elastizitätsmodul. Die Härte ist also immer definiert bezüglich eines gewählten Messverfahrens. Bei der Härtemessung wird ein Prüfkörper in ein Material hinein gedrückt und das Verhältnis aus aufgewendeter Kraft zur Querschnittsfläche des Eindrucks ist als Härte definiert. Hierbei unterschieden sich die einzelnen Messverfahren hinsichtlich der Wahl des Prüfkörpers (Kugel, Diamant etc.)

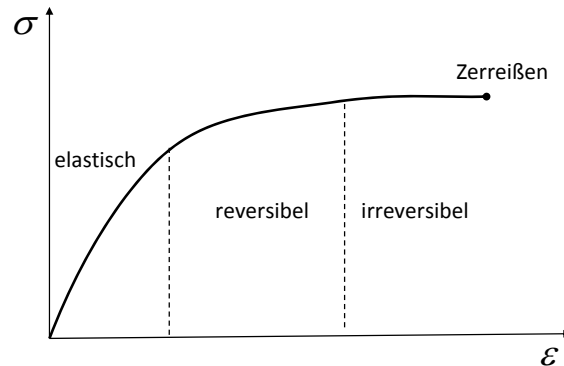


Abbildung 2.5.3: Das Hook'sche Gesetz verknüpft Zugspannung $\sigma = \frac{F}{q}$ und relative Längenänderung $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Wegen der Anharmonizität des Bindungspotentials kommt es zu einer Abweichung vom Hook'schen Gesetz für große Zugspannungen bzw. Dehnungen.

Eine Belastung des Körpers in eine Richtung führt automatisch auch zu einer Formänderung senkrecht dazu, der **Querkontraktion**. Betrachten wir dazu die Dehnung in x-Richtung wie in Abb. 2.5.4 veranschaulicht. Diese führt automatisch zu einer Querkontraktion in der y- und z-Richtung, die durch die sog. **Poissonzahl** μ ausgedrückt werden kann. Es muß gelten:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu\epsilon_x = -\mu\frac{\sigma_x}{E} \quad (2.5.9)$$

Das Minuszeichen drückt aus, daß eine Dehnung in einer Richtung grundsätzlich eine Stauchung in die andere Richtung bedingt und umgekehrt.

Man kann einen allgemeinen Fall definieren, bei dem in alle drei Richtungen Zug- bzw. Druckspannungen herrschen mögen. D.h. eine Dehnungen in y- und z-Richtung kann seinerseits durch eine mögliche Druck- oder Zugspannung in y- und z-Richtung durch die Querkontraktion vergrößert oder verringert werden. Man bekommt eine Dehnung in x-Richtung durch die Spannungen σ_x, σ_y und σ_z von:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.5.10)$$

Man erkennt hier zum Beispiel, daß eine Dehnung in x-Richtung reduziert werden kann, wenn eine Dehnung in y-Richtung oder z-Richtung auftritt.

Die Änderung des Volumens ist gegeben als:

$$\epsilon_{\text{Volumen}} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.5.11)$$

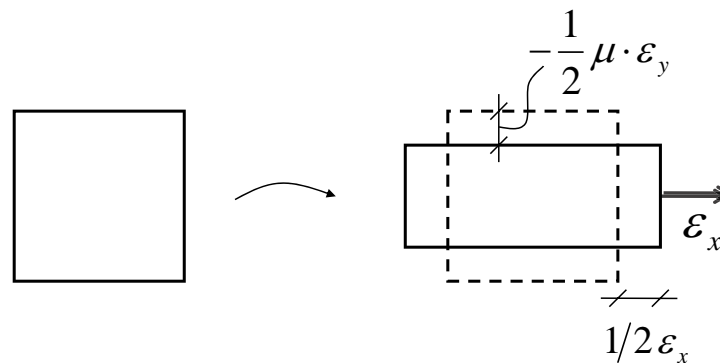


Abbildung 2.5.4: Querkontraktion in y- und z-Richtung bei einer Dehnung des Körpers in x-Richtung.

Man erkennt, daß eine Volumenänderung nur auftritt, falls die Poissonzahl $\mu \neq 0.5$ ist.

Betrachten wir im folgenden das Beispiel eines gebogenen Balkens, wie in Abb. 2.5.5 illustriert. Der Balken habe eine Länge L und sei an einem Ende eingespannt. An seinem Ende wirke eine Kraft F_0 . Welche Spannung wirkt jetzt in dem Balken?

Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, entsteht ein Unterschied Δl in der Länge des Balkens an Ober- und Unterseite:

$$\Delta l = \left(r + \frac{d}{2}\right) \varphi - \left(r - \frac{d}{2}\right) \varphi = d\varphi = d \frac{l}{r} \quad (2.5.12)$$

mit r dem **Krümmungsradius** und d der Dicke des Balkens. Wir betrachten kleine Dehnungen bzw. große Krümmungsradien r . D.h. bei kleinen Winkeln φ , kann $\sin \varphi$ grundsätzlich durch $\varphi = \frac{l}{r}$ angenähert werden. Die gestrichelte Linie in Abb. 2.5.5 bezeichnet man als **neutrale Faser** in der aus Symmetriegründen *keine* Spannung auftreten kann. Die Längenänderung an einem beliebigen Ort z im Balken ist demnach:

$$\Delta l(z) = z \frac{l}{r} \quad (2.5.13)$$

Mit dem Hook'schen Gesetz bekommen wir:

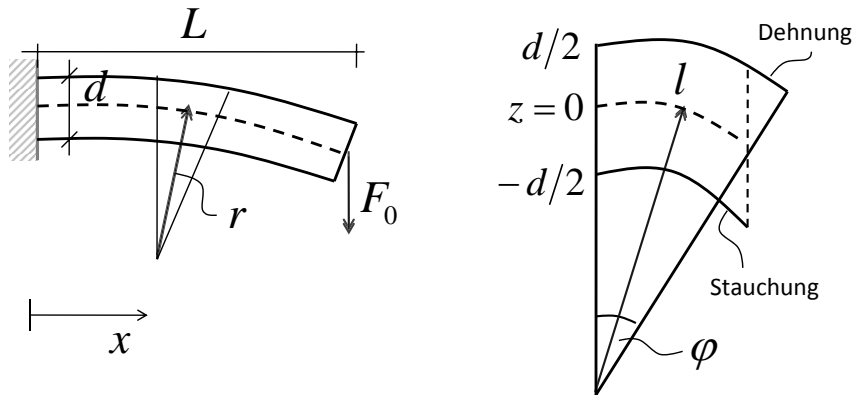


Abbildung 2.5.5: Biegung eines Balkens der Länge L . Die gestrichelte Linie bezeichnet die neutrale Faser.

$$\frac{\Delta l}{l} = \epsilon = \sigma \frac{1}{E} \quad (2.5.14)$$

bzw.

$$\sigma = \frac{z}{r} E \quad (2.5.15)$$

Die Spannung σ erzeugt eine Kraft dF auf eine Fläche $b \cdot dz$ am Ort z innerhalb des Balkens der Breite b :

$$dF = \sigma b dz = \frac{z}{r} E \cdot b \cdot dz \quad (2.5.16)$$

Diese Kraft erzeugt mit dem Hebelarm z ein Drehmoment $dD_{\text{Balken}} = dFz$ (siehe Abb. 2.5.6):

$$dD_{\text{Balken}} = z \frac{E}{r} z \cdot b \cdot dz \quad (2.5.17)$$

Mit der Integration über die Dicke d des Balkens bekommen wir das gesamte Drehmoment, daß durch das Spannungsfeld σ im Balken aufgebaut wird.

$$D_{\text{Balken}} = \int_{-d/2}^{d/2} z^2 b \frac{E}{r} dz = \frac{Ed^3 b}{12r} \quad (2.5.18)$$

Dieses Drehmoment D_{Balken} steht im Gleichgewicht mit dem von außen angreifenden Drehmoment durch die Kraft F_0 . An einem Ort x auf der Länge des Balkens ist das Drehmoment gegeben als (siehe Abb. 2.5.5):

$$D_{\text{au\ss en}} = F_0 (L - x) \quad (2.5.19)$$

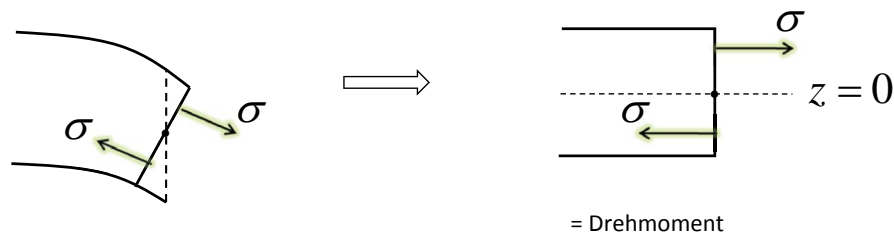


Abbildung 2.5.6: An einem beliebigen Punkt in dem Balken herrscht eine Gleichgewichtsbeanspruchung durch Drehmomente.

Wegen dem dritten Newton'schen Axiom gilt $D_{\text{Balken}} = -D_{\text{au\ss en}}$. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{r} = -\frac{12F_0}{Ed^3b}(L - x) \quad (2.5.20)$$

Man erkennt, daß die Krümmung des Balkens $1/r$ mit der dritten Potenz der Balkendicke abnimmt⁵. Gleichzeitig ist die Krümmung am Ort $x = 0$, dem Ort der Einspannung, am größten. An diesem Ort tritt auch die maximale Zugspannung σ_{max} auf:

$$\sigma_{\text{max}} = E \frac{1}{r} \frac{d}{2} \quad (2.5.21)$$

bzw.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{12F_0L}{2d^2b} \quad (2.5.22)$$

D.h. der Balken bricht bei Überlastung genau dort ab.

Verscherung

Neben einer Dehnung und Stauchung kann ein elastischer Festkörper auch *verschert* werden. Durch das Hook'schen Gesetz kann man die **Scherspannung** τ mit dem **Scherwinkel** γ , gemäß Abb. 2.5.7 verknüpfen:

$$\tau = G\gamma \quad (2.5.23)$$

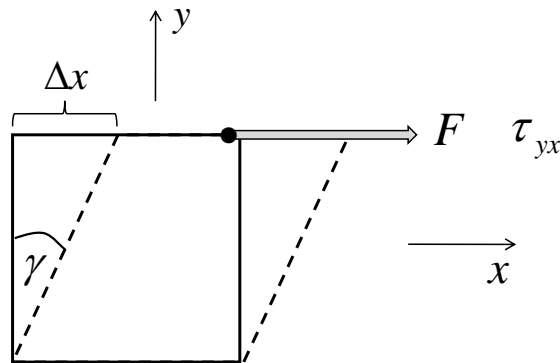


Abbildung 2.5.7: Verscherung eines Quaders um einen Winkel γ .

G bezeichnet man als **Schubmodul**.

Die einzelnen Materialkonstanten G , E und μ sind allerdings nicht unabhängig voneinander. Jede Verscherung bedeutet auch eine Längenänderung in einem Volumen. Bei einem Würfel führt zum Beispiel eine Verscherung zu einer starken Dehnung auf einer Hauptdiagonalen und zu einer entsprechenden Stauchung auf der dazu senkrechten stehenden anderen Hauptdiagonalen. Betrachten wir dazu einen kleinen Würfel der Kantenlänge a , der in die y -Richtung gedehnt wird. Gemäß Abb. 2.5.8 bekommen wir einen Zusammenhang von:

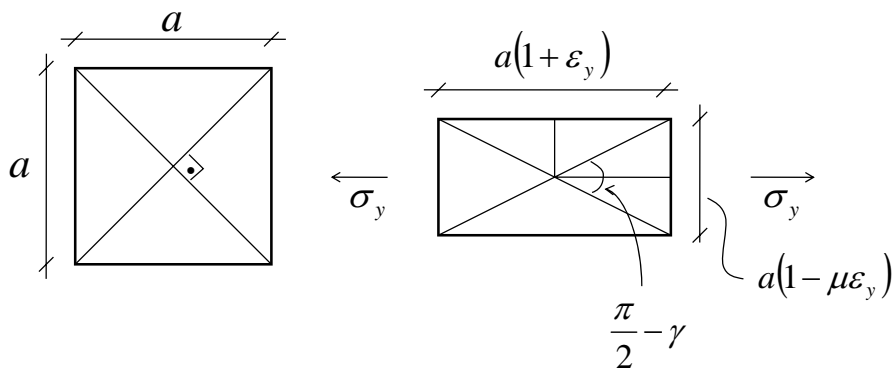


Abbildung 2.5.8: Verknüpfung zwischen Verscherung und Dehnung.

⁵Große Krümmung entspricht einem kleinen Radius und umgekehrt.

$$\tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right) = \frac{1 - \mu\epsilon_y}{1 + \epsilon_y} \quad (2.5.24)$$

Für sehr kleine Verscherungswinkel γ läßt sich dies annähern zu:

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \mu\epsilon_y}{1 + \epsilon_y} \quad (2.5.25)$$

bzw.

$$\gamma = \epsilon_y(1 + \mu) \quad (2.5.26)$$

Wenn wir $\tau = G\gamma$ und $\sigma = \epsilon E$ einsetzen bekommen wir:

$$E = \frac{\sigma}{\tau}G(1 + \mu) \quad (2.5.27)$$

Aus der Verscherung eines Körpers kann man zudem noch ableiten, daß die Verscherung τ durch eine maximale uni-axiale Dehnung in y -Richtung erzeugt werden kann, als $\frac{1}{2}\sigma = \tau^6$. Damit bekommt man als Verknüpfung schließlich:

$$\boxed{E = 2G(1 + \mu)} \quad (2.5.28)$$

Diese Beziehung gilt streng nur für Materialien mit isotropen, d.h. räumlich homogenen elastischen Eigenschaften. Anisotrope Körper mit bestimmten Vorzugsrichtung müssen aufwändiger beschrieben werden.

Im allgemeinen Fall, kann ein Spannungszustand eines Körpers durch eine Matrix $\tilde{\sigma}$ beschrieben werden.

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.5.29)$$

Nachdem bei einem ruhenden Körper sich die Drehmomente aufheben müssen gilt immer $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, d.h. die Matrix ist symmetrisch. Der Spannungszustand ist mit der Verformung verknüpft, die durch die Matrix

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.5.30)$$

gegeben ist. Man bekommt eine verallgemeinerte Form des Hook'schen Gesetzes mit:

⁶Dies läßt sich aus der Kräftebilanz eines kleinen rechtwinkligen Dreiecks ableiten. Bei einem spitzen Winkel von 45° wird durch eine Scherspannung eine maximale Zugspannung bzw. Druckspannung verursacht.

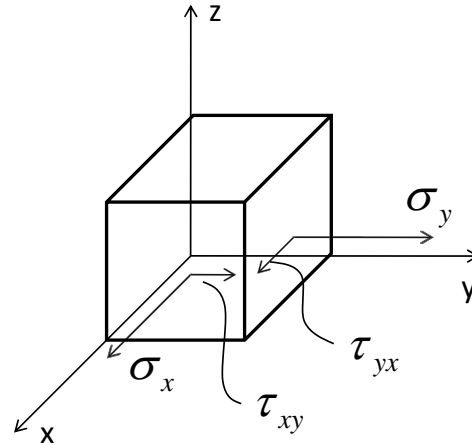


Abbildung 2.5.9: Allgemeine Beschreibung eines Spannungszustandes durch Zug- σ und Scherspannung τ .

$$\tilde{\sigma} = E\tilde{\epsilon} \quad (2.5.31)$$

Bei einem isotropen Material ist E ein Skalar. Für Festkörper mit bestimmten Vorzugsrichtungen und einer Anisotropie in ihrem Verhalten ist auch E wieder ein Tensor \tilde{E} .

2.5.2 Flüssigkeiten

Eine Flüssigkeit kann prinzipiell keine Kräfte parallel zur Flüssigkeitsoberfläche (=Scherkräfte) aufnehmen. Die Flüssigkeitsoberfläche verändert sich solange bis die wirkenden Kräfte immer senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche sind. Dies läßt sich an einem rotierenden Gefäß illustrieren. Die Oberfläche der Flüssigkeit in dem rotierenden Gefäß nimmt die Kontur einer Parabel ein, da dann die Summe aus Zentrifugalkraft und Schwerkraft genau senkrecht zur Oberfläche steht, wie Abb. 2.5.10 veranschaulicht.

Betrachten wir einen Ort auf der rotierenden Flüssigkeit, so muß sind die Kräfte die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft. Nachdem die Kraft senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche wirkt (Querschnitt entspricht der Funktion $z(r)$) muß gelten:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{m\omega^2 r}{mg} \quad (2.5.32)$$

D.h. es gilt:

$$\frac{dz}{dr} \propto r \quad \text{bzw.} \quad z(r) \propto r^2 \quad (2.5.33)$$

D.h. der Querschnitt der Flüssigkeit hat eine Parabelform. Diese Abhängigkeit erzeugt auch eine perfekte asphärische Abbildung, falls man die Oberfläche als Spiegel dienen soll. In der Tat werden große Glasspiegel der Astronomie auf diese Art vorgeformt, wobei während der Erstarrung des geschmolzenen Glas-Rohlings dieser rotiert und sich so automatisch die Parabelform einstellt.

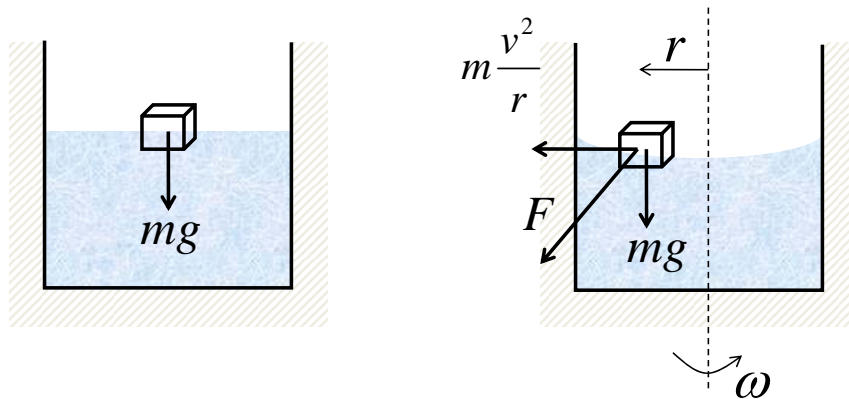


Abbildung 2.5.10: In einer Flüssigkeit können keine Scherkräfte auftreten. Deshalb richtet sich die Kraftkomponente immer senkrecht zur Oberfläche aus.

Hydrostatischer Druck

In einer ruhenden Flüssigkeit (siehe Abb. 2.5.10), darf sich kein Flüssigkeitselement bewegen, d.h. die Kräfte auf die Oberflächen dieses Flüssigkeitselementes müssen sich alle aufheben. Diese Kraft pro Fläche bezeichnet man als **Druck**:

$$p = \frac{F}{A} \quad [\text{Pa}] \quad (2.5.34)$$

Die Einheit des Druckes sind **Pascal, Pa**. Dieser Druck ist innerhalb der Flüssigkeit konstant (ohne Schwerkraft). Dies kann wie folgt gezeigt werden. Betrachten wir ein Flüssigkeitselement bei dem der Druck in x-Richtung auf

beiden Seiten unterschiedlich sei. Auf der linken Fläche des Volumenelements $dydz$ herrsche ein Druck p :

$$F = pdzdy \quad (2.5.35)$$

und auf der rechten Seite ein Druck $p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$. Die Kraftbilanz in x-Richtung lautet demnach:

$$F_x = pdzdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx \right) dzdy = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \quad (2.5.36)$$

mit $dx dy dz = dV$. Nachdem in einer Flüssigkeit das Volumenelement konstant ist, sich aber in Ruhe die Kräfte aufheben, muß gelten: $-\mathbf{grad}p = 0$. D.h. der Druck ist konstant. Dies bezeichnet man als **Pascal'sches Prinzip**:

$$\boxed{p = \text{const.}} \quad (2.5.37)$$

Ein Beispiel für die Anwendung der Gleichverteilung des Druckes in einer Flüssigkeit ist die **hydraulische Hebebühne** für schwere Lasten, wie in Abb. 2.5.11 gezeigt. In einem System verbundener Röhren wird auf eine Röhre mit kleinem Querschnitt A_1 eine Kraft F_1 ausgeübt. Nachdem der Druck in der Flüssigkeit *überall* gleich ist, wirkt durch diesen Druck auf die Fläche A_2 die Kraft F_2 . D.h. es muß gelten:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad (2.5.38)$$

Somit ist die Kraft, die man aufwenden muß, um einen Körper anzuheben, der die Fläche A_2 beschwert, gleich:

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2}F_2 \quad (2.5.39)$$

Die Arbeit W , die geleistet werden muß ist Kraft mal Weg. D.h. die Verschiebung der Fläche A_1 um Δz_1 erzeugt eine Verschiebung der Fläche A_2 um Δz_2 .

$$W_1 = F_1\Delta z_1 = \frac{A_1}{A_2}F_2\Delta z_1 \quad (2.5.40)$$

Nachdem die veränderten Volumina gleich bleiben, d.h. $A_1\Delta z_1 = A_2\Delta z_2$ bekommt man durch Einsetzen:

$$W_1 = F_1\Delta z_1 = \frac{A_1}{A_2}F_2\frac{A_2}{A_1}\Delta z_2 = F_2\Delta z_2 \quad (2.5.41)$$

D.h. die Kraft F_1 kann sehr viel kleiner als die Kraft F_2 gemacht werden. Um die Last entsprechend F_2 um Δz_2 anzuheben ist allerdings eine große Verschiebung Δz_1 notwendig.

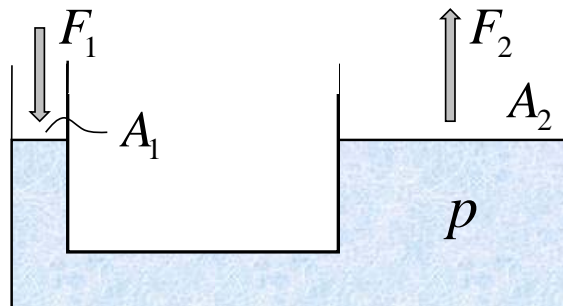


Abbildung 2.5.11: Hydraulische Hebebühne.

Bisher hatten wir die *Gewichtskraft* der Flüssigkeit selbst vernachlässigt. Betrachten wir noch einmal ein Volumenelement in einer Flüssigkeit, wie in Abb. 2.5.12 illustriert. Der Druck auf der Unterseite des Volumenelements ist größer, da hier noch die Gewichtskraft der in dem Volumenelement enthaltenen Massen hinzukommt. Der Druckunterschied dp zwischen oben und unten bei einem Volumenelement (Höhenunterschied dz) ist:

$$dp = \rho V g \frac{1}{A} = \rho A dz g \frac{1}{A} = \rho g \cdot dz \quad (2.5.42)$$

Der Druck an einem Ort z in einer Flüssigkeitssäule, durch die Gewichtskraft der darüber stehenden Wassersäule ist demnach gegeben als

$$p(z) = \rho g(H - z) \quad (2.5.43)$$

mit H der Höhe des Wasserspiegels über Grund und der Definition $p(H) = 0$. Interessanterweise gilt diese Beziehung nicht für alle Medien. Betrachtet man zum Beispiel Sandkörner oder Weizenkörner in einem entsprechenden Silo, so nimmt der Druck nach unten hin *nicht* zu, da sich die Sandkörner untereinander abstützen können und so den Druck von oben auf die Seitenwände leiten.

Der Auftrieb

Die Druck-Variation mit der Höhe eines Wasserspiegels wird sichtbar beim sog. **Auftrieb**. Betrachten wir einen Körper, der untergetaucht ist. Durch die

unterschiedlichen Höhen der Ober- wie der Unterseite ist der entsprechende Druck auf der Ober- und Unterseite mit Querschnitt A unterschiedlich. Dies führt netto zu einer Kraft nach oben, dem Auftrieb (siehe Abb. 2.5.12).

$$F_1 = p_1 A_1 \quad F_2 = p_2 A_2 \quad (2.5.44)$$

Mit $A_1 = A_2 = A$ bekommen wir

$$\Delta p = \frac{F_1 - F_2}{A} = p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) = \rho_{\text{Flüssigkeit}} g \Delta h \quad (2.5.45)$$

$$F_{\text{Auftrieb}} = \Delta p A = \rho_{\text{Flüssigkeit}} g A \Delta h = \rho g \Delta V \quad (2.5.46)$$

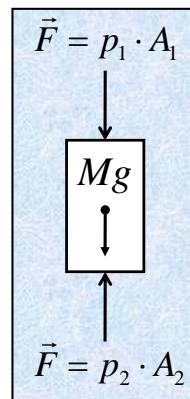


Abbildung 2.5.12: Der Auftrieb.

Demnach verliert ein eingetauchter Körper soviel Gewicht, wie die verdrängte Wassermenge $\Delta V = A \Delta h$ wiegt. Dies bezeichnet man als das **Archimedische Prinzip**:

Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

Dieser Auftrieb ist der Gewichtskraft entgegen gerichtet. Ein U-Boot kann stabil im Wasser schweben, wenn es den Auftrieb genau mit seiner Gewichtskraft ausbalanciert. Durch eine Veränderung des verdrängten Volumens (Fluten oder Ausblasen von Tanks) kann es entweder sinken oder aufsteigen.

Welches Gleichgewicht stellt sich jetzt ein, wenn ein Körper *schwimmt*? Im Gleichgewicht muß gelten:

$$F_{\text{Auftrieb}} = F_{\text{Gravitation}} \quad (2.5.47)$$

Der Vergleich der Dichten des Körpers und des Mediums in dem der Körper schwimmt, besagt zunächst, daß ein **Schwimmen** nur möglich ist, wenn die *mittlere Dichte*⁷ des Körpers kleiner als die des Wassers ist. Bei einem schwimmenden Körper taucht dieser *so weit* in das Wasser ein, daß die verdrängte Wassermenge *genau* seinem Gewicht entspricht! Dies wird auf eindrucksvolle Weise in einem **Schiffshebewerk** sichtbar. Hier fährt ein Schiff in einen wassergefüllten Trog hinein, der auf eine andere Flußsohle gehoben oder gesenkt wird. An dem Trog sind Gegengewichte, die das Gewicht der Wassermenge in dem Trog ausbalancieren. Obwohl ein Schiff Tausende von Tonnen wiegt, ändert sich das Gewicht des Troges *nicht* durch das hinein fahrende Schiff: die verdrängte Wassermenge ist genau so schwer wie des Schiffes selbst. D.h. der Motor zum Heben und Senken des Troges kann relativ schwach sein, da kein zusätzliches Schiffsgewicht mit angehoben werden muß⁸

Bei der Konstruktion von Schiffen ist der Angriffspunkt der Auftriebskraft wesentlich. Dieser Angriffspunkt ist der Schwerpunkt der *verdrängten* Wassermenge. Der Angriffspunkt der Gravitation ist der Schwerpunkt des gesamten Schiffes. Beide Angriffspunkte sind in der Regel *nicht* identisch. Ein Schiff liegt dann *stabil* im Wasser, wenn das Drehmoment durch die Auftriebskraft zu einer senkrechten Ausrichtung des Schiffes führt. Dies ist in Abb. 2.5.13 illustriert. Demnach ist ein Schiff dann besonders stabil, wenn sein Schwerpunkt möglichst tief angeordnet ist.

Grenzflächen

Reale Medien zeichnen sich durch eine Grenzfläche zu ihrer Umgebung aus. Das Erzeugen einer Grenzfläche, zum Beispiel beim Spalten eines Kristalls ist immer mit einer Energie verbunden, da die Bindungen zu den Nachbaratomen aufgebrochen werden müssen. Man definiert eine sog. **Oberflächenenergie** $E_{\text{Oberfläche}}$ als diejenige Proportionalitätskonstante, die die aufgewendete Arbeit ΔW zur Oberflächenänderung ΔA in Bezug setzt:

$$\Delta W = E_{\text{Oberfläche}} \Delta A \quad (2.5.48)$$

⁷Bei einem Schiff zum Beispiel, ergibt sich die mittlere Dichte aus dem Gewicht des Schiffes durch das verdrängte Volumen

⁸Dies ist im Unterschied zu einem traditionellen Fahrstuhl in Hochhäusern. Hier muß der Motor das Gewicht der Passagiere heben können.

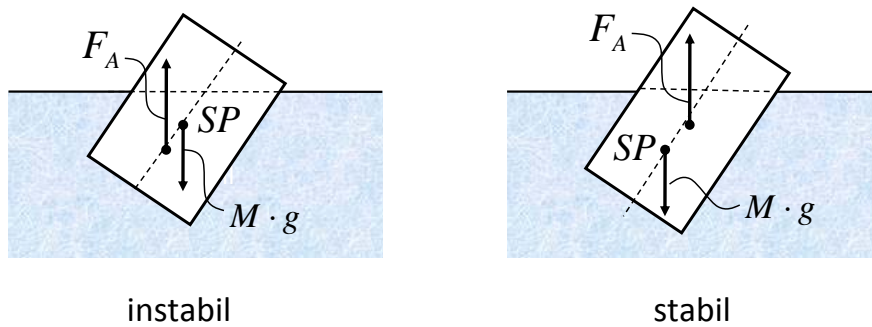


Abbildung 2.5.13: Stabilität eines Schiffes. Nur wenn der Angriffspunkt des Auftriebs oberhalb des Schwerpunktes als Angriffspunkt der Schwerkraft liegt, richtet sich ein Schiff nach der Schräglage wieder senkrecht auf.

Betrachten wir dazu einen Tropfen einer Flüssigkeit auf einer Oberfläche (siehe Abb. 2.5.14). Die Arbeit, die geleistet werden muß, um den Umfang eines Tropfens zu vergrößern ist:

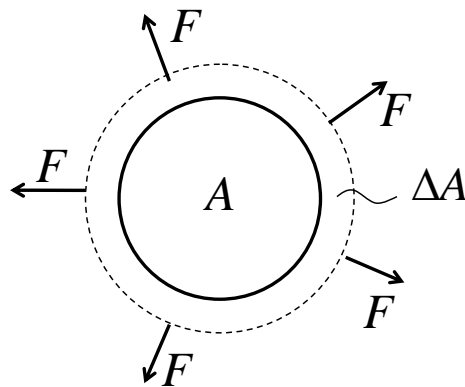


Abbildung 2.5.14: Die Oberflächenenergie beschreibt die Arbeit die geleistet werden muß, um eine Fläche um ΔA zu vergrößern.

$$\Delta W = \sum_{\text{Umfang}} F dR = \frac{F}{2\pi R} 2\pi R dR = E_{\text{Oberfläche}} \Delta A \quad (2.5.49)$$

Man erkennt, daß die Einheit der Oberflächenenergie $[\text{Nm}^{-1}]$ ist. Oftmals wird **Oberflächenenergie** und **Oberflächenspannung** gleichwertig verwendet. Bei genauer Definition ist die Oberflächenenergie diejenige Energie, die durch das Spalten der Atombindungen aufgebracht werden muß. Bei

der Oberflächenspannung wird zusätzlich noch berücksichtigt, daß durch das Einbringen einer neuen Grenzfläche sich eine Atomsorte an der Oberfläche ansammeln kann (die Phasen A und B entmischen sich bei einem Festkörper AB, wobei sich zum Beispiel Atomsorte A an der Oberfläche ansammelt). Im Experiment wird in der Regel die Oberflächenspannung bestimmt. Bei einkomponentigen Systemen ist die Oberflächenspannung identisch mit der Oberflächenenergie.

Betrachten wir als Beispiel eine **Seifenblase** mit Radius r . Innerhalb der Seifenblase herrsche ein Druck p während in der Umgebung der Druck p_0 herrsche. Für die Vergrößerung der Seifenblase, muß der innere Überdruck $p - p_0$ durch eine Volumenänderung $4\pi r^2 \Delta r$ gegen die Oberflächenspannung $E_{\text{Oberfläche}}$ um einen Betrag $E_{\text{Oberfläche}} \Delta A$ Arbeit leisten.

$$\Delta W = F \Delta r = p A \Delta r = p \Delta V \quad (2.5.50)$$

Es gilt:

$$(p - p_0) 4\pi r^2 \Delta r = E_{\text{Oberfläche}} \Delta A \quad (2.5.51)$$

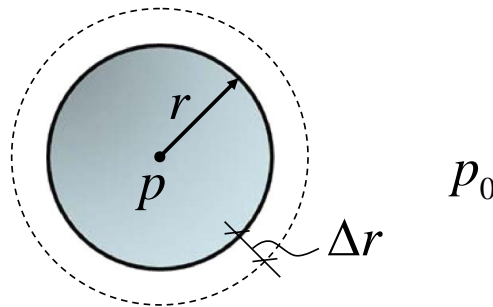


Abbildung 2.5.15: Kräftegleichgewicht einer Seifenblase.

Mit $\Delta p = p - p_0$ bekommen wir:

$$\Delta p 4\pi r^2 \Delta r = E_{\text{Oberfläche}} 4\pi (r^2 - (r - \Delta r)^2) 2 \quad (2.5.52)$$

Der Faktor 2 auf der rechten Seite berücksichtigt, daß sowohl die Innenseite als auch die Außenseite vergrößert wird. Wir bekommen somit:

$$\Delta p 4\pi r^2 \Delta r = E_{\text{Oberfläche}} 4\pi \left(r^2 - r^2 + 2r\Delta r - \underbrace{\Delta r^2}_{\Delta r^2 \ll \Delta r} \right) 2 \quad (2.5.53)$$

De meisten Terme kürzen sich und wir erhalten als Zusammenhang zwischen Δp und r folgenden Ausdruck:

$$\Delta p = 4 \frac{E_{\text{Oberfläche}}}{r} \quad (2.5.54)$$

Man erkennt, daß der Druckunterschied bei sehr kleinen Seifenblasen sehr groß wird. D.h. kleine Seifenblasen sind sehr ungünstig. Dies ist ein allgemeines Phänomen: die Bilanz aus Grenzflächenenergie und Volumenenergie ist günstiger bei Körpern mit größerem Volumen-zu-Oberfläche Verhältnis, d.h. große Tropfen oder Seifenblasen wachsen auf Kosten der kleineren.

Diese Oberflächenspannung wird auch ganz praktisch für die Bewertung der Benetzbarkeit von Oberflächen genutzt. Betrachten wir dazu das Kräftegleichgewicht eines Tropfens auf einer Unterlage (Substrat), wie in Abb. 2.5.16 illustriert. An der Grenzlinie lassen sich drei Oberflächenspannungen angeben für die jeweiligen Grenzflächen Luft-Substrat (E_{LS}), Flüssigkeit-Substrat (E_{FS}) und Luft-Flüssigkeit (E_{LF}). Aus einer Kraftbilanz am Ort der Grenzlinie an der sich alle drei Medien berühren kann man ableiten:

$$E_{LS} = E_{FS} + E_{LF} \cos \Theta \quad (2.5.55)$$

D.h. aus einer Beobachtung des sog. **Kontaktwinkels** Θ an der Grenzlinie läßt sich auf die Oberflächenspannungen schließen. Hierbei betrachtet man die Oberflächenenergien als vektorielle Größen.

Die Oberflächenenergie kann auch als einfache Erklärung für die **Kapillarwirkung** von dünnen Hohlräumen dienen. Dies geschieht mit einer einfachen Energiebilanz, wie am Beispiel einer Kapillare mit Radius r in Abb. 2.5.16 illustriert ist. An der Oberfläche in der Höhe h haben wir folgendes Gleichgewicht: eine Erhöhung um dh ändert die potentielle Energie $mg = \rho r^2 \pi h g$ der *ganzen* Flüssigkeitssäule um dh . Dies geschieht nur, wenn in gleichem Maß Oberflächenenergie gewonnen wird. Es muß gelten:

$$mg dh = 2\pi r dh \Delta E_{\text{Oberfläche}} \quad (2.5.56)$$

Hierbei vergleicht die Größe $\Delta E_{\text{Oberfläche}}$ die Oberflächenspannungen vor und nach der Benetzung gemäß:

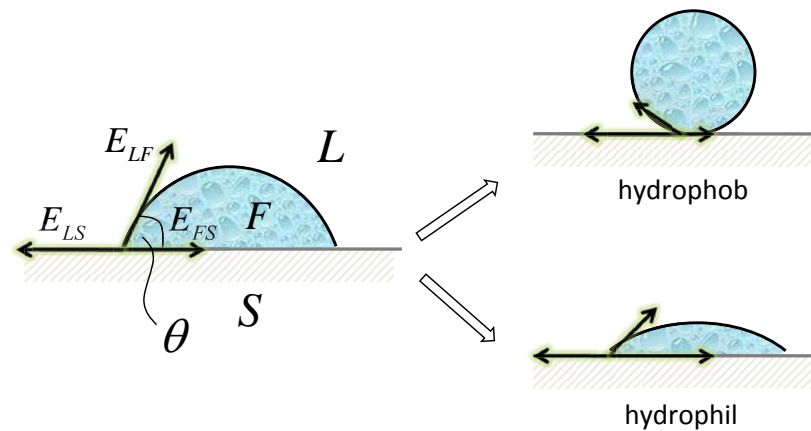


Abbildung 2.5.16: Benetzung einer Oberfläche.

$$\Delta E_{\text{Oberfläche}} = E_{\text{Kapillare-Luft}} - E_{\text{Kapillare-Flüssigkeit}} \quad (2.5.57)$$

Mit dieser Definition wird

$$mg = 2\pi r \Delta E_{\text{Oberfläche}} \quad (2.5.58)$$

Wenn wir die Masse der Flüssigkeitssäule $m = \pi r^2 h \rho$ benutzen, bekommt man:

$$h = \frac{2\Delta E_{\text{Oberfläche}}}{r\rho g} \quad (2.5.59)$$

D.h. mit kleinem Radius r ist die Kapillarwirkung sehr viel stärker, da der Energiegewinn bei Benetzung sehr groß wird im Vergleich zur potentiellen Energie, die aufgebracht werden muß, um die Flüssigkeit um dh anzuheben. Die Bilanz von Schwerkraft und Oberflächenenergie, kann auch zur **negativen Kapillarität** führen, falls es für eine Flüssigkeit *ungünstig* wird eine Oberfläche zu benetzen. Fügt man eine Kapillare in eine solche Flüssigkeit ein, so wird die Flüssigkeit verdrängt, bis der Druck in einer bestimmten *Tiefe* ausreicht, um im Gleichgewicht mit der Änderung der Oberflächenenergie zu sein. Hier wird $\Delta E_{\text{Oberfläche}}$ negativ.

Mit der Gleichung 2.5.55 läßt sich auch direkt der Kontaktwinkel einsetzen mit dem die Flüssigkeit im Innern der Kapillare anliegt. Man bekommt mit:

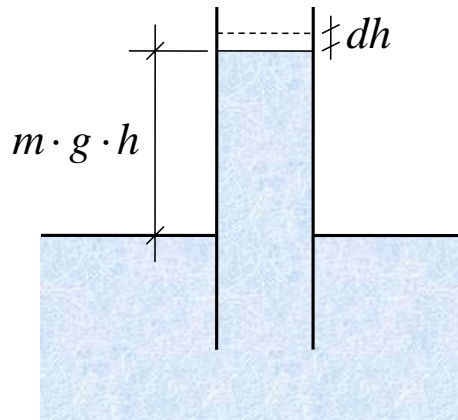


Abbildung 2.5.17: Durch ein Gleichgewicht aus Schwerkraft und Oberflächenenergie wird eine Flüssigkeit in eine Kapillare hoch gezogen.

$$\Delta E_{\text{Oberfläche}} = E_{\text{Kapillare-Luft}} - E_{\text{Kapillare-Flüssigkeit}} = \cos \Theta E_{\text{Flüssigkeit-Luft}} \quad (2.5.60)$$

den Ausdruck:

$$h = \frac{2\Delta E_{\text{Flüssigkeit-Luft}} \cos \Theta}{r\rho g} \quad (2.5.61)$$

2.5.3 Gase

Im Unterschied zu Flüssigkeiten können Gase ihr Volumen ändern und reagieren damit auf Druckänderungen. Beim Komprimieren und Expandieren eines Gasvolumens stellt man fest, dass bei gegebener konstanter Temperatur⁹ das Produkt aus Druck und Volumen konstant bleibt:

$$\boxed{pV = \text{const.}} \quad (2.5.62)$$

Dies bezeichnet man als **Boyle-Mariottesches Gesetz**. Im Unterschied zu einer Flüssigkeit ändert sich jetzt die *Dichte* ρ des Materials maßgeblich. Nachdem die Masse M in dem Gasvolumen V erhalten bleibt ($M = V\rho$) kann man äquivalent zu Gl. 2.5.62 auch schreiben:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (2.5.63)$$

⁹Das Konzept der Temperatur wird später noch explizit behandelt

Auf der Basis dieses Zusammenhangs läßt sich die Variation des Druckes mit der Höhe eines Volumenelements in der Atmosphäre beschreiben. Es sei gesucht der Druck p und die Dichte der Atmosphäre ρ an einem beliebigen Ort der Höhe h über dem Erdboden. Zunächst gilt:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (2.5.64)$$

mit p_0 und ρ_0 dem Druck und der Dichte auf der Erdoberfläche. Betrachten wir jetzt ein kleines Volumenelement in einer Höhe h . Der Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Volumenelements mit Querschnittsfläche A wird durch die Gewichtskraft pro Fläche der Luft *innerhalb* dieses Volumenelements bestimmt. Der Anteil der Gewichtskraft ist

$$dF = -\rho g dh A \quad (2.5.65)$$

Der Druckunterschied ist Kraft pro Fläche. Damit bekommt man:

$$dp = \frac{dF}{A} = -\rho g dh \quad (2.5.66)$$

mit Gl. 2.5.64 ergibt sich schließlich:

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dh \quad (2.5.67)$$

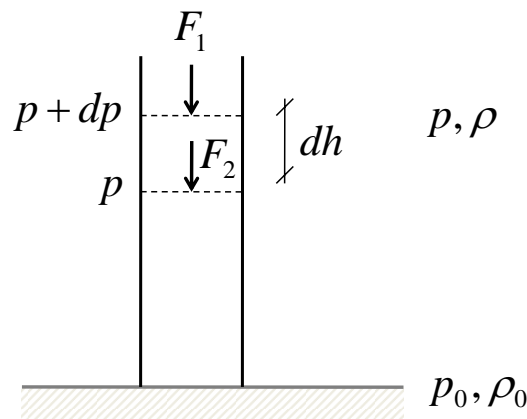


Abbildung 2.5.18: Barometrische Höhenformel.

Separation der Variablen p und h liefert:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh \quad (2.5.68)$$

Durch Integration bekommen wir:

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} gh + C \quad (2.5.69)$$

mit der Integrationskonstanten C . Mit $p(h = 0) = p_0$ bekommt man:

$$\boxed{p = p_0 e^{\frac{-\rho_0 gh}{p_0}}} \quad (2.5.70)$$

Dies bezeichnet man als **barometrische Höhenformel**. D.h. der Druck nimmt exponentiell mit der Höhe ab. Diese Formel gilt allerdings nur für *isotherme* Verhältnisse, d.h. einer konstanten Temperaturverteilung in der Atmosphäre.

2.6 Transport

Bislang hatten wir statische Körper betrachtet, seien es kompressible Medien wie Gase oder inkompressible Medien wie Flüssigkeiten oder Festkörper. In allen Medien kann zudem Transport von Teilchen stattfinden, wie es zum Beispiel beim Strömen von Flüssigkeiten und Gasen sichtbar wird. Bei diesem Transport gelten wieder Erhaltungssätze für die Teilchenzahl, den Impuls und die Energie. Diese Grundgleichungen und deren Anwendungen werden im folgenden diskutiert.

2.6.1 Teilchenerhaltung, Kontinuitätsgleichung

In jedem Medium soll die Zahl der Teilchen N bzw. die Masse der Teilchen ρV in einem Volumen V erhalten bleiben. D.h. es muß immer gelten:

$$\rho V = \text{const.} \quad (2.6.1)$$

Betrachten wir jetzt ein Medium, das durch ein Rohr mit variablem Querschnitt strömt (siehe Abb. 2.6.1). Die Menge, die durch den großen Querschnitt A_1 strömt und in einem Zeitintervall Δt die Strecke Δx_1 zurück legt, muß gleich derjenigen Menge sein, die durch den kleinen Querschnitt A_2 strömt und in dem gleichen Zeitraum die Strecke Δx_2 zurück legt. Dies läßt sich ausdrücken durch:

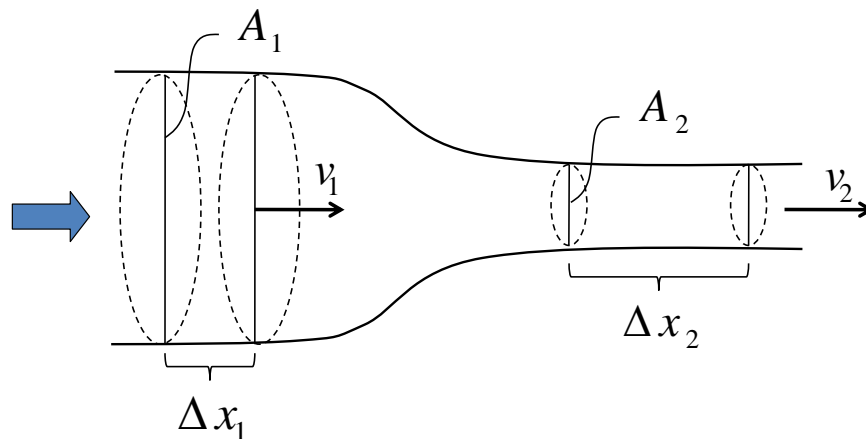


Abbildung 2.6.1: Eine Flüssigkeit ströme durch ein Rohr mit variablem Querschnitt.

$$\rho_1 A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \rho_2 A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \quad (2.6.2)$$

Die Ausdrücke $\frac{\Delta x_1}{\Delta t}$ entsprechen Geschwindigkeiten. D.h. wir bekommen:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (2.6.3)$$

Bei inkompressiblen Medien, wie zum Beispiel einer Flüssigkeit gilt $\rho_1 = \rho_2$ und wir bekommen:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (2.6.4)$$

Im allgemeinen kann sich jedoch die Dichte eines Mediums ändern. Wir führen deshalb eine **Massenflußdichte** j_{Massen} ein, die definiert ist als:

$$j_{Massen} = \rho v \quad [\text{gm}^{-2}\text{s}^{-1}] \quad (2.6.5)$$

und erhalten die allgemeine Beziehung:

$$A_1 j_1 = A_2 j_2 \quad (2.6.6)$$

Alternativ könnten wir auch die **Teilchenflußdichte** $j_{Teilchen}$ verwenden, die einfach einer Anzahl von strömenden Teilchen pro Volumen $n = N/V$ und Zeit entspricht:

$$j_{Teilchen} = nv \quad [\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}] \quad (2.6.7)$$

Neben den Teilchen- oder Massenflußdichten läßt sich auch der **Teilchenstrom** $I_{Teilchen}$ oder der **Massenstrom** I_{Massen} an Teilchen angeben zu:

$$I_{Teilchen} = j_{Teilchen} A \quad (2.6.8)$$

$$I_{Massen} = j_{Massen} A \quad (2.6.9)$$

Im folgenden wollen wir einen etwas formaleren Ansatz wählen und betrachten Teilchen, die durch ein Volumenelement $V = \Delta x^3$ hindurch strömen (siehe Abb.). Die Teilchenzahl ΔN , die in ein Volumen pro Zeit Δt hinein oder hinaus strömen ist gegeben als:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = j_{Teilchen} A \quad (2.6.10)$$

Wir teilen beide Seiten durch das Volumen V und bekommen mit der Teilchendichte $n = \frac{N}{V}$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = j_{Teilchen} \frac{A}{V} \quad (2.6.11)$$

mit $mdn = d\rho$ und $m j_{Teilchen} = j$ bekommen wir für die Strömung durch ein Volumen in x-Richtung eine Bilanz von ($A = \Delta x^2$ und $V = \Delta x^3$):

$$\frac{d\rho}{dt} = j \frac{1}{\Delta x} \quad (2.6.12)$$

Wir betrachten nun die beiden Seiten des Volumens in x-Richtung. Auf der linken Seite sei die Dichte ρ und die Geschwindigkeit v . Nachdem in Dichte und Geschwindigkeit eine räumliche Variation vorliegen kann, ist der allgemeine Ausdruck für Dichte und Geschwindigkeit auf der rechten Seite $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x$ bzw. $v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$. Um die Änderung der Dichte in dem Volumen V zu bestimmen, müssen wir die Massenflussdichten, die durch die beiden Seitenflächen treten bilanzieren. In x-Richtung bekommen wir den Ausdruck:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\Delta x} \left(v\rho - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x \right) \right) \quad (2.6.13)$$

$$= -\frac{1}{\Delta x} \left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x v}_{\frac{\partial}{\partial x}(v\rho)\Delta x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \Delta x^2}_{\Delta x^2 \ll \Delta x} \right) \quad (2.6.14)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} (v\rho) \quad (2.6.15)$$

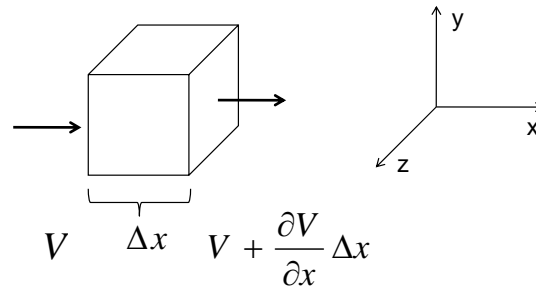


Abbildung 2.6.2: Ein Volumenelement Δx^3 wird von einem Medium durchströmt. In x-Richtung herrsche ein Gradient in Geschwindigkeit und Teilchendichte.

Nachdem auch in y- und in z-Richtung Teilchen in das Volumenelement aus und einströmen können, bekommen wir als allgemeinen Ausdruck:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho) = 0 \quad (2.6.16)$$

Dies läßt sich verkürzt als die sogenannte **Kontinuitätsgleichung** beschreiben:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{div}(\vec{v}\rho) = 0} \quad (2.6.17)$$

oder

$$\boxed{\frac{dn}{dt} + \mathbf{div}(\vec{v}n) = 0} \quad (2.6.18)$$

D.h. die Änderung der Dichte ist gegeben als sog. **Divergenz**¹⁰ der Teilchenflussdichte.

2.6.2 Energieerhaltung, Bernoulli-Gleichung

Neben der Teilchenerhaltung können wir auch die Energieerhaltung fordern. Betrachten wir zunächst wieder ein durchströmtes Rohr wie in Abb. 2.6.3 illustriert. Die Fließgeschwindigkeiten sind jeweils $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$ und $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$. Die Arbeit, um ein Flüssigkeitselement durch das Rohr zu bewegen, muß gegen den Druck p_1 geleistet werden. Die Kraft ist demnach $F_1 = p_1 A_1$. Man bekommt die Arbeit zu:

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = p_1 \Delta V_1 \quad (2.6.19)$$

mit x_1 der zurückgelegten Strecke und $V_1 = A_1 x_1$ dem verdrängten Volumen. Die Arbeit im Querschnitt A_2 ist:

$$\Delta W_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = p_2 \Delta V_2 \quad (2.6.20)$$

Diese beiden Anteile sind Änderungen in der *potentiellen Energie* der Flüssigkeit $E_{pot} = pV$ (analog zur Arbeit gegen die Gravitation $mg\Delta x$ hat man hier eine Arbeit gegen einen Druck $pA\Delta x$). Die *kinetische Energie*, die in der Bewegung der Flüssigkeit steckt ist:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \Delta V v^2 \quad (2.6.21)$$

Damit wird die Gesamtenergie, die erhalten bleiben muß, zu:

¹⁰Die Divergenz ist die räumliche Ableitung einer vektoriellen Größe, die als Ergebnis ein Skalar liefert, da die räumlichen Änderungen in alle drei Richtungen addiert werden. Zum Vergleich ist der *Gradient* (**grad**) eine räumliche Ableitung eines Skalars, das als Ergebnis einen Vektor liefert.

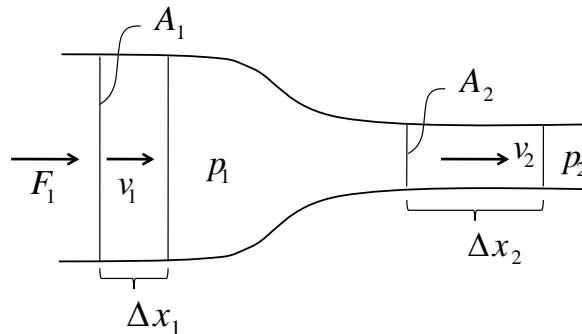


Abbildung 2.6.3: An einer Verengung ist der Druck geringer, da die Flüssigkeit schneller strömt.

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 \Delta V_2 \quad (2.6.22)$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit sind die Volumina gleich ($\Delta V_1 = \Delta V_2$) und $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ und man bekommt die sog. **Bernoulli-Gleichung**

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2} \quad (2.6.23)$$

Ein allgemeiner Fall für die Energieerhaltung läßt sich ableiten, wenn wir berücksichtigen, daß die Arbeit auch gegen die Schwerkraft geleistet werden muß, wie in Abb. 2.6.4 illustriert. Wir bekommen einen analogen Ausdruck von:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (2.6.24)$$

Obwohl die Bernoulli-Gleichung für inkompressible Medien ($\Delta V_1 = \Delta V_2$) abgeleitet wurde, gilt sie auch für Gase bei nicht zu hohen Geschwindigkeiten. Bei niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten von Gasen ist die Änderung in der Dichte und damit die Änderung der Volumina klein. Erst beim Erreichen der Schallgeschwindigkeit wird die Beschreibung der Druckverhältnisse in strömenden Gasen schwieriger. Für die Bernoulli-Gleichung existieren zahlreiche anschauliche Beispiele:

- **Hydrodynamisches Paradoxon**

Anhand dieser Gleichung läßt sich das **hydrodynamische Paradoxon** erklären (siehe Abb. 2.6.5). Betrachten wir zwei gegenüberliegende

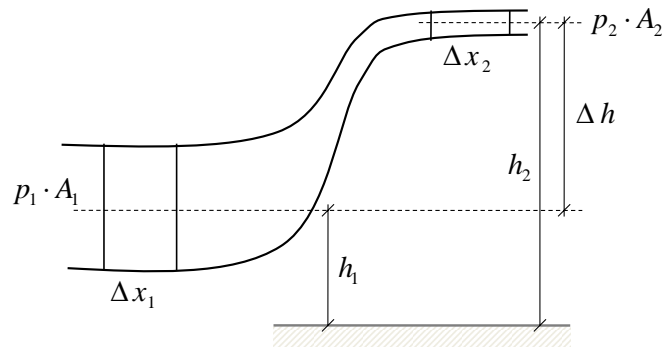


Abbildung 2.6.4: Bernoulli-Gleichung unter Berücksichtigung der Schwerkraft.

Blätter, wobei in den Spalt durch ein Rohr in einem der Blätter Luft hinein strömt. Anstatt das untere Blatt fort zu blasen, wird es angezogen. Woran liegt das? Die Luft die durch das Rohr strömt, durchläuft einen großen Querschnitt, während sie durch den Spalt zwischen den Blättern einen kleinen Querschnitt durchströmt. Dementsprechend steigt die Geschwindigkeit der Luftströmung zwischen den Blättern und der Druck sinkt. Nachdem der Außendruck höher wird als der Druck der zwischen den Blättern wirkt, werden dieses zusammengedrückt.

Nach einem ähnlichen Prinzip arbeitet auch das Anpressen von Rennwagen bei hohen Geschwindigkeit. Hier wird das Strömungsverhalten der Luft unterhalb des Rennwagens derartig beeinflusst, daß der Anpressdruck bei hohen Geschwindigkeiten groß wird.

- **Auftrieb eines Flugzeuges**

Das identische Phänomen erklärt auch den Auftrieb eines Flugzeugs. Durch die Form eines Flugzeugflügels, wird die Luft, die oberhalb über den Flügel streicht auf einen längeren Weg gezwungen (siehe Abb. 2.6.6). Dadurch muß sie *schneller* strömen, und der entsprechende Druck sinkt. Der Druck unterhalb des Flügels ist größer was den Auftrieb des Flugzeugs bewirkt. Verkehrsflugzeuge können den Krümmungsgrad ihrer Flügel aktiv beeinflussen um z.B. beim Landen trotz geringer Geschwindigkeit trotzdem eine große Auftriebskraft zu besitzen.

- **rotierender Zylinder, Magnuseffekt**

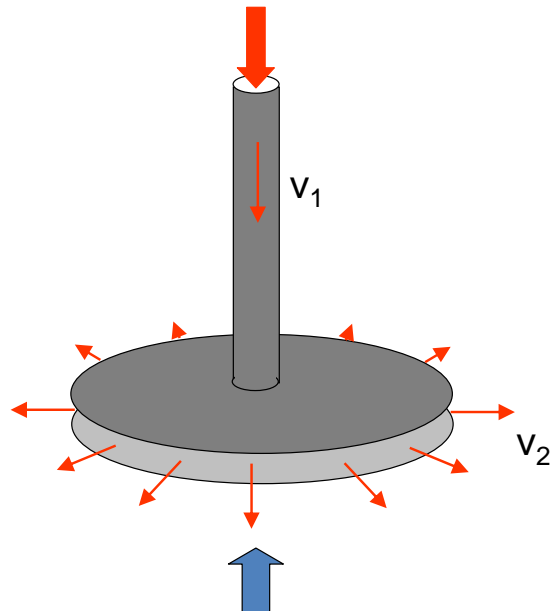


Abbildung 2.6.5: Hydrodynamisches Paradoxon: Obwohl man durch das Rohr eine Luftströmung nach unten antreibt wird die Unterlage nach oben gedrückt.

Betrachten wir einen rotierenden Zylinder, der von Luft umströmt wird. Die Reibungskraft beschleunigt Luftteilchen vor der Oberfläche in Richtung der Bahngeschwindigkeit der Oberfläche. Auf einer Seite des Zylinders addieren sich die Geschwindigkeiten der umströmenden Luft und der mitgerissenen Luft und auf der anderen Seite subtrahieren sie sich. D.h. netto sind die Geschwindigkeiten auf beiden Seiten *unterschiedlich*. Dies führt zu einem Druckunterschied, der einen Vortrieb des Zylinders zur Folge hat. Dies bezeichnet man als **Magnuseffekt**. Es gibt Versuche, diesen Effekt auch als Vortrieb für Schiffe zu nutzen.

- **Staurohr**

Um die Geschwindigkeit eines Flugzeuges relativ zur umgebenden Luft zu messen, wird ein Staurohr verwendet. In dieses Staurohr dringt Luft ein und wird dort abgebremst. Dadurch erhöht sich der Druck. Durch einen Vergleich mit dem herrschenden Aussendruck kann die Geschwindigkeit des Flugzeuges bestimmt werden.

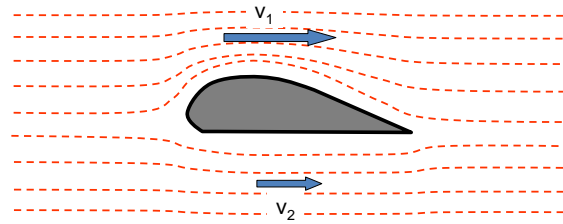


Abbildung 2.6.6: Der Auftrieb beim Flugzeug entsteht durch den Luftdruckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Flügels.

2.6.3 Impulserhaltung, Euler-Gleichung

Als letzte Gleichung betrachten wir noch die Impulserhaltung in einem Volumenelement (siehe Abb. 2.6.7). Hierzu betrachten wir eine Kraftbilanz. Vergleichen wir die Kräfte in x-Richtung, die auf ein Volumenelement wirkt, wenn der Druck auf der linken und der rechten Seite unterschiedlich sei. Wir bekommen:

$$F = pA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \right) A = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x A \quad (2.6.25)$$

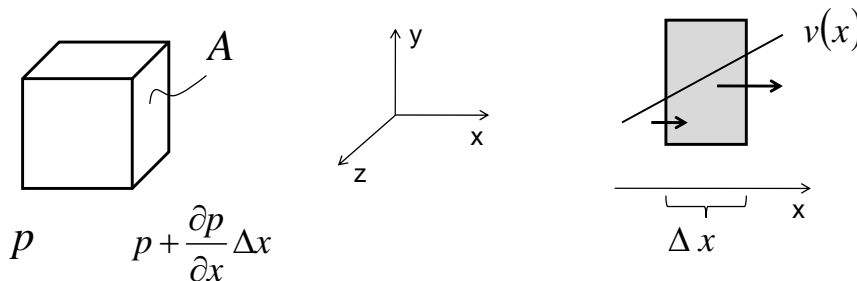


Abbildung 2.6.7: Impulserhaltung in einem Medium.

Auch diese Gleichung kann man in drei Dimensionen ausdrücken und man erhält:

$$\vec{F} = -\mathbf{grad} p dV \quad (2.6.26)$$

mit $A\Delta x = dV$. Wenn wir die wirkenden Kräfte bilanzieren, die zu einer Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ der Teilchen in einem Volumenelement führen, so erhalten wir:

$$\rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho dV \vec{g} - \mathbf{grad} p dV \quad (2.6.27)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Schwerkraft und der zweite den Einfluss eines Gradienten im Druck. Die totale Zeitableitung auf der linken Seite lässt sich umschreiben in partielle Ableitungen und man bekommt.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.6.28)$$

$$= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \quad (2.6.29)$$

Hierbei ist $(\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}$ eine verkürzte Schreibweise. Es ergibt sich schließlich die sog. **Eulergleichung** zu:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \mathbf{grad} p \quad (2.6.30)$$

Bei der Formulierung unter Benutzung der totalen Ableitung $\frac{dv}{dt}$ betrachten wir den Transport in der sog. *Lagrange-Beschreibung*, d.h. wir bewegen uns mit den Teilchen mit und berechnen die Kinematik analog zur Kinematik eines Massenpunktes. In der Formulierung der partiellen Ableitungen haben wir hingegen ein *orstfestes* Koordinatensystem und betrachten die Änderung der Geschwindigkeit der Teilchen in einem bestimmten ortsfesten Volumenelement, die durch das Hinein- bzw. Herausströmen von schnelleren bzw. langsameren Teilchen entsteht. Dies bezeichnet man als *Euler-Beschreibung*. Betrachten wir zum Beispiel eine Welle, d.h. "reiten" wir auf der Welle mit, so ändert sich die Umgebung nicht, d.h. $\frac{dv}{dt} = 0$. Wie sieht dies für einen äußeren Beobachter aus, der eine Welle *vorbei* laufen sieht:

$$0 = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot v \quad (2.6.31)$$

Für diesen gilt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \cdot v \quad (2.6.32)$$

Er beobachtet sehr wohl eine Änderung der Geschwindigkeit in dem festen Volumenelement, wobei die beobachtete Geschwindigkeit der Änderung $\frac{\partial v}{\partial t}$ proportional zur Geschwindigkeit der Welle v und zur Steilheit der Welle $\mathbf{grad} v$ ist.

2.6.4 Strömung mit Reibung

Wie ändert sich der Transport, wenn wir berücksichtigen, daß in einer Flüssigkeit **Reibung** auftreten kann. Betrachten wir dazu zunächst eine Flüssigkeit, die an einer Wand entlang strömt. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit direkt vor der Wandoberfläche muß Null sein, während sie in der Mitte der strömenden Flüssigkeit sehr hoch werden kann. D.h. wir haben einen Gradienten in der Fließgeschwindigkeit senkrecht zur Oberfläche.

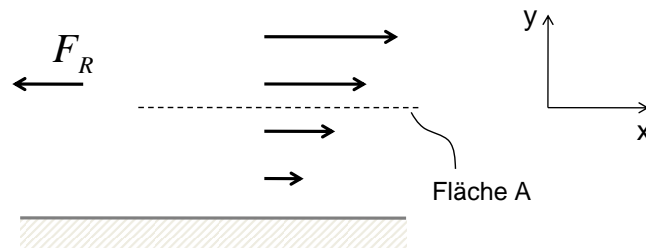


Abbildung 2.6.8: Geschwindigkeitsprofil einer strömenden Flüssigkeit vor einer Wand.

Diese unterschiedlichen Geschwindigkeiten können eine Reibungskraft erzeugen, die von dem *Unterschied* in der Geschwindigkeit abhängt. Betrachten wir eine Ebene in der Flüssigkeit mit der Fläche A parallel zur Wand (siehe Abb. 2.6.8), so kann diese Reibungskraft F_R von dem Unterschied der Fließgeschwindigkeit ober- und unterhalb dieser Ebene abhängen:

$$F_R = \eta A \left| \frac{dv}{dy} \right| \quad (2.6.33)$$

Die Proportionalitätskonstante η gibt die Größe dieser Reibungskraft an, und wird als **Viskosität** bezeichnet (Einheit von η ist [$\mathbf{Pa} \cdot \mathbf{s}$]).

Als Beispiel betrachten wir eine Flüssigkeit, die durch ein Rohr strömt (siehe Abb. 2.6.9). Die Reibungskraft an der Oberfläche eines Zylinders der Länge L und mit Radius r im Innern des Rohres, muß durch einen Druckunterschied zwischen dem Anfang des Zylinders p_1 und dem Ende des Zylinders p_2 aufgebracht werden. Dieses Kräftegleichgewicht ergibt:

$$\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} = r^2 \pi (p_1 - p_2) \quad (2.6.34)$$

Dies ist eine Gleichung für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit $v(r)$ vom Radius r . Mit der Randbedingung, daß die Geschwindigkeit an der Wand $v(r = R) = 0$ ist, ergibt sich nach der Integration:

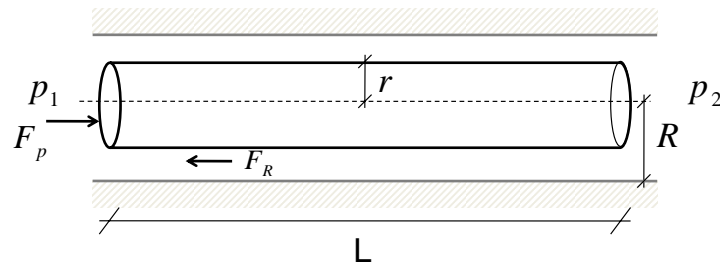


Abbildung 2.6.9: Strömungsgeschwindigkeit durch ein zylindrisches Rohr.

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (2.6.35)$$

Die Menge an Flüssigkeit, die pro Zeit durch das Rohr fließt, ist das bewegte Volumen V pro Zeit t . Das Teilvolumen dV eines kleinen Hohlzylinders mit einem Innendurchmesser r und einem Aussendurchmesser $r + dr$ bewegt sich in einer Zeit Δt um eine Strecke Δx :

$$\frac{dV}{\Delta t} = 2\pi r dr \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2\pi r dr v(r) \quad (2.6.36)$$

Dieses Volumen wird über den Radius integriert (von $v(r = R) = 0$ bis $v(R - r)$), und man bekommt schließlich das gesamte bewegte Volumen pro Zeit t :

$$\boxed{\frac{V}{t} = \int_{r=0}^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L}} \quad (2.6.37)$$

Diesen Zusammenhang bezeichnet man als das Gesetz von **Hagen-Poiseuille**. Man erkennt, daß die Durchflußmenge mit dem Radius zur *vierten* Potenz ansteigt! D.h. eine sehr kleine Änderung des Radius eines Rohres führt zu einer drastischen Erhöhung bzw. Erniedrigung der Durchflußmenge. Dies ist insbesondere wichtig für die Kontrolle des Blutstroms in unserem Körper. Schon kleinste Ablagerungen in den Blutgefäßen können die Durchflußmenge stark reduzieren. Dies kann nur kompensiert werden, wenn der Druckunterschied dementsprechend ansteigt, d.h. das Herz wird sehr stark belastet.

Die Reibung der Flüssigkeit am Übergang zu einem Festkörper führt zu einer Kraftwirkung. Auf der Basis von Gl. 2.6.33 für die Reibung zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, läßt sich die Reibung

einer Kugel mit Radius R_K , die sich mit der Geschwindigkeit v_0 durch ein Medium bewegt, berechnen (Viskosität η). Für dieses Problem erhält man schließlich die Reibungskraft, die der Bewegungsrichtung \vec{v}_0 entgegen gerichtet ist:

$$\boxed{\vec{F}_R = -6\pi\eta R_K \vec{v}_0} \quad (2.6.38)$$

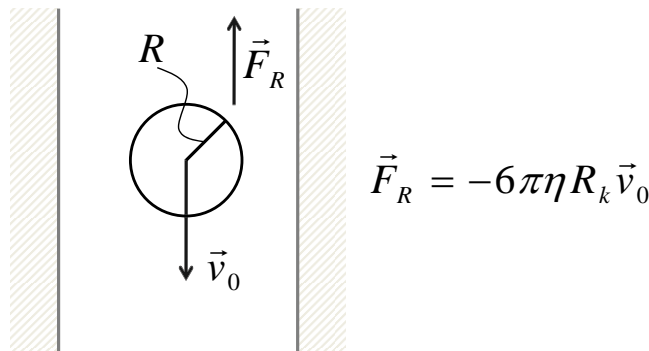


Abbildung 2.6.10: Stoke'sche Reibung.

Diese Gleichung bezeichnet man als **Stokes'sches Gesetz**. Die Reibungskraft steigt *linear* mit der Geschwindigkeit an.

2.6.5 Laminare und turbulente Strömungen

Bislang hatten wir sogenannte *laminare* Strömungen betrachtet, d.h. einer Strömung bei der sich keine Wirbel bilden. Ab einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit findet allerdings der Übergang zu einer turbulenten Strömung statt. Wie erklärt sich dies?

Betrachten wir dazu einen umströmten Zylinder, wie in Abb. 2.6.11. Im Falle einer laminaren Strömung kann die anströmende Flüssigkeit jeweils um beide Seiten des Zylinders strömen. Auf der Symmetrieachse des Zylinders, muß die Geschwindigkeit am Punkt 1 und 2 jeweils 0 sein. Nach der Bernoulli-Gleichung ist dort der Druck jeweils maximal. Geht man jetzt auf einem Weg auf der Zylinderoberfläche von 1 nach 2, so erhöht sich die Strömungsgeschwindigkeit und erniedrigt sich dann wieder (siehe Abb. 2.6.11). Bei der Strömung wird potentielle Energie (pV an 1) in kinetische Energie und wieder in potentielle Energie (pV an 2) umgewandelt.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (2.6.39)$$

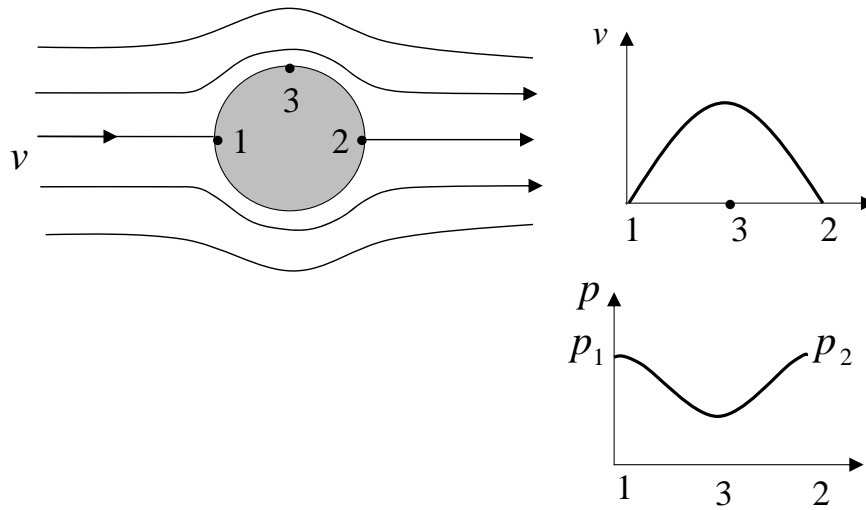


Abbildung 2.6.11: Laminare Strömung um einen Zylinder.

Ab einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit wird allerdings die Reibung in Flüssigkeit bzw. zwischen Flüssigkeit und Zylinderoberfläche wichtig. Jetzt wird ein Teil der potentiellen Energie zur Überwindung der Reibung aufgebraucht.

$$p_1 V + \frac{1}{2} \rho V v_1^2 = p_2 V + \frac{1}{2} \rho V v_2^2 + W_{\text{Reibung}} \quad (2.6.40)$$

D.h. die Geschwindigkeit der Strömung (kinetische Energie) wird schon an Punkt 2' Null (siehe Abb. 2.6.12)! Nachdem aus Symmetriegründen auch an Punkt 2 die Geschwindigkeit Null ist, erhält man ein Strömungsprofil bei dem hinter dem Zylinder, zwei **Wirbel** entstehen.

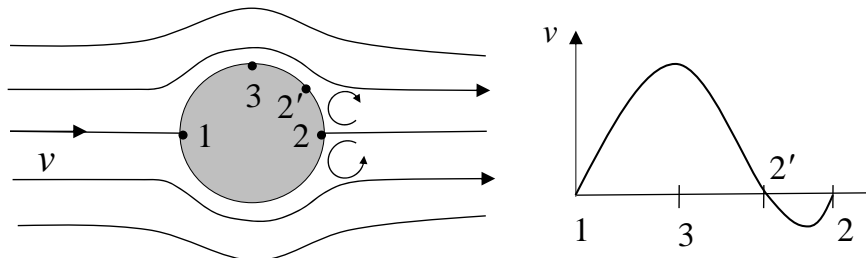


Abbildung 2.6.12: Turbulente Strömung um einen Zylinder.

Diese Wirbelbildung entspricht einem zusätzlich Strömungswiderstand, da das Medium sich hinter dem Zylinder im Mittel jetzt schneller bewegt (eben im Wirbel). Dadurch ist nach der Bernoulli-Gleichung der Druck niedriger. Eine niedrigerer Druck hinter dem Objekt führt immer zu einer bremsenden Kraft. Diese setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

- **Wirbelbildung**

Durch die Reibung entstehen hinter dem Objekt zusätzlich ein Strömungsprofil, das einen Wirbel erzeugen kann. In diesem Wirbel bewegt sich die Luft mit einer endlichen Geschwindigkeit. Aus diesem Grund ist, gemäß der Bernoulli-Gleichung, der Druck dort geringer. Durch die auftretende Geschwindigkeiten v_{hinten} des Mediums hinter dem Objekt ergibt sich ein Druckunterschied ($v_1 = 0$ am Ort 1):

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho v_{hinten}^2 \quad (2.6.41)$$

- **Druckverlust durch Überwindung der Reibung**

Potentielle Energie wird zur Überwindung der Reibung aufgewendet. Deshalb sind die Drücke p'_2 und p_2 hinter dem Objekt kleiner als p_1 vor dem Objekt. Es entsteht ein Druckunterschied gemäß:

$$p_1 V = p_2 V + W_{Reibung} \quad (2.6.42)$$

bzw.

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{Reibung} \quad (2.6.43)$$

D.h. wir bekommen insgesamt. Nach Gl. 2.6.41 ist dieser Druckunterschied auch proportional zu $\frac{1}{2}\rho v_{hinten}^2$.

Der niedrigere Druck hinter dem Objekt erzeugt ein Kraft die der Bewegung entgegen gerichtet ist.

$$F = \Delta p A \quad (2.6.44)$$

mit A dem Querschnitt des Objektes. Der genaue Betrag dieser Kraft hängt allerdings in sehr komplizierter Weise von dem Strömungsprofil ab. Die wichtigste Abhängigkeit ist die von der Geschwindigkeit des Mediums v_{hinten} hinter dem Objekt. In erster Näherung ist diese gleich der Geschwindigkeit v des Objektes selbst. Dieser Strömungswiderstand durch die Bildung von

Wirbeln wird im sogenannten c_W -Wert zusammengefasst. Die rücktreibende Kraft F ist proportional zu:

$$F = c_W \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad (2.6.45)$$

Eine Tropfenform hat zum Beispiel einen c_W -Wert von 0.06, während eine Scheibe einen c_W -Wert von 1.2 besitzt und eine Kugel von 0.4. Die rücktreibende Kraft ist hier immer proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, während sie bei der Stokes'schen Reibung direkt proportional zur Geschwindigkeit war. Letztere gilt allgemein für kleine Geschwindigkeiten und laminare Strömungen, während die quadratische Abhängigkeit gut den Strömungswiderstand durch Turbulenz beschreibt.

Die Entstehung von Wirbeln hinter einem umströmten Körper führt zu ausgedehnten räumlichen Strukturen in dem Medium. Die einzelnen Wirbel lösen sich abwechselnd von dem Körper ab und verbleiben wegen der Drehimpulserhaltung über lange Zeit stabil¹¹. Es entsteht eine sogenannte **Karman'sche Wirbelstraße**, wie in Abb. 2.6.13 illustriert. Jedes mal, wenn sich ein Wirbel ablöst, entsteht wegen der Drehimpulserhaltung ein rückstellendes Drehmoment auf das Objekt. Dies wird beim Flattern einer Fahne sichtbar, bei der sich das Fahnentuch periodisch mit dem Ablösen der einzelnen Wirbel hin und her bewegt; sie flattert.

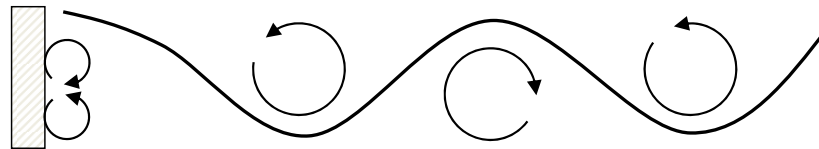


Abbildung 2.6.13: Karman'sche Wirbelstraße.

Wann entsteht jetzt der Übergang von einer laminaren in eine turbulente Strömung? Wie eingangs motiviert wurde, ist die Reibung ein entscheidender Faktor. Betrachtet man die Teilchen-, Impuls- und Energiebilanz eines strömenden Mediums, stellt man fest, daß die Strömungsmuster identisch sind, wenn die sog. **Reynoldszahl** gleich ist. Diese Reynoldszahl Re ist definiert als:

¹¹Das sich abwechselnde Ablösen von Wirbeln kann man aus einer Minimierung der Energie verstehen, da das Volumen des rotierenden Mediums hinter dem Objekt bei einem sequentiellen Ablösen klein bleibt.

$$\boxed{Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}}} \quad (2.6.46)$$

mit E_{kin} der kinetischen Energie in dem strömenden Flüssigkeitselement und $W_{Reibung}$ der Arbeit, die gegen die Reibung geleistet werden muß. Bei sehr kleinen Werten von Re ist die Strömung laminar. D.h. die Reibung dominiert und benachbarte Elemente im Medium können nicht einfach aneinander vorbei strömen. Bei sehr großen Werten von Re können sich große Geschwindigkeitsunterschiede ergeben. Der damit verbundene Unterschied in den Druckverhältnissen führt zu der Bildung von Wirbeln. Eine typische kritische Grenze für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung ist eine Reynoldszahl von ungefähr 2000.

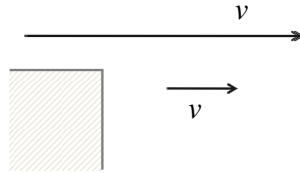


Abbildung 2.6.14: Reynoldszahl.

Die geleistete Arbeit auf einer Wegstrecke Δx gegen die Reibung ist:

$$W_{Reibung} = F\Delta x = \eta A \left| \frac{\Delta v}{\Delta y} \right| \Delta x \quad (2.6.47)$$

Die kinetische Energie, die sich über die Wegstrecke Δx um Δv in einem Volumenelement ändert ist:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\Delta v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta x^2\Delta v^2 \quad (2.6.48)$$

Daraus folgt für die Reynoldszahl mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z$:

$$Re = \frac{\rho\Delta x^2\Delta v^2}{\eta A \left| \frac{\Delta v}{\Delta y} \right| \Delta x} = \frac{\rho\Delta y\Delta v}{\eta} \quad (2.6.49)$$

D.h. für ein gegebenes Medium (ρ und η) können wir eine kritische Geschwindigkeit $\Delta v = v_c$ angeben, bei der die kritische Reynoldszahl Re_c für eine typische Abmessung des Objektes $\Delta y = L$ erreicht ist:

$$\boxed{Re_c = \frac{\rho}{\eta}Lv_c} \quad (2.6.50)$$

Bei kleinen Abmessungen L bleibt die Reynoldszahl klein und die Ausdehnung des Objektes reicht nicht für die Bildung von Wirbeln aus. Bei einer großen Ausdehnung (z.B. sehr breites Objekt) wird die Bildung von Wirbeln begünstigt.

2.6.6 Transport durch Diffusion

Bislang hatten wir den Transport durch eine Strömung betrachtet. D.h. Teilchen strömen im *makroskopischen* Sinn durch eine vorgegebene Geometrie. Allerdings existiert auch eine *mikroskopische* Möglichkeit des Transports, wenn Teilchen in einem Medium sich gemäß ihrer mittleren Geschwindigkeit bewegen. Für den Transport in eine Richtung ist es wichtig, daß sich das Teilchen über eine gewisse Strecke *frei* bewegen kann *ohne* mit anderen Teilchen zu stoßen. Falls ein Stoß auftritt, wird das Teilchen aus seiner ursprünglichen Richtung heraus gestreut und der Transportprozeß in die vorgegebene Richtung ist unterdrückt.

Betrachten wir dazu zunächst einen Strom an N Teilchen, der sich in eine feste Richtung x bewegen soll. Auf einem Weg Δx erleiden die Teilchen Stöße mit anderen Teilchen der Dichte n und werden aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt. D.h. die Zahl der Teilchen, die genau in x -Richtung strömen, verringert sich in einem Zeitraum Δt um ΔN . Diese Abnahme ist:

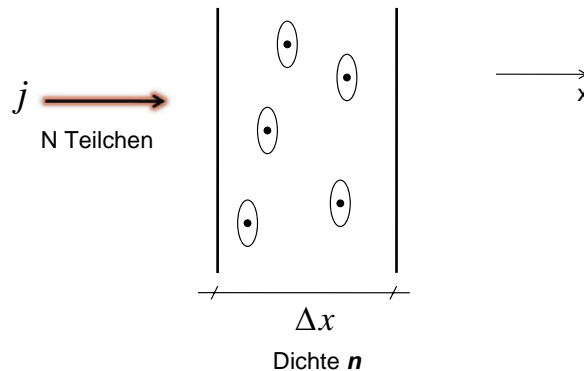


Abbildung 2.6.15: Ein Strömung j wird durch Stöße an Teilchen der Dichte n verringert.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -Nn\sigma \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.6.51)$$

σ bezeichnet den sog. **Wirkungsquerschnitt** als der "Trefferfläche" eines einzelnen Gasmoleküls¹². Daraus bekommen wir:

$$dN = -Nn\sigma dx \quad (2.6.52)$$

Diese Integralgleichung läßt sich auflösen zu:

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (2.6.53)$$

mit $N(x=0) = N_0$ und mit λ der **freien Weglänge**:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (2.6.54)$$

Für den mikroskopischen Transport betrachten wir jetzt ein Volumen mit Gasteilchen, wobei sich in einer Richtung x die Dichte n ändern soll, d.h. $\frac{dn}{dx} \neq 0$. Wir betrachten eine gedachte Fläche A senkrecht zur x -Richtung, die einen Bereich hoher Teilchendichte (n_+) von einem Bereich kleiner Teilchenzahl (n_-) trennt. Die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit durch diese Fläche gemäß Abb. 2.6.16 von links nach rechts treten ist:

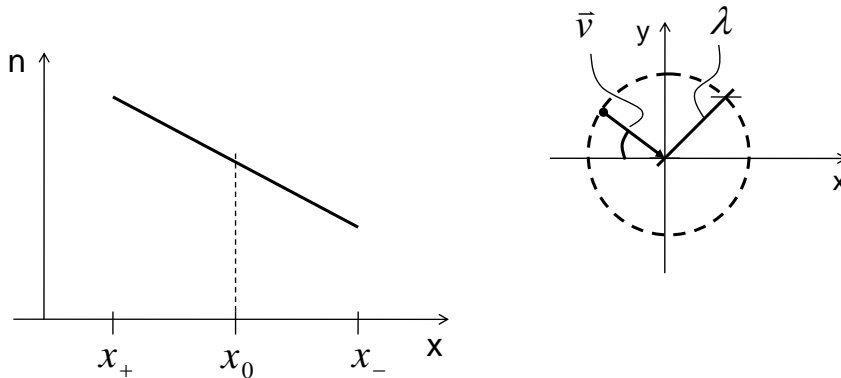


Abbildung 2.6.16: Herleitung des Diffusionskoeffizienten.

$$dN_+ = n_+ \bar{v} \cos \vartheta dt A \quad (2.6.55)$$

Der Winkel ϑ soll ausdrücken, daß die Rate des Übertritts von der Geschwindigkeit *normal* zu der gedachten Oberfläche A abhängt. \bar{v} ist der mittlere Betrag der richtungs-unabhängigen Geschwindigkeit der Gasmoleküle.

¹² σ ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen gestreut wird

Die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit durch diese Fläche von rechts nach links treten ist:

$$dN_- = n_- \bar{v} \cos \vartheta dt A \quad (2.6.56)$$

Wir bekommen als Bilanz für die Teilchenflussdichte j für den Transport in positive x-Richtung:

$$j = \left(\frac{dN_+}{dt} - \frac{dN_-}{dt} \right) \frac{1}{A} \quad (2.6.57)$$

Der Unterschied in den Teilchendichten sei gemäß Abb. 2.6.14:

$$n_+ = n_0 - \frac{dn}{dx} \Delta x \quad (2.6.58)$$

$$n_- = n_0 + \frac{dn}{dx} \Delta x \quad (2.6.59)$$

wobei n_0 , die Teilchendichte am Ort der gedachten Grenzfläche A ist. Wir bekommen:

$$j = -2\bar{v} \cos \vartheta \frac{dn}{dx} \Delta x \quad (2.6.60)$$

Wir wollen nur Teilchen betrachten, die *innerhalb ihrer freien Weglänge* diese Fläche durchtreten können, da der mikroskopische Transport nur Teilchen beschrieben soll, die sich frei bewegen können. D.h. das Volumen aus dem Teilchen aus einer bestimmten Richtung ϑ mit der Geschwindigkeit \bar{v} durch diese Fläche treten ist $A\Delta x$. Die Dicke Δx berechnet sich aus der Projektion der freien Weglänge auf die Normale der Fläche A : $\Delta x = \lambda \cos \vartheta$. Damit bekommen wir schließlich:

$$j = -2\bar{v} \cos^2 \vartheta \lambda \frac{dn}{dx} \quad (2.6.61)$$

Wir müssen jetzt über alle Raumrichtungen ϑ mitteln

$$\langle \cos^2 \vartheta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{Raumwinkel}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \frac{1}{6} \quad (2.6.62)$$

und erhalten schließlich das sog. **Fick'sche Gesetz** der Diffusion:

$$j = -\frac{1}{3} \bar{v} \lambda \frac{dn}{dx} \quad (2.6.63)$$

D.h. es findet ein Teilchentransport statt, der durch einen räumlichen Unterschied in den Teilchendichten getrieben wird. Dies bezeichnet man als **Diffusion**.

2.7 Schwingungen

In vielen Systemen der Physik spielen Schwingungen eine große Rolle. Betrachtet man zum Beispiel die Atome in einem Molekül, so sind im Gleichgewicht die Länge der Bindungen und die Bindungswinkel vorgegeben. Lenkt man diese Atome aus ihrer Gleichgewichtslage aus, so wirkt eine rückstellende Kraft. Diese rückstellende Kraft führt zu einer Oszillation der Bindung um die Gleichgewichtslage. Eine Schwingung tritt auf.

2.7.1 Der harmonische Oszillator

Betrachten wir im folgenden den einfachen Fall einer Feder an dessen Ende sich eine Masse m befindet, wie in Abb. 2.7.1 illustriert. In Ruhe sei der Ort dieser Masse $x = 0$. Wird diese Feder ausgelenkt, so wirkt eine rückstellende Kraft $F = -cx$. Wie ändert sich die Position dieser Masse, wenn wir als Anfangsbedingungen $x = 0$ aber eine Geschwindigkeit $v = \dot{x}(t = 0) = v_0$ vorgeben? Dazu schreiben wir zunächst das zweite Newton'sche Gesetz gemäß:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx \quad (2.7.1)$$

mit der Abkürzung

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad (2.7.2)$$

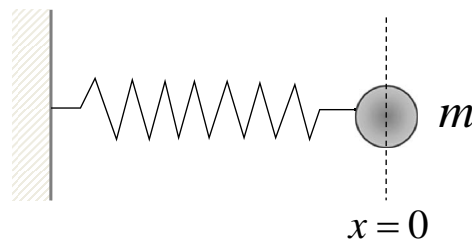


Abbildung 2.7.1: Schwingende Masse m an einer Feder.

läßt sich die Gleichung umstellen zu:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.7.3)$$

Wir wollen jetzt die *Zeitabhängigkeit* des Ortes x ermitteln. Dazu müssen wir eine Funktion $x(t)$ finden, die die Gleichung 2.7.3 erfüllt. Dies kann durch zwei Funktionen erfüllt werden:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.7.4)$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.7.5)$$

A bezeichnet die **Amplitude** der Schwingung, ω_0 die **Kreisfrequenz** und φ die **Phase**. Wir wollen eine Lösung finden für den Ansatz $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ mit den Randbedingungen $x(t=0) = 0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$. Wir bekommen für die erste und zweite Ableitung:

$$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.7.6)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.7.7)$$

Man erkennt, daß der Ansatz die Gl. 2.7.3 erfüllt. Aus der Randbedingung bekommen wir:

$$v_0 = A\omega_0 \cos \varphi \quad (2.7.8)$$

und $\varphi = 0$ für $x(0) = 0$. Damit ergibt sich $a = \frac{v_0}{\omega_0}$ und wir erhalten als Lösung:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (2.7.9)$$

Der Verlauf des Ortes und der Geschwindigkeit sind in Abb. 2.7.2 dargestellt. Bei den Orten $x = 0$ ist die Geschwindigkeit maximal, während bei maximaler Auslenkung am Umkehrpunkt $x = A$ der Schwingung die Geschwindigkeit 0 ergibt.

Man kann jede Schwingung durch eine Cosinus bzw. Sinus-Funktion darstellen, wobei man die Phase den Anfangsbedingungen entsprechend auswählt. Die Phase φ einer Schwingung ist in Abb. 2.7.3 graphisch veranschaulicht.

Die Lösung $x(t)$ läßt sich auch für das Fadenpendel ableiten. Die Komponente der Schwerkraft in Richtung der Bewegungsrichtung des ausgelenkten Pendels ist (siehe Abb. 2.7.4):

$$F = -\sin \varphi mg \quad (2.7.10)$$

Dies eingesetzt in das zweite Newton'sche Gesetz ergibt:

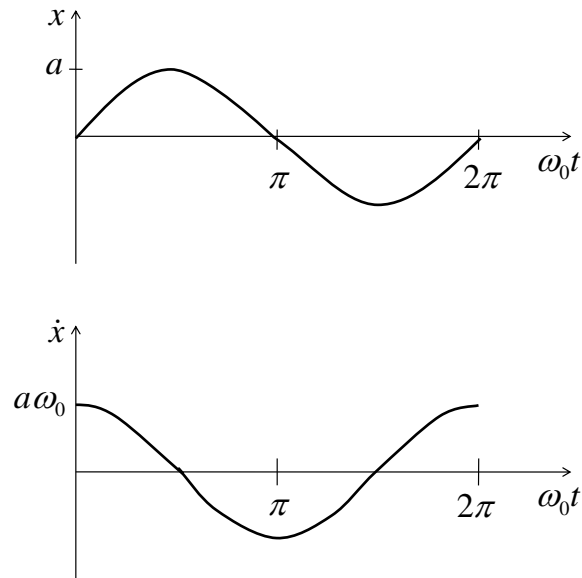


Abbildung 2.7.2: Zeitabhängigkeit von Ort x und Geschwindigkeit \dot{x} einer schwingenden Masse m .

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\sin \varphi mg \quad (2.7.11)$$

mit $x = l \sin \varphi$ ergibt sich ähnlich zu Gleichung 2.7.3 wieder:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0 \quad (2.7.12)$$

mit

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}} \quad (2.7.13)$$

Man erkennt, daß die Frequenz eines Pendels *nicht* von der Masse des Körpers abhängt, sondern nur von der Länge des Pendels.

Ein physikalisches Pendel bezeichnet den allgemeinen Fall eines beliebig geformten Körpers, der eine Pendelbewegung vollführt. Das rückstellende Drehmoment ist gegeben als:

$$D = -lmg \sin \varphi \quad (2.7.14)$$

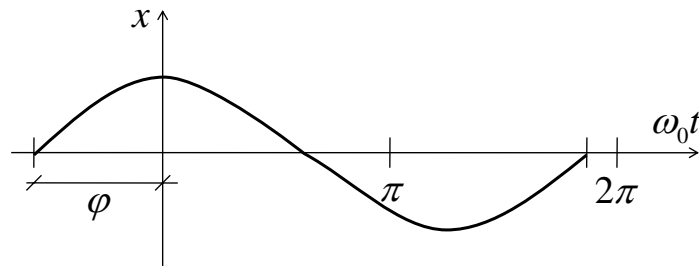


Abbildung 2.7.3: Phase einer Schwingung.

mit l des Abstandes des Schwerpunktes von der Aufhängung (=Hebelarm). Der Drehimpuls des Pendels mit Trägheitsmoment I bezüglich der Aufhängung ist:

$$L = I\omega = I \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.7.15)$$

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom für die Rotation gilt:

$$D = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.7.16)$$

Mit der Näherung $\sin \varphi \rightarrow \varphi$ gilt für kleine Winkel φ , die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \varphi \quad (2.7.17)$$

D.h. die Frequenz dieses physikalischen Pendels ist:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (2.7.18)$$

Für den einfachsten Fall einer punktförmigen Masse m ist das Trägheitsmoment $I = l^2 m$. Wir bekommen somit mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.7.19)$$

die Frequenz des einfachen Pendels.

Die Lösung der Schwingungsgleichung läßt sich auch eleganter ableiten indem man zunächst einen komplexen Ansatz wählt:

$$x(t) = ce^{i\omega_0 t} \quad (2.7.20)$$

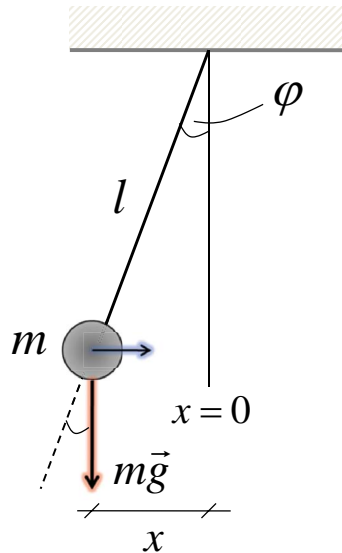


Abbildung 2.7.4: Ein Pendel führt eine harmonische Schwingung für kleine Auslenkungen durch.

Die komplexe Exponentialfunktion setzt sich aus dem Cosinus als Realteil und dem Sinus als dem Imaginärteil zusammen:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (2.7.21)$$

Umgekehrt lassen sich auch Cosinus und Sinus wiederum durch komplexe Exponentialfunktionen ausdrücken:

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (2.7.22)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad (2.7.23)$$

Bei dem Ansatz der komplexen Exponentialfunktion als Lösung einer Schwingungsgleichung beschreibt der Realteil, dann den Verlauf der Amplitude, wie in Abb. 2.7.5 illustriert ist. Der Vorteil besteht in der Tatsache, daß die Lösungen sowohl einen imaginären (einer komplexen Exponentialfunktion entsprechend Cosinus und Sinus) als auch einen reellen Anteil haben können (normale Exponentialfunktion). Dieser Ansatz vereinfacht besonders die Beschreibung gedämpfter und erzwungener Schwingungen, wie weiter unten demonstriert wird. Die Amplitude und die Phase einer Schwingungen können

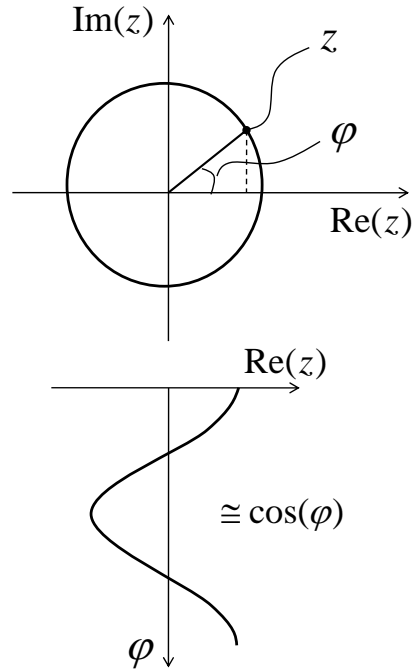


Abbildung 2.7.5: Die Lösung einer Schwingungsgleichung kann man in der komplexen Ebene darstellen.

mit dem komplexen Ansatz schnell ermittelt werden. Diese Parameter werden dann für die reellen Funktionen Cosinus oder Sinus als entsprechenden Amplitude und Phase verwendet, um den Verlauf der Schwingung im Ortsraum zu beschreiben.

Benutzen wir diesen Ansatz noch einmal für die Lösung der Schwingungsgleichung in der Form:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.7.24)$$

Wir verwenden zunächst wieder einen sehr allgemeinen Ansatz:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (2.7.25)$$

Die erste Ableitung ist:

$$x'(0) = v_0 = c_1 i\omega_0 - c_2 i\omega_0 \quad (2.7.26)$$

Aus der Randbedingung $x(t=0) = 0$ bekommen wir:

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 \quad (2.7.27)$$

D.h. $c_1 = -c_2$ und $|c_1| = |c_2| = c$. Aus $v(t = 0) = v_0$ bekommen wir:

$$\frac{v_0}{\omega_0} = 2c \quad (2.7.28)$$

Wenn wir diese Randbedingungen für die Unbekannten c_1 und c_2 einsetzen erhalten wir schließlich:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \frac{1}{2t} (e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (2.7.29)$$

Man erkennt, daß man eine identische Lösung wie Gl. 2.8.1 erhält.

2.7.2 Überlagerung von Schwingungen

Die Lösung der Schwingungsgleichung sind trigonometrische Funktionen (Cosinus, Sinus). Jede harmonische Schwingung läßt sich so darstellen. Einzelne Schwingungen lassen sich auch überlagern. Es gilt das **Superpositionsprinzip**.

- Gleiche Amplitude, gleiche Phase

Überlagert man zwei Schwingungen (Töne) der Form

$$x_1 = a \cos \omega_1 t \quad (2.7.30)$$

$$x_2 = a \cos \omega_2 t \quad (2.7.31)$$

wobei die Phasen gleich sind, sich aber die Frequenzen unterscheiden, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t \\ &= 2a \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \end{aligned} \quad (2.7.32)$$

Betrachten wir zwei Schwingungen deren Kreisfrequenz sehr nahe beieinander liegt, so ergibt die Summe ein Signal, wie es in Abb. 2.7.6 gezeigt ist. Man erkennt eine Schwingung mit ähnlicher Frequenz wie die der Einzelschwingungen, deren Intensität allerdings mit einer Einhüllenden moduliert ist. Die hohe Frequenz ist durch den Term

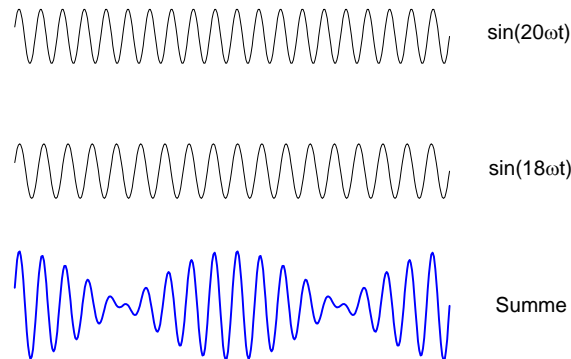


Abbildung 2.7.6: Entstehung einer Schwebung bei der Überlagerung von zwei Schwingungen.

$\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\right)$ gegeben, während die Modulation der Intensität durch den Term $\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\right)$ beschrieben wird. Im Fall einer Schallwelle kann dies hörbar gemacht werden: man nimmt einen Ton wahr, der periodisch an- und abschwillt. Dies bezeichnet man als **Schwebung**.

- Gleiche Amplitude, gleiche Frequenz, aber unterschiedliche Phase

Betrachten wir jetzt den umgekehrten Fall von zwei Schwingungen bei denen die Frequenz zwar gleich ist, sich aber die Phase unterscheidet. Wir haben zunächst:

$$x_1 = a \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (2.7.33)$$

$$x_2 = a \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2.7.34)$$

Die Überlagerung beider Schwingungen nach dem Superpositionsprinzip ergibt:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_1) + a \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2.7.35)$$

mit $\cos(\omega t + \varphi_1) = \cos(\omega t) \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1$ ergibt sich:

$$x(t) = a [\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1 + \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2]$$

$$= a [\cos \omega t (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) - \sin \omega t (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)] \quad (2.7.36)$$

mit $\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ und $\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ ergibt sich:

$$x(t) = 2a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \left[\cos \omega t \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \sin \omega t \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right] \quad (2.7.37)$$

Die maximale Amplitude der Schwingung ergibt für $\varphi_1 = \varphi_2$ gleich $2a$, d.h. die Schwingungen überlagern sich positiv, es tritt **positive Interferenz** auf. Falls die beiden Phasen um 180° bzw. um π gegeneinander verschoben sind wird die Amplitude Null. D.h. die Schwingungen löschen sich aus, es tritt **negative Interferenz** auf.

2.7.3 Die gedämpfte Schwingung

Betrachten wir jetzt den Fall, daß die Schwingung gedämpft sei. Beispiel sei eine Feder, bei der sich die Masse durch ein viskose Flüssigkeit bewegt. Nach dem Stokes'schen Gesetz (Gl. 2.6.38) ist die Dämpfung der Bewegung proportional zur Geschwindigkeit \dot{x} . D.h. die Bewegungsgleichung müssen wir um einen **Dämpfungsterm** proportional zu einer Dämpfungskonstante γ erweitern:

$$m\ddot{x} = -cx - 2\gamma m\dot{x} \quad (2.7.38)$$

bzw.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.7.39)$$

Wir verwenden jetzt eine exponentiellen Ansatz wobei die unbekanntten Faktoren c und λ jeweils komplexe Zahlen sein können:

$$x(t) = ce^{\lambda t} \quad (2.7.40)$$

Mit diesem Ansatz bekommen wir als Bestimmungsgleichung für λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.7.41)$$

mit den beiden Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (2.7.42)$$

D.h. die vollständige Lösung ist:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right] \quad (2.7.43)$$

Wir erkennen, daß durch die Wahl des Ansatzes sofort ein Anteil einer normalen Exponentialfunktion entsteht ($e^{-\gamma t}$), der die Dämpfung der Schwingungsamplitude wiedergibt. Die anderen Terme können je nach Verhältnis zwischen γ und ω_0 reell oder komplex werden. Hieran erkennt man den effizienten Weg zu einer Lösung, die durch den formalen Ansatz einer komplexen Exponentialfunktion gelingt.

Welche typische Lösungen ergeben sich jetzt für die Zeitabhängigkeit von $x(t)$. Wir können drei Fälle unterscheiden:

- $\gamma \ll \omega_0$ **schwache Dämpfung**

Falls die Dämpfung γ sehr klein gegen die Frequenz ω_0 ist, so ist ω eine reelle Zahl:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (2.7.44)$$

Damit bekommen wir für die beiden Lösungen für λ :

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega^2} = -\gamma \pm i\omega \quad (2.7.45)$$

Damit ergibt sich eine Schwingung der Form:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \right] \quad (2.7.46)$$

Aus den Anfangsbedingungen $x(0) = A_0$ und $v(0) = 0$ ergibt sich die Lösung zu:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) \quad (2.7.47)$$

Wir erhalten eine Schwingung, deren Amplitude exponentiell abnimmt, wie in Abb. 2.7.7 gezeigt.

- $\gamma \gg \omega_0$ **starke Dämpfung**

Falls die Dämpfung sehr stark ist, so können wir den Ausdruck

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \alpha \quad (2.7.48)$$

mit $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ einer reellen Zahl ausdrücken und erhalten:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}] \quad (2.7.49)$$

Falls man als Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ und $x(0) = 0$ wählt, so bekommt man die Lösung:

$$x(t) = \frac{v_0}{2\alpha} e^{-\gamma t} [e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}] \quad (2.7.50)$$

Der Verlauf $x(t)$ entspricht einem *Kriechen* der Feder, da die Amplitude sehr langsam zurück geht.

- $\gamma = \omega_0$ **aperiodischer Grenzfall**

Falls die Dämpfung γ genau gleich der Frequenz ω_0 ist, so bekommt man die Lösung:

$$\lambda = -\gamma \quad (2.7.51)$$

Man benutzt diese Randbedingung für die Lösung der Form $x(t) = c(t)e^{-\gamma t}$. Setzt man dies in die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung ein, bekommt man eine Bedingung für $\ddot{c} = 0$ und für $c = c_1 t + c_2$. Aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0$ ergibt sich die Lösung für $c_2 = 0$ und $c_1 = v_0$. Damit erhält man:

$$x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} \quad (2.7.52)$$

Der aperiodische Grenzfall entspricht der *schnellst möglichen* Rückkehr in die Gleichgewichtslage bei der kein Überschwingen des Pendels/Feder erfolgt (siehe Abb. 2.7.8). Bei jedem Stoßdämpfer ist es wesentlich, daß die Dämpfung genau so eingestellt ist, daß der aperiodische Grenzfall realisiert ist. Nur dann kehrt die Feder schnellst möglich in die Ausgangslage zurück. Ist die Dämpfung zu klein, so schwingt das System nach. Ist die Dämpfung zu groß, so kann sich z.B. der Stoßdämpfer nach der ersten Bodenwelle nicht schnell genug in die Ausgangslage zurück bewegen, um eine nachfolgende Bodenwelle gut zu absorbieren.

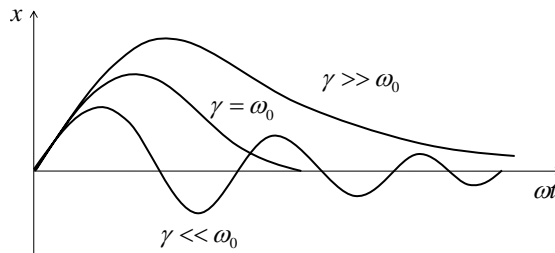


Abbildung 2.7.7: Gedämpfte Schwingung für die Randbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$: bei sehr großer Dämpfung $\gamma \gg \omega_0$ kehrt die Feder nur langsam in die Ausgangslage zurück, sie kriecht; für $\gamma = \omega_0$ kehrt die Feder schnellst möglich zurück *ohne* überzuschwingen; für $\gamma \ll \omega_0$ wird die Schwingung sehr langsam gedämpft.

2.7.4 Die erzwungene Schwingung

Ein wichtiger Fall ist die erzwungene Schwingung. Man stelle sich dazu eine Feder vor, deren Aufhängepunkt über einen Exzenter mit einer periodischen Kraft $F = F_0 \cos \omega t$ angetrieben wird (siehe Abb. 2.7.8). Die Bestimmungsgleichung ist jetzt gegeben als:

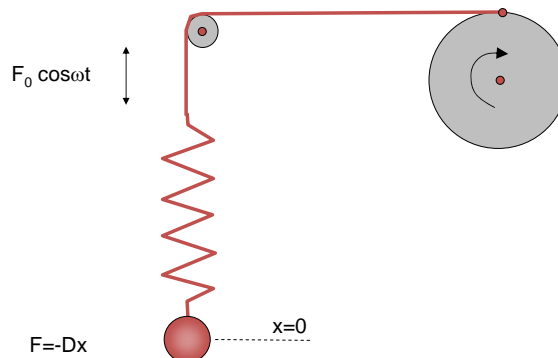


Abbildung 2.7.8: Beispiel für eine erzwungene Schwingung: eine äußere Kraft bewegt periodisch den Aufhängepunkt einer Feder.

$$m\ddot{x} = -cx - 2\gamma m\dot{x} + F_0 e^{i\omega t} \quad (2.7.53)$$

mit c der Federkonstante, γ der Dämpfung und F_0 der Amplitude der anregenden Kraft, die mit einer Frequenz ω die Bewegung der Feder moduliert.

Mit der Beschleunigung $a = F_0/m$ bekommen wir:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t} \quad (2.7.54)$$

Auch hier verwenden wir wieder den Ansatz

$$x(t) = Ae^{i\omega t} \quad (2.7.55)$$

und bekommen als Bestimmungsgleichung:

$$-\omega^2 A + 2\gamma i\omega A + \omega_0^2 A = a \quad (2.7.56)$$

Die komplexe Amplitude der Schwingung ist:

$$A = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma i\omega} = |A|e^{i\varphi} \quad (2.7.57)$$

Mit dem Realteil:

$$\Re A = \frac{a(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = |A| \cos \varphi \quad (2.7.58)$$

und dem Imaginärteil

$$\Im A = -\frac{2a\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = |A| \sin \varphi \quad (2.7.59)$$

Die Amplitude und Phase sind Funktionen sowohl der Eigenfrequenz der Feder ω_0 als auch der externen Erregerfrequenz ω . Für den Betrag der Amplitude bekommt man:

$$|A(\omega)| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (2.7.60)$$

und für die Phase bekommt man:

$$\tan \varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.7.61)$$

D.h. die Amplitude der Feder wird maximal, wenn die Frequenz mit der angeregt wird folgende Bedingung erfüllt:

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (2.7.62)$$

Dies bezeichnet man als **Resonanz**. Amplitude und Phase sind in Abb. 2.7.9 gezeigt. Man kann drei Bereiche identifizieren:

- $\omega < \omega_0$

Diese Phasenänderung läßt sich anschaulich verstehen: bei kleinen anregenden Frequenzen ω , folgt die Feder direkt der externen Erregung. Nachdem die Eigenfrequenz ω_0 sehr viel größer als ω ist, kann das System Feder beliebig schnell folgen. Die Feder läuft der externen Erregung hinterher und der Ort des Exzenters und der Ort der schwingenden Masse ändern sich jeweils in gleicher Weise, d.h. der Phasenwinkel φ ist klein.

- $\omega \simeq \omega_0$

Für $\omega \simeq \omega_0$ ist die Phase ungefähr $-\pi/2$, d.h. Erregung und Schwingung erfolgen um 90° phasen-verschoben. Die Amplitude im Bereich der Erregerfrequenz $\omega \simeq \omega_0$ ist sehr groß. Man spricht von einer **resonanten** Erregung der Feder. Bei einer Phasenverschiebung von $-\pi/2$ ist am Umkehrpunkt der Feder, die Geschwindigkeit der Erregung maximal. D.h. die Feder wird an den Umkehrpunkten durch die externe Kraft maximal beschleunigt. Dadurch schaukelt sich die Schwingung auf. Dies ist ähnlich zu dem Beschleunigen einer Schaukel, bei der ein optimaler Effekt erzielt wird, wenn diese Schaukel genau im Moment des Umkehrpunktes stark angeschoben wird.

- $\omega > \omega_0$

Für $\omega \gg \omega_0$ kann die Feder der Bewegung *nicht* mehr folgen, sie hinkt nach (negative Phase). Die Auslenkung der Feder erfolgt später als die Auslenkung des Erregers. Bei sehr hohen Frequenzen erfolgt die Bewegung genau gegenphasig. Die Amplitude der Anregung läuft gegen Null, d.h. die Feder kann der externen Anregung nicht mehr folgen. Dies wird eindrucksvoll bei Lichtwellen sichtbar: dort müssen die Elektronen, den Schwingungen des elektrischen Feldes (=der Lichtwelle) folgen. Bei sehr hohen Frequenzen ist das nicht mehr möglich. So werden viele Materialien zum Beispiel für Licht mit Frequenzen im Röntgenbereich *durchsichtig*.

Bei der erzwungenen Schwingung wird Energie durch die äußere Kraft in die Bewegung der Schwingung hinein gepumpt. Man kann zwei charakteristische Amplituden definieren. Für $\omega \rightarrow 0$ ergibt sich die Schwingungsamplitude zu:

$$|A|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{a}{\omega_0^2} \quad (2.7.63)$$

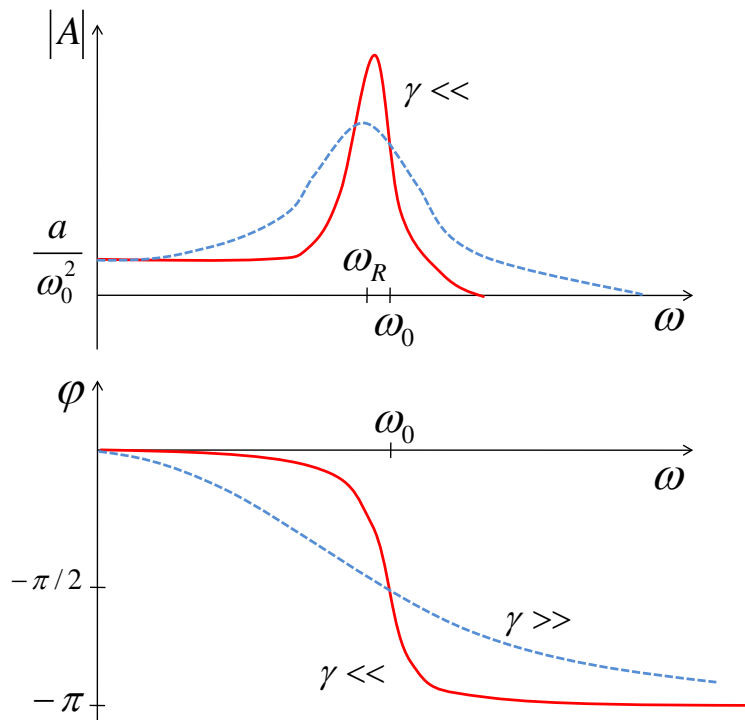


Abbildung 2.7.9: Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung.

Im Maximum für schwache Dämpfung $\gamma \ll \omega_0$ bekommt man eine Amplitude von:

$$|A|_{max.} = \frac{a}{2\gamma\omega_0} \quad (2.7.64)$$

D.h. wenn die Dämpfung sehr klein wird läuft die Amplitude der Schwingung gegen unendlich, da dem System durch die externe Kraft kontinuierlich Energie zugeführt wird. Das Verhältnis dieser beiden Amplituden bezeichnet man als **Güte** des Resonators:

$$Q = \frac{|A|_{max.}}{|A|_{\omega \rightarrow 0}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (2.7.65)$$

In vielen praktischen Fällen kann man die Schwingung selbst oft nicht beobachten. Bei der Kernspinresonanz wird zum Beispiel der Drehimpuls der Atomkerne durch eine äußere Radiofrequenzspule modifiziert. Die absorbierte Leistung in dieser Spule ist ein Maß für die Dichte der Atomkerne. Aus dieser Information wird dann das Bild rekonstruiert. D.h. in der Regel wird

eine Resonanz an Hand des Auftretens einer erhöhten Leistungsabsorption beobachtet.

Wie berechnet sich diese Leistungsabsorption? Eine Schwingung (Ort x) absorbiert eine Leistung P , die durch die externe Kraft F aufgebracht wird:

$$P = F \frac{dx}{dt} \quad (2.7.66)$$

Aus der Lösung der Schwingungsgleichung haben wir Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung schon bestimmt. Die Kraft sei gegeben als $F = F_0 \sin \omega t$. Die Schwingung selbst habe die Form $x = |A| \sin(\omega t + \varphi)$. Damit ergibt sich:

$$P = F \frac{dx}{dt} = F_0 \sin \omega t |A| \omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.7.67)$$

Mit $\cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$ bekommen wir:

$$P = F_0 |A| \omega [\cos \varphi \sin \omega t \cos \omega t - \sin \varphi \sin^2 \omega t] \quad (2.7.68)$$

mit $\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$ und $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$ bekommen wir:

$$P = F_0 |A| \omega \left[\frac{1}{2} \cos \varphi \sin 2\omega t + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos 2\omega t \right] - F_0 |A| \omega \frac{1}{2} \sin \varphi \quad (2.7.69)$$

Wenn wir über eine Periode mitteln, so fallen die Terme mit $\cos 2\omega t$ und $\sin 2\omega t$ weg. Es verbleibt:

$$\bar{P} = -F_0 |A| \omega \frac{1}{2} \sin \varphi \quad (2.7.70)$$

Wenn wir $\sin \varphi$ aus Gl. 2.7.59 einsetzen, so bekommen wir schließlich:

$$\bar{P} = F_0^2 \frac{1}{m} \gamma \omega^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad (2.7.71)$$

Die frequenz-abhängige Absorption wird als sogenannte Resonanzlinie sichtbar. Die Halbwertsbreite (Breite der Linie bei halbem Maximalwert) ist für $\gamma \ll \omega_0$ gegeben als:

$$\Delta\omega \simeq \gamma 2\sqrt{3} \quad (2.7.72)$$

Diese Resonanzeffekte werden vielfach für Filter ausgenutzt. Um zum Beispiel eine bestimmte Frequenz aus einfallenden Radiosignalen zu extrahieren, verwendet man ein schwingendes System, das durch ein Radiosignal angeregt werden kann. Falls die Resonanzfrequenz getroffen wird, schwingt das System

an, was nachfolgend von der Elektronik registriert wird. Falls die Frequenz des Radiosignals das System nicht anregen kann, bleibt der Empfänger stumm. Die Güte eines solchen schwingenden Systems wird durch die Breite der Resonanzlinie definiert. Ist die Güte sehr hoch, d.h. die Resonanzlinie sehr scharf, so kann ein Filter einen kleinen Bereich in einem Frequenzspektrum heraus trennen.

2.7.5 Gekoppelte Oszillatoren

In der Natur treten Oszillatoren in der Regel nicht isoliert auf. Betrachten wir zum Beispiel eine Kette von Atomen in einem Festkörper so wird die Auslenkung eines Atoms in der Kette auf die anderen übertragen. Betrachten wir dazu den einfachstem Fall zweier gekoppelter Oszillatoren. Die Auslenkungen x_1 und x_2 sind gemäß Abb. 2.7.10 gegeben als:

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 - c(x_1 - x_2) \quad (2.7.73)$$

$$m\ddot{x}_2 = -cx_2 - c(x_2 - x_1) \quad (2.7.74)$$

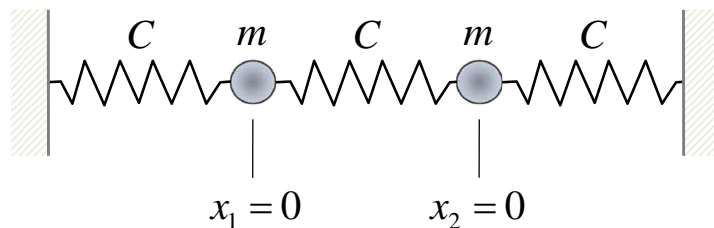


Abbildung 2.7.10: Gekoppelte Oszillatoren.

Diese gekoppelten Differentialgleichungen lassen sich vereinfachen, wenn man einerseits die Differenz und andererseits die Summe bildet:

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -c(x_1 + x_2) \quad (2.7.75)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -c(x_1 - x_2) - 2c(x_1 - x_2) = -3c(x_1 - x_2) \quad (2.7.76)$$

Mit der Substitution $a = x_1 + x_2$ und $b = x_1 - x_2$ bekommen wir zwei entkoppelte Differentialgleichungen:

$$m\ddot{a} = -ca \quad (2.7.77)$$

$$m\ddot{b} = -3cb \quad (2.7.78)$$

mit den Lösungen:

$$a = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (2.7.79)$$

$$b = A \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (2.7.80)$$

Daraus läßt sich ursprüngliche Lösung wieder konstruieren, und wir bekommen:

$$x_1 = \frac{1}{2}(a + b) = A \frac{1}{2} (\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)) \quad (2.7.81)$$

bzw.

$$x_1 = A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (2.7.82)$$

Man erkennt, daß man für die Auslenkung am Ort x_1 eine Art *Schwebung* bekommt. Die Amplitude der Schwingung bei $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ schwillt an und wieder ab. Gegenphasig dazu steigt die Amplitude x_2 und sinkt wieder. D.h. die Energie der Schwingung oszilliert zwischen der maximalen Amplitude x_1 und der maximalen Amplitude x_2

2.8 Wellen

Schwingungen beschreiben die zeitliche Entwicklung einer Oszillation. Hat man allerdings eine lokale Quelle, die ein umgebendes Medium anregt, so kann sich diese Schwingung auch räumlich ausbreiten. Eine Welle entsteht.

2.8.1 Ausbreitung von Wellen

Die Ausbreitung von Wellen läßt sich an Abb. 2.8.1 verdeutlichen. Beginnt man ein Seil zu einem Zeitpunkt $t = 0$ periodisch zu bewegen, so pflanzt sich diese Schwingung auf dem Seil fort. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Wellenberges bezeichnet man als **Phasengeschwindigkeit** v_{Phase} .

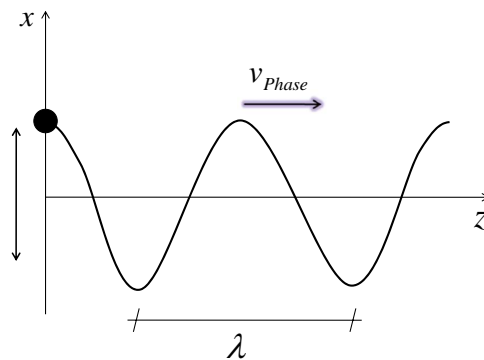


Abbildung 2.8.1: Ausbreitung einer Schwingung auf einem Seil.

Die Tatsache, daß diese Welle sich mit der Zeit t mit einer Geschwindigkeit v_{phase} ausbreitet, läßt sich durch den Ansatz

$$x(z, t) = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v_{Phase}} \right) \right] \quad (2.8.1)$$

beschreiben. Wie erklärt sich diese Phasengeschwindigkeit? Betrachten wir dazu einen Beobachter, der sich mit der Phasengeschwindigkeit mit der Welle mit bewegt (wie ein Surfer auf einer Wasserwelle). Der Ort dieses Surfers ändert sich somit wie:

$$z_{surfer} = v_{Phase} t \quad (2.8.2)$$

Setzt man dies in 2.8.1 ein, so erkennt man, daß $x(z_{Surfer}, t) = const.$ wird. D.h. die Amplitude am Ort dieses Surfers ändert sich *nicht*, er reitet auf der Welle.

Die Gleichung 2.8.1 beschreibt die Amplitude x als eine Funktion von Zeit und Ort. Den räumliche Abstand zwischen zwei Orten mit einem Phasenunterschied von 2π bezeichnet man als **Wellenlänge** λ :

$$\omega \left(t - \frac{z_2}{v_{Phase}} \right) - \omega \left(t - \frac{z_1}{v_{Phase}} \right) = 2\pi \quad (2.8.3)$$

mit $z_2 - z_1 = \lambda$ erhält man somit:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v_{Phase}} \quad (2.8.4)$$

ω war die sog. **Kreisfrequenz**, d.h. die Änderung des Winkels pro Zeit. Die **Frequenz** f ist die Zahl der Schwingungen pro Sekunde:

$$\boxed{2\pi f = \omega} \quad (2.8.5)$$

Nach Gl. 2.8.4 ergibt sich der Zusammenhang:

$$\boxed{f = \frac{v_{Phase}}{\lambda}} \quad (2.8.6)$$

Gl. 2.8.1 läßt sich somit kompakt schreiben als:

$$x(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad (2.8.7)$$

mit k der sog. **Wellenzahl**.

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad (2.8.8)$$

Man unterscheidet **longitudinale** und **transversale Wellen**: bei longitudinalen Wellen erfolgt die Auslenkung in Richtung der Wellenausbreitung, während bei transversalen Wellen die Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung erfolgt. Dies ist in Abb. 2.8.2 veranschaulicht.

2.8.2 Die Wellengleichung

Wie berechnet sich jetzt die Ausbreitung einer Welle in einem beliebigen Medium? Betrachten wir dazu zunächst die allgemeine Form der Amplitude an einem Ort z zu einem Zeitpunkt t . Diese sei durch eine nicht näher definierte Funktion f gegeben. Aus dem allgemeinen Verhalten einer Welle, wie oben erläutert, können wir sofort schließen, daß das Argument dieser Funktion $f(u)$ der Form $u = z - vt$ sein muß (für einen "Surfer" mit $z = vt$ muß $f = \text{const.}$ gelten). Es gilt somit:

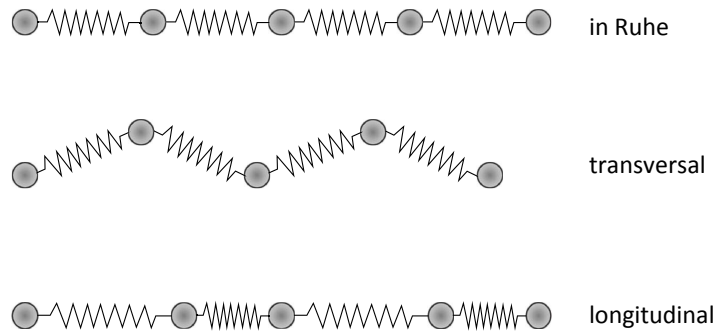


Abbildung 2.8.2: Transversal- und Longitudinalwellen.

$$x(z, t) = f(u) = f(z - vt) \quad (2.8.9)$$

Die zeitliche Ableitung dieser Amplitude ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{du} \frac{du}{dt} = -v \frac{df}{du} \quad (2.8.10)$$

bzw. die zweite Ableitung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -v \frac{d^2f}{du^2} \frac{du}{dt} = v^2 \frac{d^2f}{du^2} \quad (2.8.11)$$

Analog zur zeitlichen Ableitung läßt sich auch die räumliche Ableitung bilden:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{df}{du} \frac{du}{dz} = \frac{df}{du} \quad (2.8.12)$$

Die zweite Ableitung liefert.

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{d^2f}{du^2} \frac{du}{dz} = \frac{d^2f}{du^2} \quad (2.8.13)$$

Vergleicht man jetzt Gl. 2.8.11 und Gl. 2.8.13, so erkennt man folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = v^2 \frac{d^2x}{dz^2}} \quad (2.8.14)$$

Diese Gleichung bezeichnet man als **Wellengleichung**, die sich anschaulich am Beispiel unserer Seilwelle beschreiben läßt. Die zweite Ableitung $\frac{d^2x}{dz^2}$ entspricht der Krümmung des Seils, wie zum Beispiel die Auslenkung x am

Ort einer Seilschleife (siehe Abb. 2.8.3). Pflanzte sich diese Seilschleife mit der Geschwindigkeit v nach rechts fort, so wird ein benachbarter Ort auf dem Seil beschleunigt ($\frac{d^2x}{dt^2}$). Hierbei ist eine endliche *Krümmung* (zweite Ableitung) wichtig. Eine endliche erste Ableitung $\frac{dx}{dz}$ entspräche nur einer *gleichmäßigen* Erhöhung der Amplitude an einem Ort z , aber keiner Beschleunigung. Die Beschleunigung an einem Ort z ist umso größer je schneller sich die Welle in z -Richtung bewegt. Dies erklärt die Proportionalität zur Phasengeschwindigkeit v_{Phase} .

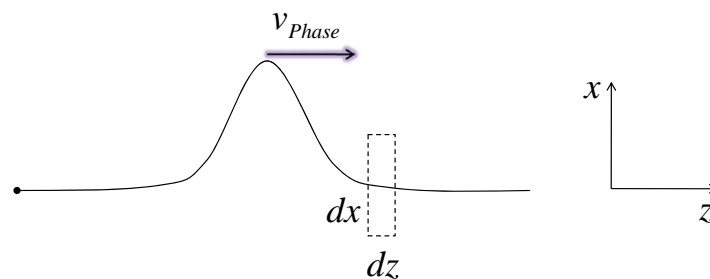


Abbildung 2.8.3: Ausbreitung einer Auslenkung z in Zeit und Ort.

In vielen praktischen Anwendungen muß diese Wellengleichung für die Ausbreitung von Wellen in unterschiedlichen Medien gelöst werden. Dies soll an drei Beispielen erläutert werden:

- **Seilschleife, transversale Welle**

Betrachten wir eine Seilschleife, die sich mit der Phasengeschwindigkeit v ausbreitet, wie in Abb. 2.8.4 gezeigt. Die Phasengeschwindigkeit dieser transversalen Welle läßt sich aus einer einfachen Kraftbilanz ableiten. Wir gehen in ein bewegtes Bezugssystem, das sich mit v bewegt. D.h. die Seilschleife bleibt ortsfest und das Seil bewegt sich mit $-v$ durch einen gekrümmten Bereich mit Krümmungsradius R hindurch. Die Zugspannung σ versucht das Seil gerade zu ziehen, während die Zentrifugalkraft die Seilschleife aufrecht erhält. Bei einem Krümmungsradius R ist die Zugkraft gegeben als:

$$F_{Zugspannung} = 2\sigma A \sin \Theta \quad (2.8.15)$$

Nur die Komponente $\sigma \sin \Theta$ der Zugspannung wirkt der Auslenkung entgegen. Die Querschnittsfläche des Seils sei A . Gemäß Abb. 2.8.4 ist der Winkel Θ mit der Länge Δl verknüpft wie:

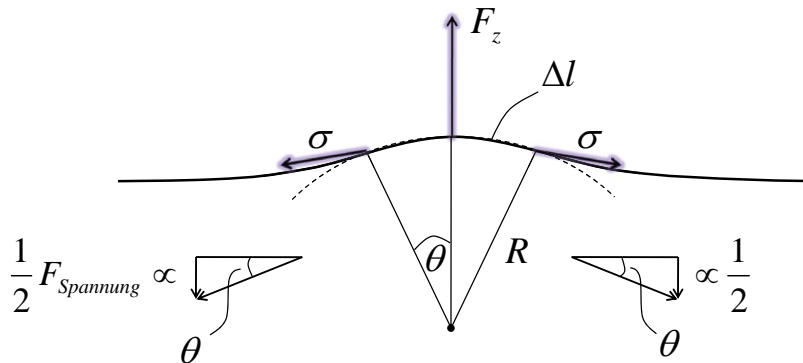


Abbildung 2.8.4: Auslenkung eines Seilstückes einer Seilwelle, die sich mit v ausbreitet.

$$\frac{\Delta l}{2} \frac{1}{R} = \sin \Theta \quad (2.8.16)$$

D.h wir bekommen:

$$F_{\text{Zugspannung}} = \sigma A \frac{\Delta l}{R} \quad (2.8.17)$$

Diese Kraft ist im Gleichgewicht mit der Zentrifugalkraft:

$$F_{\text{Zentrifugal}} = \Delta m \frac{v^2}{R} = \rho A \Delta l \frac{v^2}{R} \quad (2.8.18)$$

mit ρ der Dichte des Seils. Wir bekommen somit aus dem Vergleich von Gl. 2.8.17 und 2.8.18 die Phasengeschwindigkeit zu:

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (2.8.19)$$

D.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist proportional zur Wurzel aus der Zugspannung. Man bemerke, daß die Phasengeschwindigkeit dieser transversalen Welle *nicht* von den elastischen Eigenschaften des Seils abhängt.

- **Dichtewelle in einem Festkörper, longitudinale Welle**

Eine longitudinalen Welle bei der sich die Dichte in dem Medium periodisch ändert, bezeichnet man generell als **Schallwelle**. Es sei ein Material gegeben, durch das eine ebene Dichtewelle in z -Richtung läuft (siehe Abb. 2.8.5). In einem Volumenelement der Ausdehnung dz herrscht links und rechts ein unterschiedliche Druckspannung σ , die zu einer Auslenkung einer Schicht des Mediums um dx führt. Die Änderung der Kraft dF über eine Länge dz ist

$$dF = A(\sigma + d\sigma) - A\sigma = Ad\sigma \quad (2.8.20)$$

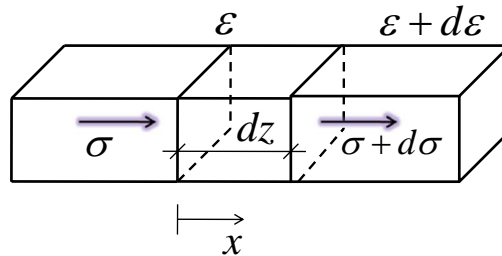


Abbildung 2.8.5: Ausbreitung einer Schallwelle in einem Medium.

Die Druckspannung ist mit den elastischen Eigenschaften des Mediums verknüpft. Die relative Längenänderung ist $\epsilon = \frac{dx}{dz}$. Mit $\sigma = \epsilon E = E \frac{dx}{dz}$ ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{dz} = E \frac{d^2x}{dz^2} \quad (2.8.21)$$

D.h. die Kraft dF ergibt sich aus:

$$dF = AE \frac{d^2x}{dz^2} dz \quad (2.8.22)$$

Diese Kraft führt zu einer Beschleunigung einer Masse dm im Volumenelement Adz :

$$dF = dm \frac{d^2x}{dt^2} = \rho \frac{d^2x}{dt^2} dV = \rho Adz \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.8.23)$$

Vergleichen wir Gl.2.8.22 und 2.8.23, so erkennen wir als Wellengleichung wieder:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{v^2} \frac{d^2x}{dz^2} \quad (2.8.24)$$

Aus dem Vergleich mit Gl. 2.8.14, bekommt man als Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle:

$$v_{Phase} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.8.25)$$

Man erkennt, daß die longitudinale Welle im Unterschied zu der transversalen von den elastischen Eigenschaften (gegeben durch E) des Materials abhängt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Schallwelle in einem Material wird ausgenutzt, um dessen elastische Eigenschaften zu bestimmen. Hierzu wird über eine Anregung mittels Laser oder Piezoelementen eine Schallwelle erzeugt und die Laufzeit dieser Welle gemessen. Mit bekannter Dichte des Materials läßt sich damit das Elastizitätsmodul (sogar richtungsabhängig) ermitteln.

- **Dichtewelle in einem Gas**

Eine longitudinale Welle in einem Gas entspricht einer räumlichen und zeitlichen Änderung des Luftdrucks. Dies nehmen wir als Ton wahr. Die rückstellende Kraft in benachbarten Volumenelementen ist in Analogie zu Gl. 2.8.20 immer:

$$dF = (p + dp)A - pA = Adp \quad (2.8.26)$$

In Analogie zu der Ableitung der Schallwelle in einem Festkörper ergibt sich dann eine Phasengeschwindigkeit in einem Gas von:

$$v_{Phase} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (2.8.27)$$

mit p dem Druck und ρ der Dichte des Gases. Reduziert man zum Beispiel die Dichte des Mediums (Schallausbreitung in Helium statt in Luft), so wird die Phasengeschwindigkeit höher, und die Dichteschwankungen erreichen schneller unser Ohr. Dies nehmen wir als höhere Frequenz wahr.

2.8.3 Energiedichte einer Welle

Für das Wahrnehmen von Wellen ist deren Intensität maßgeblich. Um die Intensität einer Welle zu bestimmen, beginnen wir zunächst mit der Beschreibung einer Welle gemäß:

$$x = A \sin(\omega t - kz) \quad (2.8.28)$$

Die Intensität einer Welle ist der Transport von Energie mit der Phasengeschwindigkeit. Die Energie der Welle besteht aus zwei Beiträgen, der potentiellen und der kinetischen Energie:

- **kinetische Energie**

Die kinetische Energie, die durch die Geschwindigkeit \dot{x} festgelegt ist, ist gegeben als:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \Delta m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad (2.8.29)$$

Für die Intensität ist die zeitlich gemittelte Energie maßgeblich. Die zeitliche Mittelung über eine Periode von $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle$ ergibt den Faktor $1/2$. Damit bekommt man:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{4} \Delta m A^2 \omega^2 \quad (2.8.30)$$

- **potentielle Energie**

Die potentielle Energie, die in der Schwingung steckt ist gegeben durch die Arbeit, die gegen die rückstellende Kraft geleistet wird ($F = -cx$). Mit $E_{pot} = -\int F dx$ bekommt man für die potentielle Energie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} cx^2 = \frac{1}{2} c A^2 \sin^2(\omega t - kz) \quad (2.8.31)$$

Auch hier wird das zeitliche Mittel benötigt mit $\langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$. Mit $\omega^2 = \frac{c}{\Delta m}$ bekommen wir:

$$\langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{4} \Delta m A^2 \omega^2 \quad (2.8.32)$$

Man erhält somit für die Gesamtenergie der Welle:

$$\langle E \rangle = \langle E_{pot} \rangle + \langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} \Delta m A^2 \omega^2 \quad (2.8.33)$$

Die Intensität pro Fläche ist die Energie, die sich in der Welle pro Volumen mal der Phasengeschwindigkeit v_{phase} ausbreitet. Damit bekommt man mit $\Delta m = \rho \Delta V$:

$$I = \frac{E}{\Delta V} v_{Phase} = \frac{1}{2} v_{Phase} \rho A^2 \omega^2 \quad (2.8.34)$$

D.h. die Intensität nimmt mit dem Quadrat der Amplitude A und der Frequenz ω zu. Diese Formel beschreibt zum Beispiel auch die Intensität von Schallwellen. Schallwellen sind longitudinale Druckschwankungen δp in einem Medium mit dem Druck p . Die Intensität dieser Welle I skaliert wie δp^2 . Man definiert damit den sogenannten Schalldruckpegel L_p als dimensionslose Zahl wie:

$$L_p = 10 \log \frac{\delta p^2}{p^2} \quad [\text{dB}] \quad (2.8.35)$$

Das ist zu unterscheiden von der so genannten **Lautstärke** in der Einheit **Dezibel dB**, die den Bezug zur menschlichen *Hörschwelle* definiert:

$$\text{Lautstärke} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad [\text{dB}] \quad (2.8.36)$$

Diese Hörschwelle ist abhängig von der Frequenz und liegt bei 1 kHz bei einer Intensität von $I_0 \sim 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$ liegt. Das menschliche Gehör kann Frequenzen von 16 Hz bis zu 16 kHz wahrnehmen und wird von Lautstärken bis 100 dB gerade noch nicht dauerhaft geschädigt. Allerdings werden Geräusche unterschiedlicher Frequenz unterschiedlich laut wahrgenommen. Diese *empfundene* Lautstärke ist in Abbildung 2.8.6 gezeigt. Man erkennt, daß insbesondere im Bereich um 1000 Hz, also der normalen Tonlage des Sprechens (Kammerton **a** entspricht 440 Hz), die wahre Lautstärke und die empfundene ungefähr gleich sind. Nur sehr tiefe und sehr hohe Töne werden als sehr viel lauter registriert.

2.8.4 Überlagerung von Wellen

Für Wellen gilt das Superpositionsprinzip. Falls man mehrere Quellen hat, so können die einzelnen Wellen überlagert werden und ergeben in der Summe das sich ausbreitende Wellenmuster oder Wellenbild. Dies sei im folgenden an zwei Beispielen illustriert.

Eindimensional

Betrachten wir im eindimensionalen zwei Wellen, die mit unterschiedlicher Frequenz ω und Wellenlänge bzw. Wellenzahl k sich in z -Richtung ausbreiten.

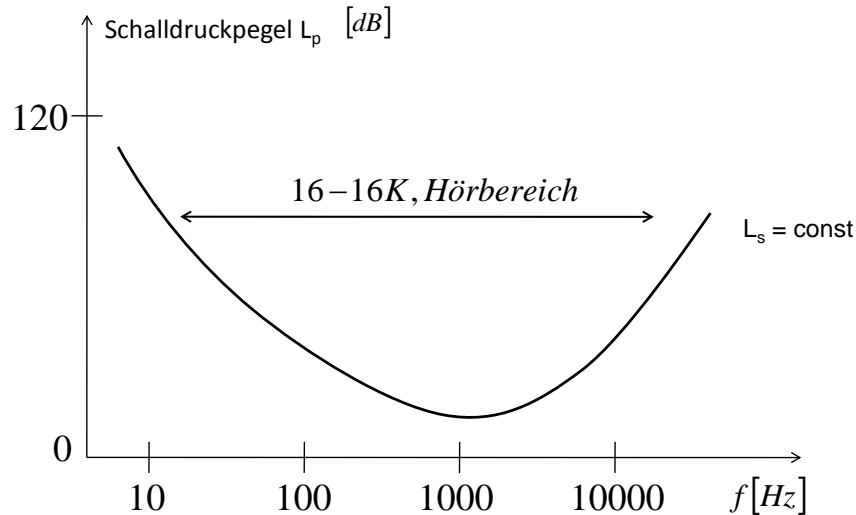


Abbildung 2.8.6: Schalldruckpegel L_p in Dezibel im Vergleich zu einer Kurve konstanter Lautstärke L_s in Abhängigkeit von der Frequenz.

Die Phasen seien dabei identisch und zu Null gesetzt:

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) \quad (2.8.37)$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 z) \quad (2.8.38)$$

Die Überlagerung ergibt:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right) \cos(\omega_m t - k_m z) \quad (2.8.39)$$

Es entsteht eine Art Schwebung wobei die Welle selbst sich mit der Phasengeschwindigkeit $v_{Phase} = \frac{\omega_m}{k_m}$ mit der Frequenz $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2) \frac{1}{2}$ und der Wellenlänge $k_m = (k_1 + k_2) \frac{1}{2}$ ausbreitet. Dieser Wellenzug wird aber von einer Einhüllenden begrenzt, die die Amplitude gemäß $\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}z\right)$ moduliert. Die Maxima der Einhüllenden bewegen sich mit der sog. **Gruppengeschwindigkeit** $v_{Gruppe} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ in z -Richtung fort (siehe Abb. 2.8.7). Für den allgemeinen Fall kleiner Unterschiede in Frequenz und Wellenzahl wird aus $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$. Demnach ist die Gruppengeschwindigkeit genau die *Ableitung* der Frequenz nach der Wellenzahl:

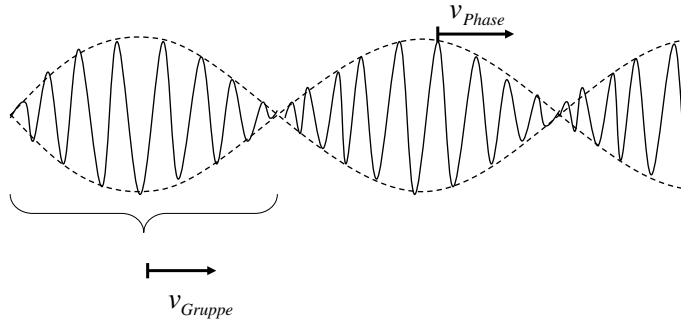


Abbildung 2.8.7: Gruppen- und Phasengeschwindigkeit.

$$v_{\text{Gruppe}} = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.8.40)$$

Diese Gruppengeschwindigkeit kann sich grundsätzlich von der **Phasengeschwindigkeit** unterscheiden. Die Phasengeschwindigkeit war:

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} \quad (2.8.41)$$

Zwischen der Gruppen- und Phasengeschwindigkeit herrscht der Zusammenhang:

$$v_{\text{Gruppe}} = \frac{d}{dk}(v_{\text{Phase}}k) = v_{\text{Phase}} + k \frac{dv_{\text{Phase}}}{dk} \quad (2.8.42)$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$ ergibt sich:

$$v_{\text{Gruppe}} = v_{\text{Phase}} - \lambda \frac{dv_{\text{Phase}}}{d\lambda} \quad (2.8.43)$$

D.h. falls die Phasengeschwindigkeit sich mit der Wellenlänge ändert, so unterscheiden sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Man spricht von **Dispersion** (für lateinisch *Abweichung*). Diese Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge tritt grundsätzlich bei Wellen in Medien auf. Nur bei Lichtwellen im Vakuum tritt keine Dispersion auf, da hier die Phasengeschwindigkeit immer die Lichtgeschwindigkeit ist.

Beliebige Wellen müssen nicht grundsätzlich sinus- oder cosinus-förmig sein, da sich *jede* Wellenform als Superposition von trigonometrischen Funktionen darstellen läßt. Ein Funktion, die man gemäß der Vorschrift

$$x(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\phi_n - nk_0 z) \quad (2.8.44)$$

konstruiert wird immer eine gültige Lösung der Wellengleichung darstellen. ϕ_n bezeichnet die Phase der Komponente n . Falls man die zeitliche Entwicklung der Amplitude einer Welle an einem bestimmten Ort benötigt läßt sich analog zu obiger Gleichung auch eine allgemeine Form konstruieren:

$$x(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t - \Psi_n) \quad (2.8.45)$$

Ψ_n bezeichnet die Phase der Komponente n . Dieses Superpositionsprinzip kann auch kontinuierlich formuliert werden und man bekommt:

$$\boxed{x(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega} \quad (2.8.46)$$

Diese Abbildung läßt sich umkehren und das **Frequenzspektrum** $A(\omega)$ bekommt man bei bekannter zeitlicher Entwicklung der Amplitude $x(t)$ aus:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i(\omega t - kz)} dt \quad (2.8.47)$$

Die Rechenvorschriften 2.8.46 und 2.8.47 bezeichnet man als **Fourier-Transformation**. Insbesondere Gl 2.8.47 bezeichnet man als **Frequenzanalyse** eines gegebenen Signals.

Mehr-Dimensional

Die Überlagerung von Wellen gilt allerdings nicht nur im eindimensionalen. Will man die räumliche Ausbreitung von Wellen beschreiben, läßt sich die Richtung der Welle formal durch einen **Wellenvektor** darstellen, wie in Abb. 2.8.8 illustriert.

Wollen wir zum Beispiel die Amplitude einer Welle, die vom Koordinatenursprung in eine Richtung \vec{k} ausgeht, an einem Ort \vec{r} wissen, berechnet sich die Phase aus:

$$|k||r| \cos \alpha = \vec{k}\vec{r} \quad (2.8.48)$$

Betrachten wir jetzt zwei Quellen von denen ebene Wellen, die die gleiche Frequenz besitzen aber unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen \vec{k} und Phasen φ besitzen. Wir suchen die Amplitude am Ort \vec{r} gemäß Abb. 2.8.9. Die beiden Amplituden sind.

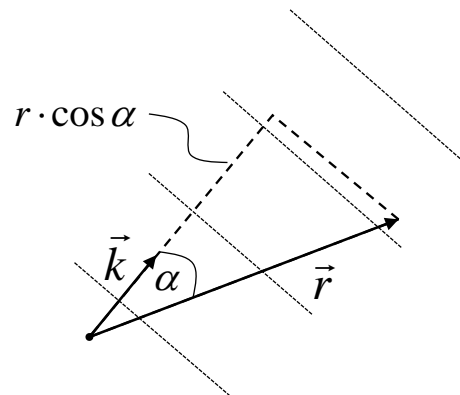


Abbildung 2.8.8: Interpretation der Wellenzahl als Wellenvektor.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_{01}) \quad (2.8.49)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_{02}) \quad (2.8.50)$$

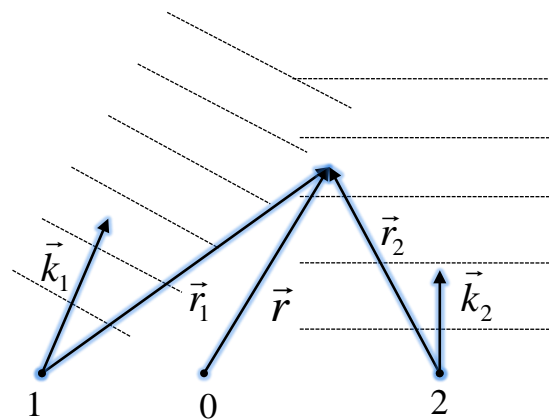


Abbildung 2.8.9: Überlagerung von zwei ebenen Wellen, die vom Ort 1 und 2 ausgehen. Der Koordinatenursprung sei 0.

mit A_1 und φ_{01} der Amplitude und Phase von Quelle 1 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Bzw. mit A_2 und φ_{02} der Amplitude und Phase von Quelle 2 zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Die Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 verbinden die Quellen mit dem Ort

\vec{r} . Die Phasen φ_{01} und φ_{02} stellen einen räumlichen und zeitlichen Bezug der beiden Quellen untereinander dar. Der Einfachheit halber beziehen wir beide Quellen auf den Koordinatenursprung:

$$\varphi_{01} = \vec{k}_1 (\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (2.8.51)$$

$$\varphi_{02} = \vec{k}_2 (\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2.8.52)$$

mit $(\vec{r} - \vec{r}_1)$ dem Abstand der Quelle 1 vom Ursprung und $(\vec{r} - \vec{r}_2)$ dem Abstand der Quelle 2 vom Ursprung. Wir verwenden folgende Ersetzung

$$\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{r}_1 + \varphi_{01} \quad (2.8.53)$$

$$\varphi_2 = \vec{k}_1 \vec{r}_2 + \varphi_{02} \quad (2.8.54)$$

und bekommen schließlich als Überlagerung der Wellen an einem Ort \vec{r} die Amplitude x :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (2.8.55)$$

Die Intensität der Welle am Ort \vec{r} ist proportional zur Amplitude zum Quadrat, da gilt:

$$I \propto E_{pot} \propto \frac{1}{2} c x^2 \propto x^2 \quad (2.8.56)$$

In Gl. 2.8.55 eingesetzt ergibt sich:

$$I \propto A_1^2 \cos^2(\omega t - \varphi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega t - \varphi_2) + 2A_1 A_2 \cos(\omega t - \varphi_1) \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (2.8.57)$$

Der letzte Term läßt sich mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen umformen zu:

$$\cos(\omega t - \varphi_1) \cos(\omega t - \varphi_2) = \frac{1}{2} \cos(2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.8.58)$$

Für die Bestimmung des Wellenmusters betrachten wir eine zeitliche Mittelung über eine Periode der Schwingung. Wir erhalten:

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} \quad (2.8.59)$$

$$\langle \cos(2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)) \rangle = 0 \quad (2.8.60)$$

Somit ergibt sich die gemittelte Intensität $\langle I \rangle$ zu:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.8.61)$$

mit dem Phasenunterschied $\varphi_2 - \varphi_1$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \vec{k}_2 (\vec{r} - \vec{r}_2) - \vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_1 (\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (2.8.62)$$

Der ergibt sich zu:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1 \right) \vec{r} \quad (2.8.63)$$

Man bekommt schließlich den Ausdruck für die gemittelte Intensität $\langle I \rangle$ am Ort \vec{r} zu:

$$\boxed{\langle I \rangle = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2) + A_1 A_2 \cos \left(\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1 \right) \vec{r} \right)} \quad (2.8.64)$$

Man erkennt, daß die Intensität nicht nur Terme gemäß A_1 und A_2 enthält sondern auch gemischte Terme gemäß $A_1 A_2 \cos \Delta\varphi$. D.h. die Intensität am Ort \vec{r} hängt von dem Cosinus des Phasenunterschieds $\Delta\varphi$ ab. Hat man zum Beispiel genau einen Phasenunterschied am Ort \vec{r} von $\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1 \right) \vec{r} = \frac{\pi}{2}$, so ergibt der Cosinus -1 und man bekommt $\langle I \rangle = 0$. Es tritt **destruktive Interferenz** auf. Im Fall eines Phasenunterschieds von 0 bzw. π (bzw. Vielfachen davon), wird der Cosinus 1 und $\langle I \rangle = 2A$ (für $A_1 = A_2 = A$). Man spricht von konstruktiver Interferenz.

Im Falle von Schallwellen kann man den Schalldruck sehr effektiv mindern indem man die Überlagerung von Wellen ausnutzt. Gelingt es einem eine zweite Schallwelle zu überlagern, die genau um $\pi/2$ phasen verschoben ist, so löschen sich Wellenberge und Wellentäler exakt aus und die Lautstärke wird effizient verringert. Man spricht von **Antischall**. Für die genaue Überlagerung von Schall und Antischall, kann man entweder eine gegenphasige Schallerzeugung am Ort der Lärmquelle realisieren, oder am Ort des Empfängers entsprechend gegenphasig Antischall erzeugen. Dies geschieht am besten innerhalb von Kopfhörern, wie sie zum Beispiel von Piloten verwendet werden.

2.8.5 Beugung, Brechung und Reflexion von Wellen

Das Huygens'sche Prinzip

Wellen breiten sich räumlich aus und können sich entsprechend überlagern. Dabei tritt konstruktive und destruktive Interferenz auf. Diese Ausbreitung

von Wellen in einem Medium mit gegebene äußeren Randbedingungen wie Grenzflächen, Blenden etc. läßt sich sehr elegant ableiten, wenn man das **Huygens'sche Prinzip** bemüht:

Jede Welle läßt sich als Überlagerung von Kugelwellen darstellen.

Dies soll im folgenden erläutert werden. Betrachten wir zunächst eine Welle, die von einem Punkt ausgehen soll. Das Wellenbild das sich ergibt ist eine **Kugelwelle**, wie in Abb. 2.8.10 illustriert. Die Intensität der Welle ändert sich mit dem Abstand zur Quelle wie (siehe Gl. 2.8.33):

$$I \propto v f(r)^2 \omega^2 \rho \quad (2.8.65)$$

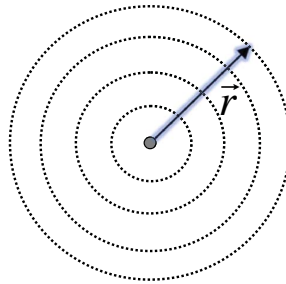


Abbildung 2.8.10: Eine Kugelwelle geht von einem Punkt radial aus.

wobei $f(r)$ zunächst eine allgemeine Abhängigkeit der Amplitude vom Abstand darstellen soll. Wegen der Energieerhaltung darf die Intensität *integriert* über die Oberfläche einer Kugel, die die Quelle im Abstand r umschließt, allerdings nicht ab- (für den Fall keiner Dämpfung) oder zunehmen. D.h. wir müssen fordern, daß die Intensität I_{gesamt} , die sich durch Integration über alle Raumrichtungen ($4\pi r^2$) ergibt, gegeben ist als:

$$I_{gesamt} \propto v f(r)^2 4\pi r^2 = \text{const.} \quad (2.8.66)$$

Daraus folgt direkt, daß $f(r) \propto \frac{1}{r}$. Somit bekommen wir als allgemeinen Ansatz für eine Kugelwelle die Form:

$$x(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (2.8.67)$$

oder

$$x(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.8.68)$$

Betrachten wir jetzt eine einfache *ebene* Welle auf der Basis des Huygens'schen Prinzips. Auf einer Linie seien unendliche viele Punktquellen angeordnet, die alle in gleicher Phase und Frequenz Kugelwellen aussenden. Aus Abb. 2.8.11 wird ersichtlich, daß sich an Orten parallel zu der Linie der Punktquellen, Orte gleicher Phasen ergeben (gestrichelte Linien in Abb. 2.8.11). D.h. eine ebene Welle entsteht.

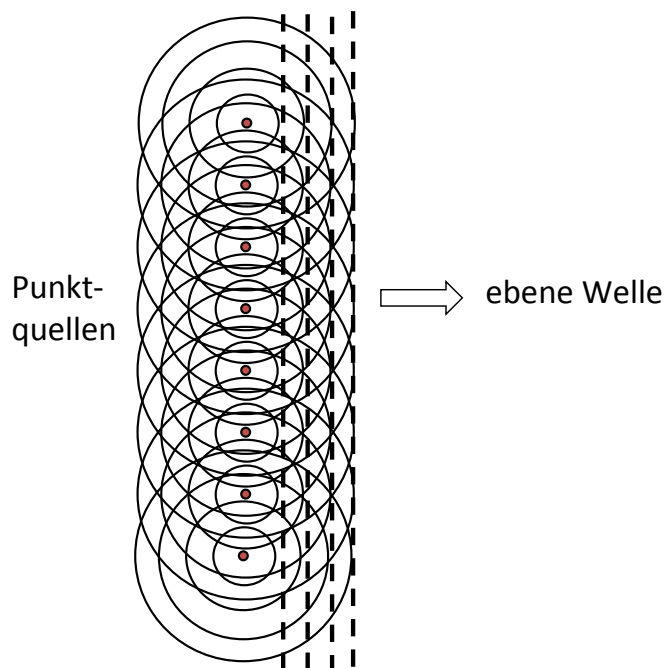


Abbildung 2.8.11: Die Überlagerung von Punktquellen auf einer geraden Linie, die mit gleicher Phasenlage und Frequenz eine Kugelwelle aussenden, ergibt eine ebene Welle.

Beugung einer Welle

Betrachten wir noch einmal eine Welle, die allerdings aus einem räumlich begrenzten Bereich emittiert wird. Dies kann zum Beispiel den Durchgang einer ebenen Welle durch einen Spalt der Breite d sein. Dazu verteilen wir zunächst N Punktquellen auf einer Strecke der Länge d , die bei gleicher Frequenz und Phase Kugelwellen aussenden. Wir suchen die Amplitude $x(\alpha)$ der Welle an einem Ort P, der gemäß der Abb. 2.8.12 im Abstand r unter einem Winkel α zur Normalen der Ebene des Spaltes liegt. Bei der Superposition der N Punktquellen (Index $n = 1..N$) ist insbesondere die Phase $\Delta\varphi$

der Punktquellen untereinander wichtig. Nachdem $d \ll r$ gelten soll, ist der Unterschied in den Entfernungen r_1 bis r_N (siehe Abb. 2.8.12) der einzelnen Punktquellen sehr klein, so daß die Abhängigkeit der Kugelwellen gemäß $1/r$ durch eine einzige Amplitude a ($a = f(r)$) gut genähert ist. Was allerdings nicht vernachlässigt werden darf, ist die *Phasenverschiebung* $\Delta\varphi_n$ der einzelnen Punktquellen untereinander. Wir bekommen somit für die Amplitude $x(\alpha)$ einen allgemeinen Ansatz von:

$$x(\alpha) = \sum_{n=1}^N a e^{i(\omega t - kr - \Delta\varphi_n)} \quad (2.8.69)$$

Wenn wir zwei benachbarte Punktquellen im Abstand δ betrachten, bekommen wir einen Phasenunterschied gemäß Abb. 2.8.18 von:

$$\Delta\varphi_1 = k \sin \alpha \delta \quad (2.8.70)$$

D.h. wir können die Amplitude am Ort P schreiben als:

$$x(\alpha) = \underbrace{\sum_{n=1}^N a e^{-nk \sin \alpha \delta}}_{=A} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.8.71)$$

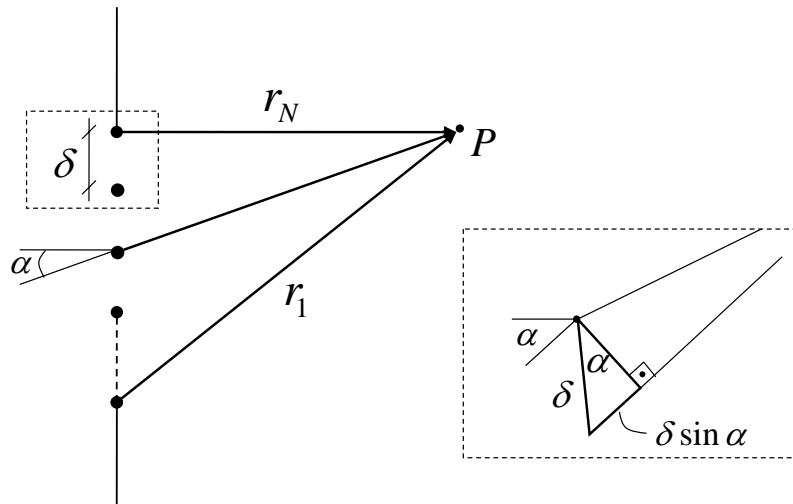


Abbildung 2.8.12: Räumliche Überlagerung der Wellen von N Punktquellen mit einem Abstand δ zueinander an einem Ort P .

Der Faktor A beschreibt eine Summe von $n = 1..N$. Dies ist eine geometrische Reihe mit dem Grenzwert:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N e^{-in\Delta\varphi} &= \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \\
&= \frac{e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi} \left(e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} \right)}{e^{-i\frac{1}{2}\Delta\varphi} \left(e^{-i\frac{1}{2}\Delta\varphi} - e^{i\frac{1}{2}\Delta\varphi} \right)} \\
&= e^{-i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \frac{\sin \frac{N}{2}\Delta\varphi}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (2.8.72)
\end{aligned}$$

Die Intensität am Ort P ist proportional zum Betragsquadrat der Amplitude x . D.h. wir bilden $x \cdot x^*$ und es ergibt sich schließlich:

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N \delta k \sin \alpha \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \delta k \sin \alpha \right)} \quad (2.8.73)$$

Für einen Spalt der Ausdehnung d können wir die Phase $\Delta\phi$ definieren zu:

$$\Delta\phi = N \delta k \sin \alpha = dk \sin \alpha \quad (2.8.74)$$

Damit bekommen wir schließlich:

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{1}{N} \frac{\Delta\phi}{2} \right)} \quad (2.8.75)$$

Nachdem N eine große Zahl ist, kann der Sinus im Nenner durch sein Argument angenähert werden. Es ergibt sich dann ein Ausdruck gemäß:

$$I(\alpha) \propto a^2 N^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right)}{\left(\frac{\Delta\phi}{2} \right)^2} \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (2.8.76)$$

mit

$$x = \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{1}{2} dk \sin \alpha = \frac{1}{2} d \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \quad (2.8.77)$$

Aus Abb. 2.8.13 erkennt man, daß ein sog. **Beugungsmuster** entsteht. Klassisches Beispiel für diesen Effekt sind Lichtwellen, die durch eine Blende begrenzt werden, und ein Photopapier dahinter belichten. Die Breite des entstehenden Beugungsmusters hängt empfindlich vom Verhältnis d/λ ab:

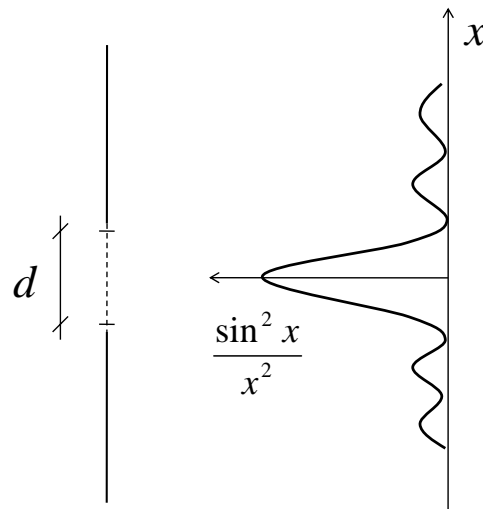


Abbildung 2.8.13: Die Beugung einer Welle an einem Spalt ergibt eine Intensität proportional zu $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ auf einem Schirm.

- $d \ll \lambda$

Falls die Wellenlänge λ der ebenen Welle sehr viel größer als die Ausdehnung d der Blende ist, so bekommt man auch für große Werte von α immer noch kleine Werte für x . D.h. gemäß Abb. 2.8.13 entsteht eine große Intensität an Orten, die sich unter einem großen Winkel α befinden. D.h durch die Beugung können wir mit einer großen Wellenlänge einen kleinen Spalt *nicht scharf* abbilden.

- $d \gg \lambda$

Falls die Wellenlänge λ der ebenen Welle sehr viel kleiner als die Ausdehnung d der Blende ist, so bekommt man auch für große Werte von α auch große Werte für x . Nachdem die Funktion $\sin^2 x/x^2$ für große x schnell abfällt wird die Intensität an Orten, die sich unter einem großen Winkel α befinden, sehr klein. Nur für kleine Winkel α bekommt man eine nennenswerte Intensität. D.h mit einer Wellenlänge die kleiner als die Ausdehnung des Spaltes ist können wir diesen *scharf* abbilden.

Die Begrenzung der Abbildungseigenschaften durch die Beugung ist eine fundamentale Grenze, die prinzipiell nicht unterboten werden kann. Allein über Interferenz mehrerer Beugungsmuster von unterschiedlichen Blenden untereinander kann man im begrenzten Umfang auch kleinere Strukturen

belichten. Dies ist derzeit ein drängendes Problem in der Herstellung von Nanostrukturen in der Halbleiterindustrie. Die Schaltkreise auf einem Chip haben Ausdehnungen im Bereich < 90 nm, wobei die Wellenlänge des Lichtes zur Erzeugung der Strukturen typischerweise 193 nm ist. D.h. schon hier sind ausgefeilte Techniken nötig, um die Beugungsbegrenzungen zu umgehen.

Reflexion einer Welle

Auf der Basis des Huygens'schen Prinzips lassen sich schließlich noch Reflexion und Brechung von Wellen an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien beschreiben. Betrachten wir zunächst wieder eine ebene Welle, die unter einem Einfallswinkel auf eine Grenzfläche fällt, wie in Abb. 2.8.14 illustriert. Wenn die Welle an Punkt A ankommt beginnt dort die Ausbreitung einer Kugelwelle. An Punkt B beginnt eine zweite Kugelwelle später, da die einfallende Welle noch die Strecke \overline{DB} überwinden muß. In dem Moment, in dem die Kugelwelle in B beginnt hat die Kugelwelle, die von A ausging, schon einen endlichen Radius erreicht. Die ausfallende ebene Welle läßt sich jetzt durch die Überlagerung der Orte gleicher Phasen konstruieren. Dazu erzeugt man eine Tangente an die Kugelwelle um A, die durch B geht. Es entsteht ein Punkt E. Man erkennt, daß das Dreieck AEB gespiegelt zu dem Dreieck ABD ist. Aus Abb. 2.8.14 läßt sich dann leicht ablesen, daß der Einfallswinkel immer gleich dem Ausfallswinkel sein muß.

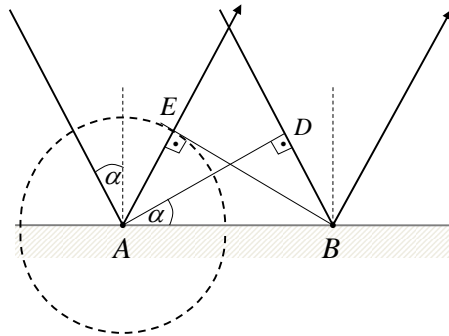


Abbildung 2.8.14: Reflexion einer Welle an einer Grenzfläche.

Brechung einer Welle

Betrachten wir jetzt den Übergang einer ebenen Welle zwischen zwei Medien 1 und 2. Diese Medien unterscheiden sich hinsichtlich der Phasengeschwindigkeiten v_1 und v_2 . Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die einfallende Welle

die Punkte A und D in Abb. 2.8.15 erreicht. Danach beginnt ein Kugelwelle sich über die Strecke \overline{AE} im Medium 2 mit einer Geschwindigkeit v_2 für einen Zeitraum T auszubreiten. Um die Wellen gleicher Phasen zu überlagern, muß in diesem Zeitraum T die Kugelwelle im Medium 1 die Strecke \overline{DB} mit der Geschwindigkeit v_1 überwinden. D.h. es muß gelten:

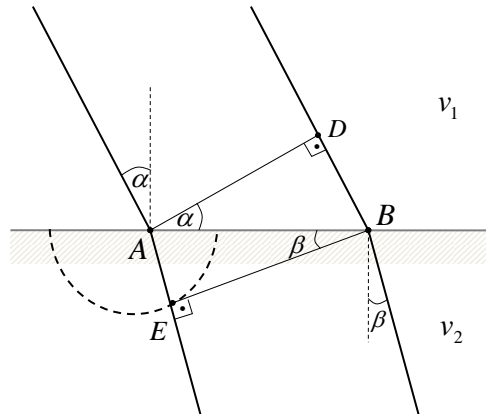


Abbildung 2.8.15: Brechung einer Welle an einer Grenzfläche.

$$\overline{AE} = v_2 T \quad \overline{DB} = v_1 T \quad (2.8.78)$$

Man erkennt sofort, daß die Strecken in folgendem Bezug zueinander stehen.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{v_2}{v_1} \quad (2.8.79)$$

Wenn man mit α den Einfallswinkel zu Oberflächennormalen im Medium 1 und mit β den Ausfallswinkel zur Oberflächennormalen im Medium 2 bezeichnet und mit d den Abstand der Punkte A und B, so gilt gemäß Abb. 2.8.15:

$$v_2 T = \sin \beta d \quad v_1 T = \sin \alpha d \quad (2.8.80)$$

Dies läßt sich umschreiben und man erhält das **Snellius'sche Brechungsgesetz** zu:

$$\boxed{v_1 \sin \beta = v_2 \sin \alpha} \quad (2.8.81)$$

2.8.6 Stehende Wellen

Im folgenden wollen wir die Reflexion einer einfachen Welle an einer Grenze betrachten. Beispiel sei ein Seil, das an einem Ende an einer Wand befestigt sei. Eine Welle auf dem Seil läuft auf die Wand zu und wird von dieser reflektiert (siehe Abb. 2.8.16). Dabei überlagert sich die hin- und die zurücklaufende Welle.

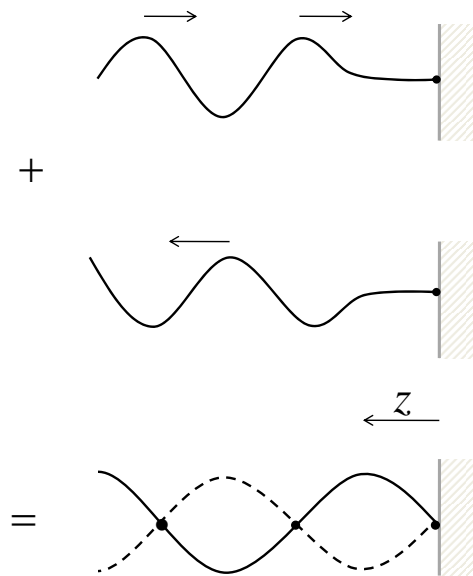


Abbildung 2.8.16: Hin- und rücklaufende Welle.

$$x(z, t) = \underbrace{A \cos(\omega t + kz)}_{\text{hinlaufend}} + \underbrace{A \cos(\omega t - kz + \varphi)}_{\text{ruecklaufend}} \quad (2.8.82)$$

Die Laufrichtung der Welle wird dabei durch das Vorzeichen der Wellenzahl k berücksichtigt. Der sog. *Phasensprung* φ hängt von den Reflexionseigenschaften am Ende ab. Dies läßt sich anschaulich wieder an der Seilwelle verdeutlichen, wie in Abb. 2.8.17 illustriert: (i) bei einem festen Ende, schlägt z.B. eine positive Amplitude nach der Reflexion in den negativen Wert um. Vergleicht man die hin- und rücklaufende Welle an dem gleichen Ort z und Zeit t , so muß die rücklaufende Welle um π verschoben werden. Dabei kehrt sich das Vorzeichen der Amplitude um und ein Wellenberg wird zu einem Wellental; (ii) bei einem freien Ende, bleibt das Vorzeichen der Amplitude nach der Reflexion zunächst erhalten. Vergleicht man die hin- und rücklaufenden

Wellen an dem gleichen Ort z und Zeit t , so muß die Phase φ gleich Null sein. Gl. 2.8.82 läßt sich zusammenfassen zu:

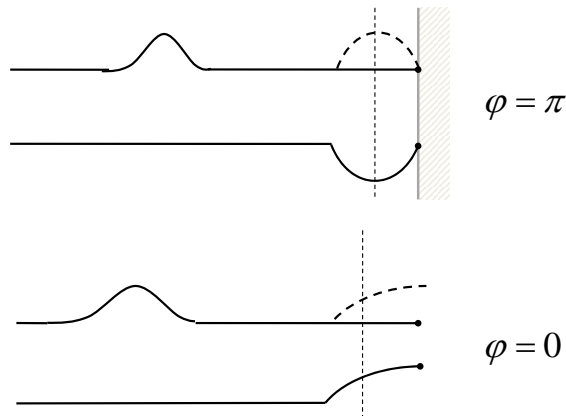


Abbildung 2.8.17: Reflexion einer Welle an einem festen und einem offenen Ende.

$$x(z, t) = 2A \cos\left(kz - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (2.8.83)$$

Man erkennt wieder eine Welle der Form $\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$. Allerdings wird die Amplitude dieser Welle räumlich moduliert, wobei der Ausdruck $\cos(kz - \frac{\varphi}{2})$ *nicht* von der Zeit abhängt! D.h. es entstehen an definierten Abständen Orte an denen die Amplitude *immer* Null ist. Diese bezeichnet man als **Wellenknoten**. Diese Orte liegen an:

$$z = \frac{\lambda}{4\pi} [(2n + 1)\pi + \varphi] \quad (2.8.84)$$

mit n einer natürlichen Zahl. Bei einer Variation der Wellenlänge ändern sich kontinuierlich die Orte der Wellenknoten. Der erste Wellenknoten ist dabei zum Beispiel immer die Einspannung dieses Seils an der Wand.

Wird dieses Seil allerdings an *beiden* Enden im Abstand L eingespannt, so muß an beiden Orten $z = 0$ und $z = L$ *gleichzeitig* ein Wellenknoten sein, wie in Abb. 2.8.18 illustriert ist.

Mit diesen Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = L$ können jetzt allerdings nicht mehr beliebigen Frequenzen oder Wellenlängen angeregt werden. Die zulässigen Wellenlängen bzw. zulässigen Frequenzen bezeichnet man als **Eigenfrequenzen** des Systems. Es kann mit großer Amplitude schwingen, wie in Abb. 2.8.18 illustriert ist. Als mögliche Wellenlängen bekommt man

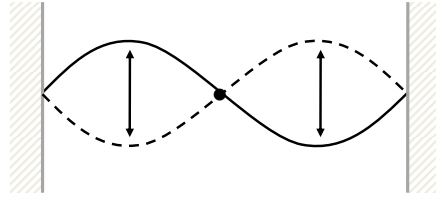


Abbildung 2.8.18: Stehende Welle.

bei beidseitig offenen Enden $\lambda = \frac{2L}{n}$ mit n einer natürlichen Zahl; bei einem festen und einem offenen Ende $\lambda = \frac{4L}{n}$ mit $n = 1, 3, 5, \dots$ einer natürlichen Zahl; bei beidseitig festen Enden $\lambda = \frac{2L}{n}$ mit n einer natürlichen Zahl.

Alle Wellen in einem definierten System lassen sich darstellen als Überlagerung von einzelnen Eigenfrequenzen oder Moden, den sog. **Harmonischen**. Betrachten wir den Fall einer Saite einer Geige oder eines Klaviers. Hier bestimmt die Spannung der Saite, die Frequenz der Grundmoden. Die Tonhöhe der oberen Harmonischen sind jeweils Vielfache dieser Frequenz. Beim mechanischen Anschlagen einer Saite schwingt diese nicht nur auf der Grundmode, sondern auch auf den Harmonischen, da das System aus Saite, Befestigungspunkt und Resonanzkörper gleichzeitig angeregt wird. Dies macht die *Klangfarbe* eines Instrumentes aus.

2.8.7 Wellen bei bewegten Quellen

Quelle bewegt sich, Beobachter ruht

Wir wollen den Fall betrachten, daß eine Quelle Q sich relativ zu einem Beobachter B bewegt. Bei einer ruhenden Quelle ist der Abstand zwischen zwei Wellenbergen Δz :

$$\Delta z = \lambda_0 = v_{\text{Phase}} T \quad (2.8.85)$$

mit $T = \frac{1}{f_0}$ der Periode der Schwingung. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- **Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu**

Bewegt sich die Quelle mit der Geschwindigkeit v_{Quelle} auf einen Beobachter zu, so verkürzt sich der Abstand der Wellenberge zueinander, wie in Abb. 2.8.12 illustriert ist, zu:

$$\lambda = \lambda_0 - v_{\text{Quelle}} T \quad (2.8.86)$$

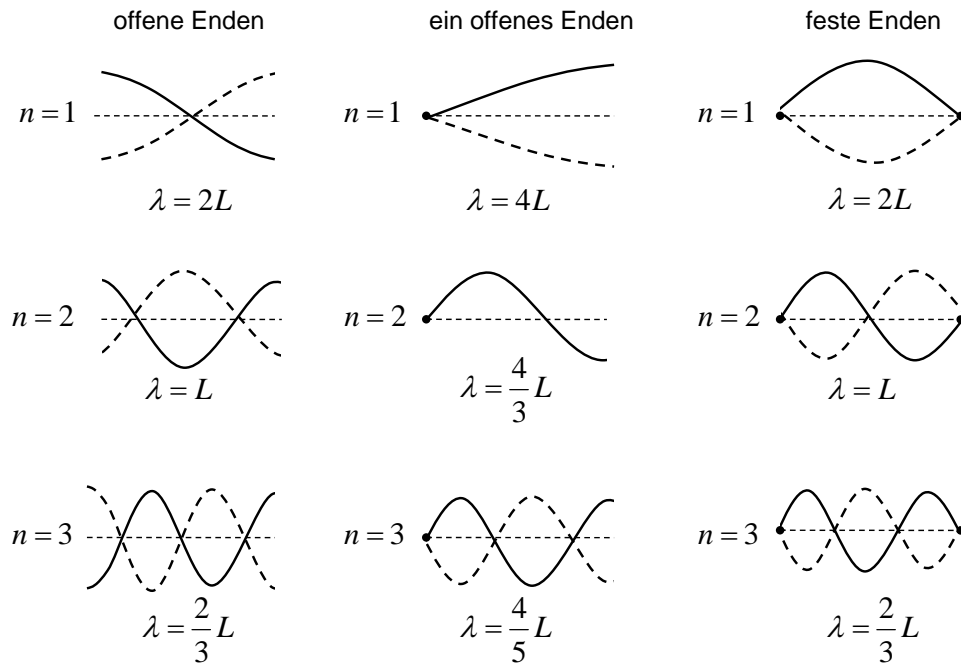


Abbildung 2.8.19: Je nach Randbedingungen ergeben sich unterschiedliche Schwingungsmoden. Die Zahl n bezeichnet hier die Anzahl der Knoten entlang der stehenden Welle.

Der Beobachter nimmt die Frequenz $f = \frac{v_{Phase}}{\lambda}$ wahr. Damit ergibt sich aus Gl. 2.8.86: Frequenz, die ein Beobachter wahrnimmt zu:

$$\frac{v_{Phase}}{f} = \frac{v_{Phase}}{f_0} - \frac{v_{Quelle}}{f_0} \quad (2.8.87)$$

bzw.:

$$f = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}} \quad (2.8.88)$$

Der Ausdruck $\frac{1}{1 - \frac{v_Q}{v_{Phase}}}$ ist größer 1 und die wahr genommene Frequenz am Ort des Beobachters ist höher. Dies bezeichnet man als **Dopplereffekt**.

- **Quelle entfernt sich vom Beobachter**

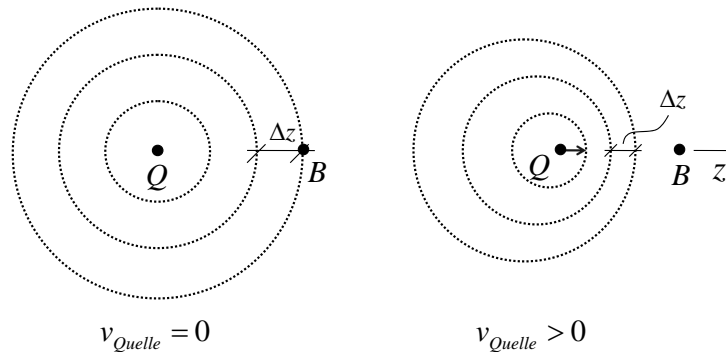


Abbildung 2.8.20: Ausbreitung von Wellen ausgehend von einer ruhenden und einer bewegten Quelle.

Bewegt sich die Quelle mit der Geschwindigkeit v_{Quelle} vom Beobachter weg, so vergrößert sich der Abstand der Wellenberge zueinander:

$$\lambda = \lambda_0 + u_Q T \quad (2.8.89)$$

In Analogie zu obiger Ableitung nimmt der Beobachter dann folgende Frequenz wahr:

$$f = f_0 \frac{1}{1 + \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}} \quad (2.8.90)$$

Der Ausdruck $\frac{1}{1 + \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}}$ ist kleiner 1 und die wahr genommene Frequenz am Ort des Beobachters ist kleiner als die der ruhenden Quelle.

Quelle ruht, Beobachter bewegt sich

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß die Quelle Q ruht und sich der Beobachter B mit $v_{Beobachter}$ auf die Quelle zu bewegt. Der Beobachter nimmt dabei eine andere Frequenz wahr, da er häufiger auf Wellenberge trifft. D.h. im Bezugssystem des Beobachters gilt die Wellenlänge λ und die Frequenz f . Im Bezugssystem der ruhenden Quelle gilt die Wellenlänge λ_0 und die Frequenz f_0 . Damit verkürzt sich die Wellenlänge um:

$$\lambda = \lambda_0 - v_{Beobachter} \frac{1}{f} \quad (2.8.91)$$

Die Wellenlängen sind mit den Phasengeschwindigkeiten und Frequenzen verknüpft wie:

$$\lambda = \frac{v_{Phase}}{f}; \quad \lambda_0 = \frac{v_{Phase}}{f_0} \quad (2.8.92)$$

Damit ergibt sich schließlich aus Gl. 2.8.91:

$$\boxed{f = f_0 \left(1 + \frac{v_{Beobachter}}{v_{Phase}} \right)} \quad (2.8.93)$$

Der Ausdruck $\left(1 + \frac{v_{Beobachter}}{v_{Phase}} \right)$ ist größer 1 und die wahr genommene Frequenz am Ort des Beobachters ist höher. Bei anderer Bewegungsrichtung dreht sich jeweils das Vorzeichen um.

Quelle und Beobachter bewegen sich

Abschließend betrachten wir den Fall, daß sich Quelle Q und Beobachter B aufeinander zu bewegen. In Analogie zu der obigen Beschreibung bekommen wir eine Änderung der wahrgenommenen Wellenlänge von

$$\lambda = \lambda_0 - v_{Beobachter} \frac{1}{f} - v_{Quelle} \frac{1}{f_0} \quad (2.8.94)$$

Hier gilt im Bezugssystem des Beobachters die Frequenz f , während gleichzeitig im Bezugssystem der Quelle die Frequenz f_0 vorliegt. Mit

$$\lambda = \frac{v_{Phase}}{f}; \quad \lambda_0 = \frac{v_{Phase}}{f_0} \quad (2.8.95)$$

bekommen wir schließlich aus Gl. 2.8.94:

$$\boxed{f = f_0 \frac{v_{Phase} + v_{Beobachter}}{v_{Phase} - v_{Quelle}}} \quad (2.8.96)$$

Bei anderer Bewegungsrichtung von Quelle oder Beobachter dreht sich jeweils das Vorzeichen um.

Quellengeschwindigkeit ist größer als die Phasengeschwindigkeit

Was passiert, wenn die Phasengeschwindigkeit der Welle gleich der Geschwindigkeit der Quelle ist? In Fahrtrichtung gesehen wird der Abstand der Wellenberge unendlich klein, bzw. die Frequenz unendlich hoch. Es entsteht eine sog. **Stoßfront**. Im Falle von Schallwellen bezeichnet man diesen Punkt als Schallmauer. Die starken Luftdruckschwankungen führen zu einer drastischen

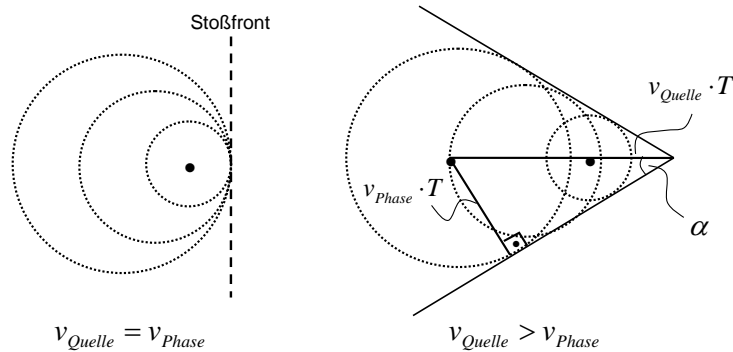


Abbildung 2.8.21: Ausbildung einer Stoßfront bei einer Bewegung der Quelle mit einer Geschwindigkeit größer als die Phasengeschwindigkeit in dem Medium.

Änderung der Temperatur der Luft, was als Tröpfchenbildung sichtbar wird (siehe Abb. 2.8.22). Zudem ist ein Knall hörbar. In Abb. 2.8.21 ist der Ausbreitungskegel dieser Stoßfront dargestellt. Der Öffnungswinkel α berechnet sich aus:

$$\sin \alpha = \frac{v_{Phase}}{v_{Quelle}} \quad (2.8.97)$$

Eine Überschallgeschwindigkeit wird auch durch die **Machzahl** M ausgedrückt als dem Verhältnis zwischen Quellengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit des Schalls in dem Medium.

$$M = \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}} \quad (2.8.98)$$



Abbildung 2.8.22: Durchbruch eines Flugzeugs durch die Schallmauer.

Kapitel 3

Wärmelehre

Bislang hatten wir die Energie von Teilchen aus dem Energiesatz der Mechanik abgeleitet. Betrachtet man sehr große Systeme zum Beispiel die Energie von Gasteilchen in einem gegebenen Volumen wird diese Einzelteilchenbetrachtung sehr umständlich. Man benötigt daher Konzepte zur Beschreibung von Vielteilchensystemen. Dies leistet die Wärmelehre in der Systeme mit makroskopischen Variablen wie Temperatur, Druck, innere Energie und Entropie beschrieben werden. Dies wird im folgenden erläutert.

3.1 Kinetische Gastheorie

3.1.1 Mikroskopische Definition der Temperatur

Die wichtigste Kenngröße um den Energieinhalt in einem Medium zu charakterisieren ist die Temperatur. Für ein Gas läßt sich diese Größe aus dem mikroskopischen Bild sich bewegender Gasatome ableiten. Hierfür betrachten wir zunächst ein **ideales Gas**, daß wie folgt definiert ist:

- Gasmoleküle als punktförmige Teilchen
- keine Wechselwirkung der Teilchen untereinander

Betrachten wir dazu einen gas-gefüllten Behälter bei dem die Gasteilchen mit den Wänden stoßen, wie in Abb. 3.1.1 illustriert ist. Wird ein Teilchen an einer Wand reflektiert, so übt es eine Kraft F auf, die einem Druck p entspricht:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{\Delta p'}{\Delta t} \quad (3.1.1)$$

Mit $\Delta p'$ der Änderung des Impulses bei dieser Reflexion. Diese Impulsänderung beim Stoß geschieht nur in Richtung normal zur Oberfläche (hier die x-Richtung). Vor dem Stoß ist der x-Anteil am Impuls $+mv_x$. Bei der Wand nehmen wir an, daß das Massenverhältnis sehr groß ist, so daß sich der Impuls aber nicht die Energie des Teilchens beim Stoß ändert. Demnach ist der x-Anteil des Impulses nach em elastischen Stoß $-mv_x$. Damit wird die Gesamtänderung des Impuls $\Delta p'_x$ zu:

$$\Delta p'_x = mv_x - (-mv_x) = 2m|v_x| \quad (3.1.2)$$

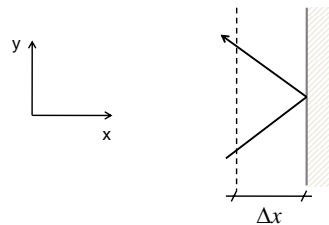


Abbildung 3.1.1: Impulsübertrag eines Gasteilchens auf die Wand eines Gefäßes.

Diese Beziehung betrachtet zunächst nur ein einzelnes Teilchen. Der Gesamtdruck p wird jedoch durch die Überlagerung der elastischen Stöße aller N Teilchen in dem Behälter erzeugt. In dem Zeitintervall Δt treffen nur Teilchen innerhalb eines Volumens der Ausdehnung Δx auf die Wand :

$$\frac{N}{V} A \Delta x \quad (3.1.3)$$

Der Druck den alle Teilchen ausüben wird somit:

$$p = \frac{1}{A} \frac{N}{V} A \Delta x \frac{1}{\Delta t} 2m|v_x| \frac{1}{2} \quad (3.1.4)$$

Der Faktor $1/2$ am Ende berücksichtigt, daß nur Teilchen, die in positiver x-Richtung fliegen, die Wand erreichen können. Mit $\Delta x / \Delta t = v_x$ bekommt man schließlich:

$$pV = Nm v_x^2 \quad (3.1.5)$$

Für diese Betrachtung war nur die Geschwindigkeit des Gases in eine Richtung (hier die x-Richtung) maßgeblich. In einem Behälter mit N Teilchen kann jedes Teilchen jedoch eine andere Geschwindigkeit haben. Für die

Ableitung des Druckes p wollen wir deshalb jetzt nur noch mit dem Mittelwert der Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ bzw. dem Mittelwert dessen Quadrats $\langle v^2 \rangle$ argumentieren. Dieser Mittelwert setzt sich aus drei Komponenten zusammen:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \quad (3.1.6)$$

Nachdem die Bewegungsrichtungen der Gasmoleküle isotrop im Raum verteilt sind, muß gelten $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ und damit $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$. Man bekommt schließlich:

$$pV = N \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle \quad (3.1.7)$$

Dies läßt sich erweitern zu:

$$pV = \frac{2}{3} N \underbrace{\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle}_{\text{kin. Energie}} \quad (3.1.8)$$

Man erkennt, daß der Druck in einem Gasvolumen von der mittleren kinetischen Energie des Gases abhängt. Per *Definition* ist diese mittlere kinetische Energie proportional zu einer neuen Größe, der **Temperatur**.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (3.1.9)$$

Die Maßeinheit der Temperatur sind **Kelvin K**. Die Proportionalitätskonstante bezeichnet man als **Boltzmannkonstante**:

$$k_B = 1.38054 \cdot 10^{-23} JK^{-1} \quad (3.1.10)$$

Die Verknüpfung des mikroskopischen Bildes sich bewegender Gasmoleküle mit den makroskopischen Größen wie Druck und Temperatur bezeichnet man als **kinetische Gastheorie**. Mit dieser mikroskopischen Interpretation der Temperatur läßt sich auch eine Verknüpfung zwischen Geschwindigkeit der Gasmoleküle und der Temperatur des Gases herstellen. So bekommt man für die mittlere Geschwindigkeit eines H_2 Moleküls bei 300 K einen Wert von ca. 2000 ms^{-1} .

Damit läßt sich das Boyle-Mariott'sche Gesetz ($pV = \text{const.}$) neu schreiben als:

$$pV = N k_B T \quad (3.1.11)$$

Dies bezeichnet man als **allgemeine Gasgleichung**.

3.1.2 Verteilungsfunktionen

In dem Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und der kinetischen Energie der Teilchen in einem gas-gefüllten Behälter haben wir den Vielteilchenaspekt des Problems durch die Einführung einer gemittelten Größe ($\langle v^2 \rangle$) berücksichtigt. D.h. die Angabe einer Temperatur setzt notwendigerweise irgendeine Mittelung voraus! Wie würde man jedoch das Vielteilchenproblem jetzt explizit genauer behandeln?

Die exakte Verteilung der Energie und Geschwindigkeiten auf die Teilchen in einem Gasvolumen wird durch eine sog. **Verteilungsfunktion** angegeben:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) \quad (3.1.12)$$

Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit in einem Geschwindigkeitsintervall $[\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$ und Volumenelement $[\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}]$ ein Teilchen vorzufinden. Diese Verteilungsfunktion wird konstruiert indem man alle Teilchen in dem Volumen bezüglich ihres Ortes und ihrer Geschwindigkeit in die Geschwindigkeitsintervalle im sog. *Geschwindigkeitsraum* und in die Ortsintervalle im *Ortsraum* einsortiert. Da f eine Wahrscheinlichkeit ist, muß gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v}, \vec{r}) d\vec{v} d\vec{r} = 1$.

Auf der Basis der Kenntnis der Verteilungsfunktion läßt sich jetzt eine gemittelte Größen $\langle a \rangle$ (z.B. mittlere kinetische Energie $a = \frac{1}{2}mv^2$) für einen bestimmten Ort \vec{r} sehr einfach bestimmen mit der Vorschrift:

$$\langle a(\vec{r}) \rangle = \int a f(\vec{v}, \vec{r}) d\vec{v} \quad (3.1.13)$$

D.h. die Information über die kinetische Energie in einem gas-gefüllten Behälter ist jetzt nicht mit einer *einzigsten Größe* $\langle v^2 \rangle$ gegeben, sondern durch eine *ganzen Funktion* $f(\vec{r}, \vec{v})$ definiert. Aus dieser Funktion läßt sich nach obiger Vorschrift immer eine mittlere Geschwindigkeit gewinnen. Umgekehrt ist dies allerdings nicht möglich: nur auf der Basis der Kenntnis der mittleren Geschwindigkeit läßt sich keine Aussage machen über die Verteilung der Geschwindigkeiten im Geschwindigkeitsraum. Somit ist die Beschreibung des gas-gefüllten Behälters mit Verteilungsfunktionen viel leistungsfähiger als die mit gemittelten Größen wie Druck und Temperatur.

Mikroskopische Prozesse, die in einem Gas stattfinden, wie zum Beispiel Stöße der Teilchen untereinander oder die Einkopplung von Energie von außen bestimmen die Form dieser Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum. Schüttelt man zum Beispiel einen gas-gefüllten Behälter so nehmen die Teilchen Energie durch Stöße mit der sich bewegenden Wand auf. Dies führt zu einer Änderung der Verteilungsfunktion und damit erhöht sich auch die Temperatur des Behälters entsprechend obiger Mittelungsvorschrift.

Elastische Stöße der Teilchen untereinander können allerdings auch die Verteilungsfunktion ändern, da Teilchen Energie und Impuls bei Stoßprozessen austauschen. Betrachten wir wieder den gas-gefüllten Behälter, den wir geschüttelt hatten. Für lange Zeiten nach dieser Energiezufuhr stellt sich wieder eine sehr charakteristische Verteilungsfunktion ein. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit für die Geschwindigkeit in eine bestimmte Richtung x , so bekommt man:

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{1/2 m v_x^2}{k_B T}} \quad (3.1.14)$$

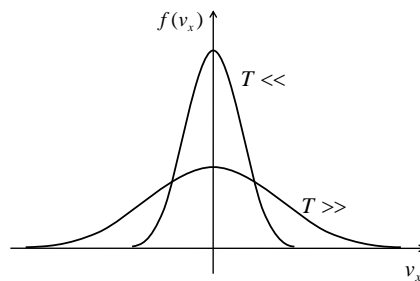


Abbildung 3.1.2: Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung $f(v_x)$.

Dies ist ein herausragendes Ergebnis der kinetischen Gastheorie. Diese Verteilung bezeichnet man als **Maxwell-Boltzmann-Verteilung**.¹

Elastische Stöße führen *immer* zu dieser Form der Geschwindigkeitsverteilung, die durch die Angabe einer Temperatur T *eindeutig* charakterisiert ist. Abb. 3.1.2 zeigt zwei Verteilungen für unterschiedliche Temperaturen. Hat man zum Beispiel ein Gas, in das von außen Energie zugeführt wird, so beobachtet man nach hinlänglicher Zeit, daß sich diese Form der Verteilung einstellt; das Gas *thermalisiert*. Betrachtet man die Geschwindigkeiten im dreidimensionalen, so bekommt man:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{1/2 m v^2}{k_B T}} \quad (3.1.15)$$

mit $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 1$. Oftmals ist nur der Betrag der Geschwindigkeit $|v|$ von Interesse. Diesen erhält man über Integration über alle Raumrichtungen im Geschwindigkeitsraum $4\pi v^2$

¹ Die genaue Ableitung dieser Verteilungsfunktion wird hier nicht weiter erläutert. Eine genaue Ableitung erfolgt prinzipiell über den Stoßterm der Boltzmann-Gleichung unter der Vorgabe elastischer Stöße.

$$f(|v|) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}} \quad (3.1.16)$$

Diese Auftragung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist in Abb. 3.1.3 gezeigt.

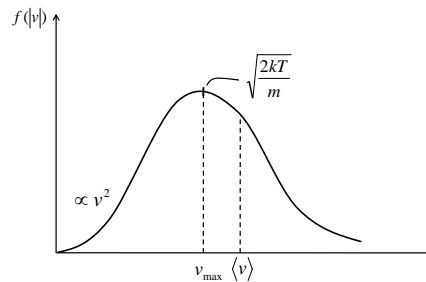


Abbildung 3.1.3: Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung für den Betrag der Geschwindigkeit $f(|v|)$.

Die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ergibt sich zu:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) d\vec{v} \quad (3.1.17)$$

$$= \int_0^\infty 4\pi v^2 v \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}} dv \quad (3.1.18)$$

$$= \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (3.1.19)$$

Im mikroskopischen Bild der kinetische Gastheorie bezeichnet die Temperatur denjenigen Zustand in dem durch unendliche viele Stöße ein Gleichgewicht erreicht wurde. Ein makroskopisches Analogon ist das Zusammenfügen von zwei Körpern unterschiedlicher Temperatur. Es stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei dem sich eine mittlere gleichförmige Temperatur einstellt, wie in Abb. 3.1.4 illustriert. Dies bezeichnet man als **0-ten Hauptsatz der Wärmelehre**.

Die kinetische Gastheorie und die Thermodynamik standen lange als unvereinbare Theorien gegenüber. Insbesondere Ludwig Boltzmann als Begründer der kinetischen Gastheorie konnte sich mit der thermodynamischen Beschreibung von Systemen mittels Energie, Entropie etc. nie anfreunden. Erst Anfang des 20-ten Jahrhunderts gelang es beide Beschreibungen mit Methoden der klassischen Statistik und der Quantenstatistik zu verknüpfen.

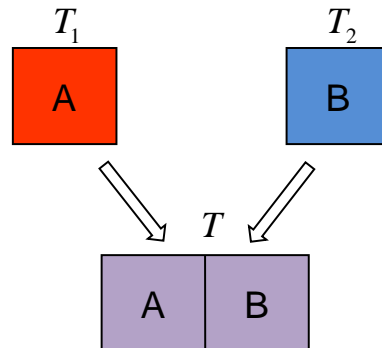


Abbildung 3.1.4: Fügt man zwei Körper A und B unterschiedlicher Temperatur T_1 und T_2 zusammen, so stellt sich eine einheitliche Temperatur T ein.

3.1.3 Temperatureinheiten und ihre Messung

Die Temperatur kann in unterschiedlichen Einheiten gemessen werden. Man kann drei Skalen unterscheiden:

- **Celsius**

Die gebräuchlichste Einheit ist die Celsius-Skala, die durch den Gefrierpunkt (0°C) und den Siedepunkt (100°C) von Wasser bei Normaldruck definiert ist.

- **Fahrenheit**

Die Fahrenheit-Skala ist im Englisch-sprachigen Raum üblich. Ihr Nullpunkt ist als Schmelzpunkt einer Eis-Wasser-Aluminiumchlorid-Mischung definiert, der Punkt für 100°F sollte ursprünglich durch die Körpertemperatur festgelegt sein. 100° entsprechen allerdings 37.7°C .

Die Temperatur in Celsius T_c läßt sich aus der Temperatur Fahrenheit T_F berechnen nach:

$$T_c = \frac{5}{9} (T_F [^\circ \text{F}] - 32) [^\circ \text{C}] \quad (3.1.20)$$

- **Kelvin**

Die Kelvin-Skala entspricht einer *absoluten* Temperatur-Skala. Gemäß der allgemeinen Gasgleichung ist der Fall "kinetische Energie gleich

Null" definiert. Nachdem es keine negativen Energien geben kann, wird dieser Punkt als $T=0$ K definiert. Der Nullpunkt der Celsius-Skala entspricht dann 273.15 K.

Die Messung von Temperaturen kann auf vielerlei Weise erfolgen. Im wesentlichen wird dabei die Änderung der Eigenschaften eines Festkörpers oder Gases in Abhängigkeit von der Temperatur betrachtet.

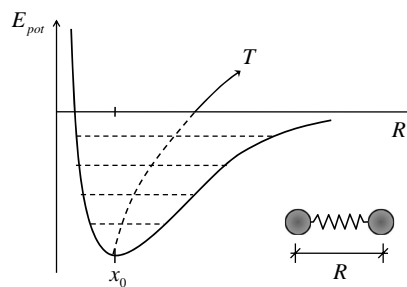


Abbildung 3.1.5: Änderung des Gleichgewichtsabstandes mit der Temperatur eines Festkörpers.

Bei endlicher Temperatur schwingen die Atome eines Festkörpers um ihre Ruhelage. In erster Näherung ist das bindenden Potential parabel-förmig um das Minimum. D.h. der Mittelwert der Atomabstände ändert sich nicht, auch wenn die kinetische Energie, sprich die Temperatur, erhöht wird. Allerdings ist dies nur eine Näherung. Bei großen Schwingungsamplituden wird die Abweichung des Potentials von der Parabelform sichtbar. Der Mittelwert der Atomabstände vergrößert sich. Für den makroskopischen Festkörper bedeutet diese eine Ausdehnung. Die Ausdehnung selbst ist von der Form dieses Potentials abhängig und damit für jeden Festkörper anders.

Die Längenänderung läßt sich schreiben als:

$$L(T_c) = L(0)(1 + \alpha T_c) \quad (3.1.21)$$

α bezeichnet man als **Ausdehnungskoeffizienten**. Der Index c der Temperatur T_c bezieht sich auf die Celsius-Skala. Durch die Messung einer temperaturabhängigen Längenänderung hat man automatisch eine Temperatur-Messmethode geschaffen. Bekanntestes Beispiel ist das Quecksilberthermometer bei dem die Ausdehnung von Quecksilber bestimmt wird.

Auch die Ausdehnung von Gasen kann als Maß für die Temperatur verwendet werden. Je nachdem ob man die Ausdehnung bei konstantem Druck

oder die Druckerhöhung bei konstantem Volumen betrachtet, läßt sich dies eindeutig mit einer Temperatur verknüpfen.

$$V(T_c) = V_0(1 + \gamma_v T_c) \quad (3.1.22)$$

$$p(T_c) = p_0(1 + \gamma_p T_c) \quad (3.1.23)$$

Die Temperaturskala wird durch fundamentale temperatur-abhängige Eigenschaften von Materialien geeicht. Hierbei wird oftmals der sog. **Tripelpunkt** gewählt. Wählt man eine bestimmte Kombination von Druck und Temperatur so ist am Tripelpunkt die Koexistenz von den drei Phasen *fest*, *flüssig* und *gasförmig* eines Materials möglich.

3.2 Wärme

3.2.1 Wärmemenge

Bei Zufuhr von Energie in ein Medium erhöht sich dessen Temperatur um einen Betrag ΔT . Die Energiemenge, die diese Temperaturerhöhung bewirkt bezeichnet man als **Wärme** oder **Wärmemenge** ΔQ . Wärme- und Temperaturänderung sind per Definition verknüpft wie:

$$\boxed{\Delta Q = cM\Delta T} \quad (3.2.1)$$

Die quantitative Temperaturerhöhung bei vorgegebener Energiezufuhr und Masse des Körpers hängt von einer Proportionalitätskonstante c ab. Diese bezeichnet man als **spezifische Wärme**. Bei Medien mit hoher spezifischer Wärme führt eine hohe Energiezufuhr nur zu einer kleinen Temperaturerhöhung. D.h. diese Medien können Energie gut speichern.

Die Maßeinheit für die Wärmemenge ist die **Kalorie**. Eine Kalorie ist dabei definiert als diejenige Energiemenge, die nötig ist, um ein Gramm Wasser von $14.5\text{ }^\circ\text{C}$ auf $15.5\text{ }^\circ\text{C}$ zu erwärmen (1 Kilokalorie entsprechen der Erwärmung von 1 kg Wasser). Wie groß ist allerdings die Energie in J die dafür notwendig ist. Dies läßt sich wie folgt bestimmen.

- **Umwandlung von Arbeit in Wärme**

Betrachten wir dazu ein Gewicht in einem Wasserbecken, das über ein Seil an einer Feder aufgehängt wird. Dieses Seil läuft über eine Kupfer-Rolle. Dreht man diese Rolle, so übt sie eine Reibungskraft F_R auf das Seil aus und hebt das Gewicht an. Ist die Reibungskraft so groß, daß das Gewicht in der Schwebe gehalten wird, so ist die Reibungskraft gleich der Gewichtskraft $F_R = mg$. Dabei wird die gegen die Reibung geleistete Arbeit komplett in Wärme umgewandelt. Die Arbeit bei N Umdrehungen ist $\Delta W = F_R \cdot \underbrace{Weg}_{2\pi r N}$. Damit wird die Wärmemenge ΔQ_1 zu:

$$\Delta W = mg \underbrace{2\pi r N}_{Weg} = \Delta Q_1 \quad (3.2.2)$$

mit r dem Radius der Rolle. Diese Wärmemenge führt zu einer Temperaturerhöhung des Systems, die gegeben ist aus der spezifischen Wärme der Kupfer-Rolle c_{Cu} und des umgebenden Wassers c_W .

$$\Delta Q_1 = (c_W M_W + c_{Cu} M_{Cu}) \Delta T_1 \quad (3.2.3)$$

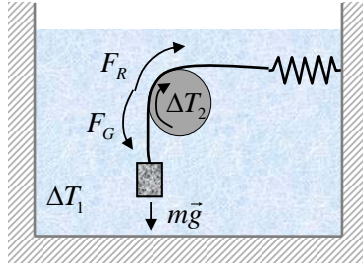


Abbildung 3.2.1: Umwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme.

In einem zweiten Versuch messen wir allein die Temperaturerhöhung ΔT_2 der Kupfer-Rolle *ohne* das umgebenden Wasser und wir erhalten:

$$\Delta Q_2 = \Delta W = c_{Cu} M_{Cu} \Delta T_2 \quad (3.2.4)$$

Die Wärmemenge, die *nur* vom Wasser aufgenommen wird ist demnach:

$$\Delta Q = c_W M_W \Delta T_1 = \left(1 - \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right) \Delta W \quad (3.2.5)$$

Jetzt drehen wir die Rolle N Umdrehungen bis sich die Temperatur um 1 Grad erhöht hat. Mit bekannter spezifischer Wärme von Wasser und bekannter Masse des Wassers läßt sich aus der zugeführten Energie dann die Umrechnung von Kalorie in Joule durchführen. Man bekommt den Zusammenhang: **1 cal = 4.1868 J**.

- **Mischungskalorimeter**

Falls die spezifische Wärme einer Substanz unbekannt ist, kann man sie über einen Wärmeübertrag bestimmen. Hierzu verwendet man ein **Mischungskalorimeter** (siehe Abb. 3.2.2): betrachten wir einen wassergefüllten thermisch isolierten Behälter (Dewar). Erwärmen wir einen Körper auf die Temperatur T_2 und setzen wir ihn in ein Wasserbecken der Temperatur T_1 , so stellt sich eine Mischtemperatur T_M ein. Diese Mischtemperatur hängt vom Wärmeausgleich zwischen Körper und Wasser ab. Die abgegebene Wärmemenge des Körpers muß gleich der aufgenommenen Wärmemenge des Wassers sein:

$$\Delta Q_K = -\Delta Q_W \quad (3.2.6)$$

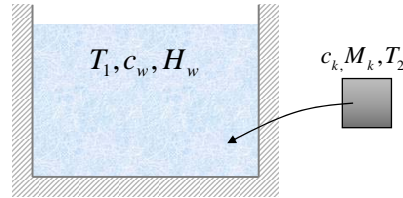


Abbildung 3.2.2: Mischungskalorimeter.

Die transportierten Wärmemengen sind proportional zur jeweiligen Temperaturänderung:

$$c_K M_K (T_M - T_2) = -c_W M_W (T_M - T_1) \quad (3.2.7)$$

Dies läßt sich nach der spezifischen Wärme des Körpers auflösen zu:

$$c_K = \frac{M_W c_W (T_M - T_1)}{M_K (T_2 - T_M)} \quad (3.2.8)$$

3.2.2 Die spezifische Wärmekapazität

Die spezifische Wärme läßt sich auch auf eine bestimmte Stoffmenge beziehen. Betrachten wir dazu eine Teilchenmenge von einem **Mol**:

$$N_A = 1\text{Mol} = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen} \quad (3.2.9)$$

N_A bezeichnet man als **Avogadro-Konstante**. Die Avogadro-Konstante ist so gewählt, daß das Atomgewicht bzw. Molekulgewicht einer Substanz multipliziert mit der Avogadro-Konstante genau die Massenzahl des Atoms oder Moleküls in Gramm ergibt: 1 Mol Kohlenstoffatome sind genau 12 Gramm, da ein Kohlenstoffatom die Massenzahl 12 amu hat (siehe Periodensystem); 1 Mol Wasser hat eine Masse von 18 Gramm, da H_2O aus 2 Wasserstoffatomen (Massenzahl 1 amu) und einem Sauerstoffatom (Massenzahl 16 amu) besteht. Diese Beziehung zwischen der Stoffmenge und dessen Gewicht entsprechen der Atomhypothese der Chemie. Mehrere Gesetze der Chemie können damit erklärt werden:

Gesetz von Dalton:

Die Gewichtsverhältnisse zweier sich zu verschiedenen chemischen Verbindungen vereinigender Elemente stehen im Verhältnis einfacher ganzer Zahlen zueinander.

Gesetz von Richter:

Elemente vereinigen sich stets im Verhältnis bestimmter Verbindungsgewichte, sogenannter Äquivalentgewichte oder ganzzahliger Vielfacher dieser Gewichte zu chemischen Bindungen.

Atomhypothese von Dalton:

Alle Stoffe sind nicht unendlich teilbar, sondern aus kleinsten, chemisch nicht weiter zerlegbaren Teilchen (Atomen) aufgebaut.

Diese Beziehungen gelten nicht nur für die Reaktion von Feststoffen miteinander, sondern auch für die Reaktion von Gasen untereinander. Hierbei vergleicht man die Volumina, die bei einer Reaktion sich ändern. Man macht die Beobachtung:

Gesetz von Gay-Lussac:

Das Volumenverhältnis gasförmiger Stoffe, die bei chemischen Reaktionen vollständig miteinander reagieren, läßt sich bei gegebener Temperatur und gegebenem Druck durch einfache ganze Zahlen wiedergeben.

Daraus folgerte Avogadro, daß:

Gesetz von Avogadro:

Gleiche Volumina idealer Gase enthalten bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl von Molekülen.

Hierbei entspricht bei einem idealen Gas bei 1 bar und $T=0^\circ$:

$$\boxed{1 \text{ Mol} = 22,4 \text{ l}} \quad (3.2.10)$$

Wenn wir die allgemeine Gasgleichung auf die Menge N_A beziehen bekommen wir:

$$pV_M = N_A k_B T = RT \quad (3.2.11)$$

Das Produkt aus Avogadro-Konstante und Boltzmannkonstante bezeichnet man als **allgemeine Gaskonstante** R :

$$R = 8,31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (3.2.12)$$

Die Wärmemenge, die einem Mol Teilchen zugeführt wird, wird dann durch die **molare Wärmekapazität** C oder **spezifische Wärmekapazität** charakterisiert:

$$\Delta Q = \underbrace{cM_{Mol}}_C \Delta T \quad (3.2.13)$$

C molare Waermekapazitaet

Im folgenden wollen wir die spezifische Wärmekapazität einiger Substanzen genauer diskutieren.

- **Wärmekapazität eines idealen Gases, konstantes Volumen**

Bei der Zufuhr von Wärme in ein Gas bei konstantem Volumen erhöht sich *nur* die Energie der Gasteilchen. Diese sog. **innere Energie** U eines Gases setzt sich aus der kinetischen Energie (Bewegung der Gasmoleküle) und der potentiellen Energie (Wechselwirkung der Gasmoleküle) zusammen. Bei der Zufuhr von Wärme in ein *ideales Gas* bei konstantem Volumen erhöht sich allerdings *nur* die Bewegungsenergie der Gasteilchen, da keine Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander existiert.

Diese innere Energie U eines idealen Gases kann in unterschiedlichen Arten der Bewegung eines Gasmoleküls gegeben sein, da für die Bewegung mehrere Freiheitsgrade existieren. Die zugeführte Energie verteilt sich *gleichmäßig* auf die Freiheitsgrade in dem System, wobei ein Gasteilchen pro Freiheitsgrad eine Energie von $\frac{1}{2}k_B T$ speichern kann. Diese Freiheitsgrade f lassen sich wie folgt abzählen.

- **Translation:** Jede Bewegung in eine Raumrichtung entspricht einem Freiheitsgrad. D.h. bei drei Raumrichtung ist $f = 3$
- **Schwingung:** Jede mögliche Schwingung eines Moleküls entspricht 2 Freiheitsgraden, da die Energie sowohl in der kinetischen Energie der Schwingung selbst als auch in der gespeicherten potentiellen Energie der ausgelenkten Atome bestehen kann. Somit besitzen sehr große Moleküle sehr viele Freiheitsgrade und können demnach sehr viel Energie speichern.
- **Rotation:** Jede Rotation um eine eindeutige Achse eines Gasteilchen entspricht einem Freiheitsgrad. Ein einzelnes Atom besitzt $f = 0$, da es im quantenmechanischen Sinne ein symmetrischer Körper mit kleinem Trägheitsmoment ist, der bei typischen Temperaturen wie Raumtemperatur keine Rotationsenergie speichern kann. Ein zweit-atomiges Molekül hat 2 Freiheitsgrade, da es um

zwei Achsen senkrecht zur Achse des Molekül rotieren kann. Die Rotation um die Molekülachse selbst kann in obigem Sinne wegen des kleinen Trägheitsmomentes wiederum keine Rotationsenergie speichern.

Ob allerdings in all diesen Freiheitsgraden Energie gespeichert werden kann oder nicht hängt von dem betrachteten System ab. Bei einem Festkörper zum Beispiel sitzen die einzelnen Atome auf festen Gitterplätzen und können somit keine Energie in der Translation speichern. Auch eine Rotation ist nicht möglich.

Im allgemeinen bekommen wir somit für die innere Energie in Abhängigkeit von der Zahl f der Freiheitsgrade:

$$U = \frac{1}{2} f N k_B T \quad (3.2.14)$$

Dies bezeichnet man als **Gleichverteilungssatz**. Daraus folgt direkt die molare Wärmekapazität falls das Volumen bei einer Energiezufuhr konstant bleibt. Die spezifische Wärmekapazität ist gegeben als die Änderung dieser inneren Energie pro Temperaturintervall.

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V = \frac{1}{2} f N_A k_B \quad (3.2.15)$$

Bei einem ein-atomigen Gas können weder Rotation noch Schwingung vorliegen, womit nur die drei Freiheitsgrade der Translation verbleiben. Wir bekommen:

$$U = \frac{3}{2} N_A k_B T = \frac{3}{2} RT \quad (3.2.16)$$

bzw.

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V = \frac{3}{2} R \quad (3.2.17)$$

- **Wärmekapazität eines idealen Gases, konstanter Druck**

Führt man die Energiezufuhr allerdings bei konstantem Druck durch, so wird bei einer Volumenänderung Arbeit gegen den Umgebungsdruck geleistet (siehe Abb. 3.2.3). Diese Arbeit gegen einen Druck p über eine Fläche A ist Kraft F mal Weg dx bzw.:

$$F \Delta x = p A \Delta x = p \Delta V \quad (3.2.18)$$

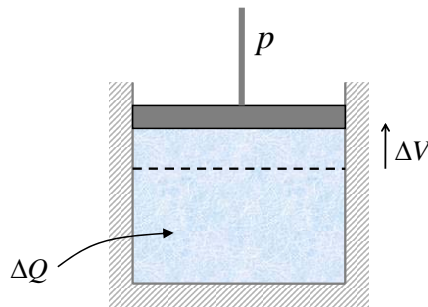


Abbildung 3.2.3: Spezifische Wärme bei konstantem Druck.

Demnach resultiert die zugeführte Energie ΔQ nicht nur in einer Temperaturänderung ΔT sondern auch in einer Volumenänderung. Vergleicht man dies mit der Änderung bei konstantem Volumen so fällt die Temperaturänderung ΔT bei gleichem ΔQ hier geringer aus, da zusätzlich noch Arbeit gegen den Druck p geleistet werden muß:

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p \Delta V \quad (3.2.19)$$

mit der allgemeinen Gasgleichung bekommt man:

$$pV = N_A k_B T \quad (3.2.20)$$

Unter Berücksichtigung der Volumenänderung um ΔV ergibt sich daraus:

$$p(V + \Delta V) = N_A k_B (T + \Delta T) \quad (3.2.21)$$

Damit ist ΔQ

$$\Delta Q = \underbrace{(C_V + N_A k_B)}_{C_p} \Delta T \quad (3.2.22)$$

mit

$$C_p = C_V + N_A k_B \quad (3.2.23)$$

Die Wärmekapazitäten bei konstantem Druck 3.2.23 und konstantem Volumen 3.2.15 lassen sich noch verknüpfen mit dem sogenannten **Adiabat-Koeffizienten** γ :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad (3.2.24)$$

Für ein ein-atomiges ideales Gas ergibt sich mit $f = 3$ ein Adiabat-Koeffizient von $\gamma = \frac{5}{3}$.

- **spezifische Wärme von Festkörpern**

Bei der Wärmekapazität von Festkörpern wird die Energie im wesentlichen in Form von Schwingungen der Gitteratome gespeichert. Falls alle Atome in den drei Raumrichtungen unabhängig voneinander schwingen können so bekommt man pro Schwingungsrichtung 2 Freiheitsgrade (potentielle und kinetische Energie der Oszillation). D.h. die innere Energie ist dann $U = 6\frac{1}{2}N_A k_B T$. Damit bekommt man für die Wärmekapazität eines Mols dann:

$$C_V = f\frac{1}{2}N_A k_B = 3R \quad (3.2.25)$$

Der Vergleich mit dem Experiment zeigt allerdings, daß dieses nicht mehr für tiefe Temperaturen gilt. Bei tiefen Temperaturen kommt der Quantisierungscharakter der Gitterschwingungen zum tragen und nicht mehr alle Schwingungsmoden sind für die Energieerhöhung zugänglich. Damit wird die Wärmekapazität bei niedrigen Temperaturen klein und läuft für $T \rightarrow 0$ nach $C_V \rightarrow 0$, wie in Abb. 3.2.4 veranschaulicht.

- **spezifische Wärme bei Phasenübergängen**

Ein Sonderfall tritt auf, wenn das Medium bei Energiezufuhr mehrere Phasen durchlaufen kann. Betrachtet man zum Beispiel die Erwärmung von Eis, so ist die Geschwindigkeit der Temperaturerhöhung umgekehrt proportional zur Wärmekapazität. Ist diese Wärmekapazität klein, so ist die Temperaturerhöhung groß. Ab 0° tritt Schmelzen ein, und die Temperatur erhöht sich *nicht* weiter, da jetzt die Energie für eine Phasenumwandlung aufgewendet werden muß, der **Schmelzwärme**. Erst nachdem das Eis *komplett* geschmolzen ist, beginnt die Temperatur

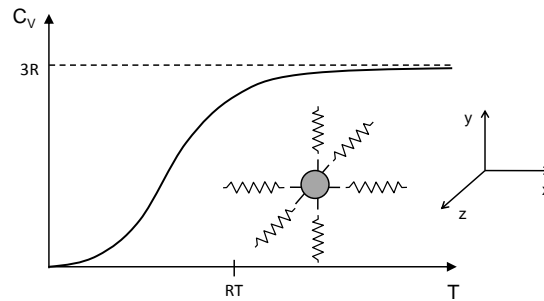


Abbildung 3.2.4: spezifische Wärme eines Festkörpers.

sich wieder zu erhöhen. Ein Maß für diese Erhöhung ist allerdings jetzt die Wärmekapazität der flüssigen Phase. Diese ist höher, da jetzt die Moleküle noch zusätzlich rotieren können. Demnach ist der Temperaturanstieg geringer. Am Siedepunkt, muß zunächst die **Verdampfungswärme** aufgewendet werden, d.h. die Temperatur bleibt wieder konstant bis die ganze Flüssigkeit verdampft ist. Erst danach erhöht sich die Temperatur weiter. Auch hier ist die Steigung der Temperaturerhöhung wieder geringer, da für die Gasmoleküle jetzt zusätzlich noch die Möglichkeit der freien Bewegung in den drei Raumrichtungen (Translation) besteht. Dies ist in Abb. 3.2.5 veranschaulicht.

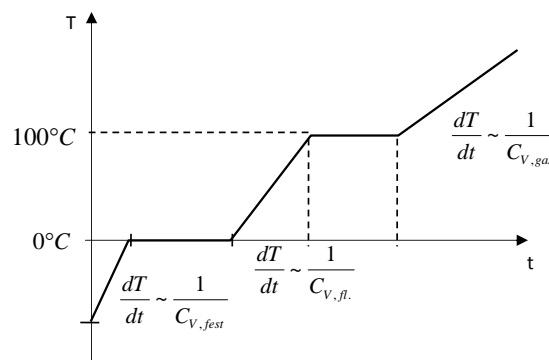


Abbildung 3.2.5: Temperaturänderung bei konstanter Energiezufuhr in Wasser.

Die aufgewendete Wärmemenge für einen Phasenübergang bezeichnet man auch als **latente Wärme**.

3.3 Wärmetransport

Viele technische Anwendungen basieren auf dem Transport von Wärme. Hierbei unterscheidet man Wärmeleitung, als den direkten Transport von Energie, und der Konvektion als den Transport von Energie mittels Massentransport. Hinzu kommt noch Transport von Wärme durch Wärmestrahlung.

3.3.1 Wärmeleitung

Bei der Wärmeleitung betrachten wir eine Wärmequelle, die an einem Ende eines Mediums eine Temperatur T_1 erzeugt, die über das Medium abgeleitet wird und das andere Ende auf die Temperatur T_2 bringt (siehe Abb. 3.3.1). Die Energiemenge, die pro Zeit transportiert wird, ist dann per Definition:

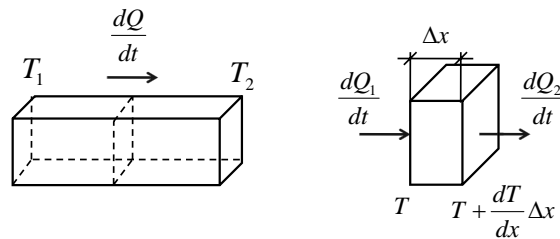


Abbildung 3.3.1: Wärmeleitung.

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (3.3.1)$$

mit A der Querschnittsfläche. λ bezeichnet man als **Wärmeleitfähigkeit** [$\text{Jm}^{-1}\text{K}^{-1}$].

Diese Gleichung 3.3.1 läßt sich umstellen und wir bekommen einen Ausdruck für die Wärmeleitung λ von:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \frac{dx}{dt} \frac{1}{A} \quad (3.3.2)$$

Man erkennt, daß die Wärmeleitung im wesentlichen von zwei Größen des Mediums abhängt. Der Term $\Delta Q/\Delta T$ entspricht der spezifischen Wärmekapazität der Substanz. Der Term dx/dt entspricht der Geschwindigkeit in der sich diese Anregung in dem Medium ausbreiten kann.

Betrachtet man zum Beispiel ein Metall, so wird die Energie im wesentlichen durch den Transport von Elektronen realisiert. D.h. die Wärmeleitung

in Metallen hängt neben der Wärmekapazität der elektronischen Anregung zusätzlich von der mittleren Geschwindigkeit ab, mit der die Elektronen durch den Festkörper fließen. Aus diesem Grund ist die elektrische und die thermische Leitfähigkeit in Metallen direkt proportional zueinander, und das Verhältnis linear von der Temperatur abhängig. Dies bezeichnet man als **Wiedemann-Franz-Gesetz**:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T \quad (3.3.3)$$

mit σ der elektrischen Leitfähigkeit. Der Vorfaktor der linearen Temperaturabhängigkeit besteht nur aus Naturkonstanten (k_B Boltzmannkonstante, e Elementarladung) und wird auch als Lorenz-Zahl L abgekürzt, $L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2$. Die lineare Temperaturabhängigkeit entsteht durch die spezifische Wärme der Elektronen in einem Metall, die nur bei der Wärmeleitfähigkeit aber nicht bei der elektrischen Leitfähigkeit eine Rolle spielt. Man behandelt dabei die Elektronen wie ein ideales Gas, wobei man berücksichtigt, daß auf Grund des Pauliverbotes nur ein Anteil proportional zu T an dem Transport teilnehmen kann². Die Wärmeleitfähigkeit von Kupfer ist somit viel größer als die von Gold oder Eisen³.

Wie läßt sich jetzt die Ausbreitung der Temperatur durch ein Material beschreiben? Die Änderung der Wärme und der Temperatur ist mit der spezifischen Wärme verknüpft wie:

$$dQ = cM dT \quad (3.3.4)$$

Dies läßt sich auf beiden Seiten nach der Zeit ableiten und man bekommt zunächst:

$$\frac{dQ}{dt} = cM \frac{dT}{dt} = c\rho dV \frac{dT}{dt} \quad (3.3.5)$$

Die Änderung der Wärme läßt sich aber alternativ dazu auch über die Wärmeleitung definieren: Betrachten wir dazu ein Volumenelement wobei auf der linken Seite ein Wärmemenge dQ_1 pro Zeit dt zuströmt und auf der rechten Seite eine Wärmemenge dQ_2 pro Zeit dt abströmt. Zusammen ergibt sich die Bilanz $\frac{dQ}{dt}$ für die Änderung der Wärmemenge im Volumenelement zu:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} - \frac{dQ_2}{dt} \quad (3.3.6)$$

²Details dieser Ableitung finden sie im Skript zu Physik IV.

³Die höchste Wärmeleitfähigkeit von allen Materialien besitzt allerdings ein Isolator: Diamant.

Falls die Temperatur auf der linken Seite T und auf der rechten Seite $T + \frac{dT}{dx}dx$ ist, bekommt man mit Gl. 3.3.1:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} + \lambda A \frac{d}{dx} \left(T + \frac{dT}{dx} dx \right) = \lambda A dx \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (3.3.7)$$

bzw. mit $dV = A dx$:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda dV \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (3.3.8)$$

Vergleichen wir Gl. 3.3.8 und 3.3.5, so bekommen wir:

$$c\rho dV \frac{dT}{dt} = \lambda dV \frac{d^2 T}{dx^2} \quad (3.3.9)$$

Man erhält eine Differentialgleichung für die räumliche und zeitliche Änderung der Temperatur:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{d^2 T}{dx^2}} \quad (3.3.10)$$

Der Form nach ist dies eine Diffusionsgleichung für die Ausbreitung von Wärme.

Der sog. **Wärmestrom** I ist die Energiemenge, die pro Zeit transportiert wird. Dies ist direkt

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (3.3.11)$$

Diese Gleichung läßt sich umstellen zu:

$$I = \lambda \underbrace{\frac{A}{\Delta x}}_{1/R} \Delta T \quad (3.3.12)$$

wobei das Minuszeichen mit einer entsprechenden Definition von ΔT weggelassen werden kann. Man erkennt, daß ein Temperaturunterschied einen Wärmestrom antreibt, der um so größer ist je kleiner die Größe R wird. Diese Größe R bezeichnet man als **Wärmewiderstand**:

$$\boxed{R = \frac{\Delta x}{\lambda A}} \quad (3.3.13)$$

Betrachtet man jetzt den Wärmetransport durch eine gegebene Struktur, z.B. die Isolation einer Hausmauer, so kann man unterschiedliche Fälle diskutieren (siehe Abb. 3.3.2).

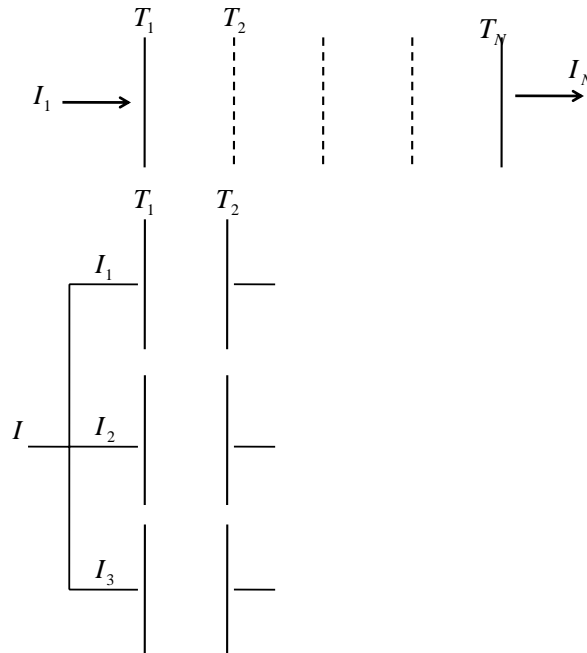


Abbildung 3.3.2: Serien- und Parallelschaltung von Wärmewiderständen.

- **Serienschaltung**

In einer Serienschaltung muß der Wärmestrom eine Abfolge von unterschiedlichen Materialien nacheinander durchdringen. Jede dieser Schichten n habe einen eigenen Wärmewiderstand R_n . Nachdem der Wärmestrom in der Struktur erhalten sein muß, bekommt man:

$$I = \frac{1}{R_1} \Delta T_1 = \frac{1}{R_2} \Delta T_2 = \dots = \frac{1}{R_N} \Delta T_N \quad (3.3.14)$$

mit

$$I = \frac{1}{R_1} (T_1 - T_2) = \frac{1}{R_2} (T_2 - T_3) \quad (3.3.15)$$

Der Vergleich von zwei aufeinander folgenden Termen zeigt:

$$(T_1 - T_3) = I (R_1 + R_2) \quad (3.3.16)$$

Für N Schichten bekommen wir mit dem Ausdruck von

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + \dots + R_N \quad (3.3.17)$$

Einen Wärmestrom von:

$$I = \frac{1}{R} (T_1 - T_N) \quad (3.3.18)$$

D.h. bei der Serienschaltung addieren sich die einzelnen Wärmewiderstände zu einem Gesamtwiderstand R .

• Parallelschaltung

Bei einer Parallelschaltung von Wärmewiderständen, d.h. Isolationen nebeneinander (Beispiel, Wand und Fenster) addieren sich die Wärmeströme durch die einzelnen Schichten, die Temperaturdifferenz bleibt allerdings gleich. Wir bekommen somit:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N = \frac{1}{R_1} (T_1 - T_2) + \frac{1}{R_2} (T_1 - T_2) + \dots + \frac{1}{R_N} (T_1 - T_2) \quad (3.3.19)$$

Auch dies läßt sich verkürzt darstellen als:

$$I = \frac{1}{R} (T_1 - T_2) \quad (3.3.20)$$

mit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (3.3.21)$$

Man erkennt, daß bei einer Parallelschaltung der Gesamtwiderstand sich aus der Addition der Kehrwerte der einzelnen Wärmewiderstände ergibt.

Oftmals wird für bestimmte Gegenstände auch der sog. **k-Wert** angegeben. Dieser beschreibt den Wärmetransport für ein Medium mit *gegebener* Dicke d . Der k-Wert definiert sich als:

$$k = \frac{\lambda}{d} \quad (3.3.22)$$

Damit wird z.B. der Energietransport durch eine 3 mm starke Glasscheibe beschrieben. Hat man eine Abfolge von einzelnen Schichten, die den Wärmetransport limitieren, so berechnet sich der gesamte k-Wert zu:

$$\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots \quad (3.3.23)$$

Bei der Wärmekonvektion findet zusätzlich noch ein Massentransport statt. Diese Art des Wärmetransports ist in der Regel sehr viel effizienter als der Transport durch Wärmeleitung. Klassische Beispiele sind hier die Konvektion als wesentlicher Mechanismus um die Raumluft in einem Gebäude umzuwälzen oder die Konvektion der geschmolzenen Gesteinsmassen im Inneren der Erde.

Das Zusammenspiel aus Wärmeleitung und Konvektion läßt sich am Beispiel der Fensterverglasung erläutern (siehe Abb. 3.3.3). Eine einfache 4 mm Glasscheibe hat einen k -Wert von $200 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Allerdings werden die angrenzenden Luftschichten durch die Oberflächenreibung in ihrem Strömungsverhalten behindert. Aus diesem Grund erhöhen sich die Isolationseigenschaften durch zwei 1 cm starke Luftschichten auf den beiden Seiten der Fensterscheiben, da deren Wärmeleitfähigkeit sehr viel geringer als die von Glas sind. Nach Gl. 3.3.23, ergibt dies zusammen einen k -Wert von $5.6 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Bei einer Doppelverglasung, verwendet man zwei planparallele Glasscheiben, um eine isolierende Gasschicht (in der Regel Argon) zu schaffen. Diese Gasschicht darf nicht zu dick sein, da sonst die Konvektion im Inneren des Doppelfenster, die isolierende Wirkung zerstören würde (siehe Abb. 3.3.3). D.h. ein Optimum der Gasschichtdicke liegt bei ca. 1 cm. Damit reduziert sich bei einem Doppelfenster der k -Wert auf $3 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Ein wesentlicher Vorteil entsteht dann noch durch den Einsatz von Wärmeschutzbeschichtungen. Durch entsprechende Anti-Reflexions-Beschichtungen für die Wärmestrahlung aus dem Innenraum, erniedrigt sich der k -Wert auf $0.6 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Solch niedrige k -Werte sind identisch zu k -Werten von isolierten Steinmauern.

3.3.2 Wärmestrahlung

Schließlich haben wir noch Wärmetransport durch Strahlung zu betrachten. Ein Körper bei einer gegebenen Temperatur strahlt Energie ab entsprechend:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = EFd\Omega \quad (3.3.24)$$

mit E dem sog. **Emissionsvermögen**, F der Fläche und $d\Omega$ dem Raumwinkel (d.h. in welche Richtungen kann der Körper abstrahlen). In umgekehrter Weise kann der Körper auch Energie durch Strahlung aufnehmen gemäß seinem sog. **Absorptionsvermögen** A . Es zeigt sich daß das Emissions- und

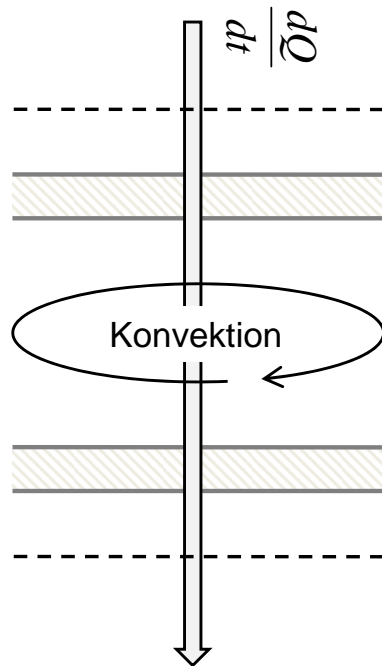


Abbildung 3.3.3: Bei Fenstern wird in der Regel eine Doppelverglasung verwendet. Dies reduziert signifikant die Wärmeleitung, da die Konvektion im Innern unterbunden ist.

Absorptionsvermögen eines beliebigen Körpers nicht unabhängig voneinander ist, sondern ein festes Verhältnis hat, das *nur* noch von der Temperatur abhängt:

$$\boxed{f(T) = \frac{E}{A}} \quad (3.3.25)$$

Wie läßt sich dies ableiten? Betrachten wir dazu die Anordnung wie in Abb. 3.3.4 gezeigt. Ein Körper wird auf eine Temperatur T gebracht. Auf einer Seite strahlt er über eine schwarze Fläche ab und auf der anderen Seite über eine weiße Fläche. Ein Körper gleichen Materials wird den Oberflächen gegenüber angebracht, dessen Oberfläche in jeweils gleicher Weise entweder schwarz oder weiß ist.

Mißt man die Temperaturen der beiden Testkörper so erkennt man, daß der schwarz mattierte Körper wärmer als der weiße wird. Die transportierte Wärmemenge hängt von dem Produkt aus Emissionsvermögen und Absorptionsvermögen ab. Die transportierte Wärmemengen Q_1 auf der Seite auf

der sich die schwarzen Oberflächen gegenüberstehen und die Wärmemenge Q_2 auf der Seite auf der sich die weißen Oberflächen gegenüberstehen sind:

$$Q_1 \propto E_{\text{schwarz}} A'_{\text{schwarz}} \quad (3.3.26)$$

$$Q_2 \propto E_{\text{weiß}} A'_{\text{weiß}} \quad (3.3.27)$$

Die gestrichenen Größen bezeichnen jeweils die Oberflächen der beiden Testkörper. In einem zweiten Schritt dreht man den mittleren Körper um 180° und bringt jetzt die weiße vor die schwarze Oberfläche und umgekehrt. Der Wärmetransport ist dann

$$Q_1 \propto E_{\text{weiß}} A'_{\text{schwarz}} \quad (3.3.28)$$

$$Q_2 \propto E_{\text{schwarz}} A'_{\text{weiß}} \quad (3.3.29)$$

Vergleicht man jetzt die Temperaturen, so erkennt man daß beide *gleich* sind. D.h. die transportierten Wärmemengen sind identisch. Damit muß gelten und mit $Q_1 = Q_2$ gilt dann:

$$E_{\text{weiß}} A'_{\text{schwarz}} = E_{\text{schwarz}} A'_{\text{weiß}} \quad (3.3.30)$$

Damit erkennt man daß gelten muß:

$$\frac{E_{\text{weiß}}}{A_{\text{weiß}}} = \frac{E_{\text{schwarz}}}{A_{\text{schwarz}}} = \text{const.} = f(T) \quad (3.3.31)$$

d.h. das Emissions- und Absorptionsvermögen bilden ein festes Verhältnis zueinander. Dieses Verhältnis ist allein eine Funktion der Temperatur hängt aber *nicht* von dem Material ab. Das bedeutet, dass ein Körper, der sehr gut absorbiert (großes A) auch gleichzeitig ein sehr guter Emittor (großes E) von Wärmestrahlung ist. Das Optimum kann durch einen sogenannten **schwarzen Strahler** realisiert werden. Hierbei verwendet man zum Beispiel einen Hohlraum aus Metall, der so gebaut ist, daß einfallendes Licht dort nicht mehr hinaus dringen kann. Erhöht man jetzt die Temperatur dieses Hohlraums auf Rotglut, so beobachtet man, daß der vormals schwärzeste Bereich auch derjenige ist, der am besten die Strahlung emittiert.

Durch diese Verkopplung von Emissions- und Absorptionsvermögen ist es nahe liegend einen Wärmestrahler schwarz zu färben, um seine Abstrahlung zu optimieren.

Ein schwarzer Körper bei einer Temperatur T emittiert Wärmestrahlung mit einer charakteristischen Verteilung bezüglich der Wellenlänge, die

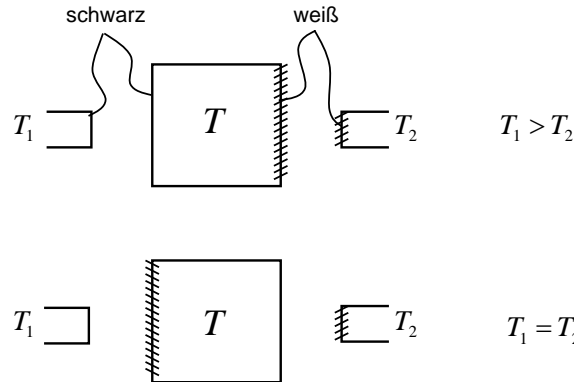


Abbildung 3.3.4: Ein Körper bei einer Temperatur T besitzt eine weiße und ein geschwärzte Oberfläche. Ihm Gegenüber befinden sich zwei Körper, die durch die Wärmestrahlung auf T_1 bzw. T_2 erwärmt werden.

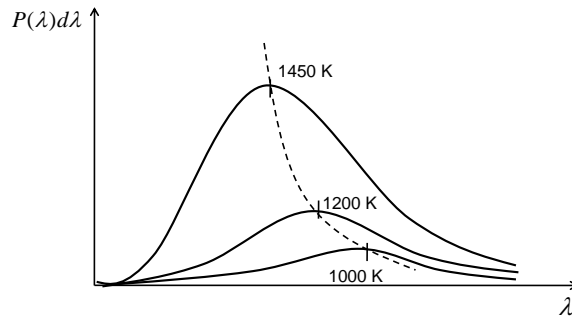


Abbildung 3.3.5: Spektrale Verteilung der emittierten Leistung.

Planck’sche Verteilung, wie sie in Abb. 3.3.5 gezeigt ist. Zu höheren Temperaturen verschiebt sich das Maximum zu kürzeren Wellenlängen (z.B. rot glühend zu blau glühend)

Die abgestrahlte Leistung folgt einer charakteristischen Abhängigkeit gemäß dem **Stefan-Boltzmann-Gesetz**:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \sigma F T^4} \tag{3.3.32}$$

mit F der emittierenden Fläche und $\sigma = 5.67051 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ der Stefan-Boltzmann-Konstante. Diese starke Temperaturabhängigkeit bedingt, daß gerade bei hohen Temperaturen die Wärmeverluste durch Strahlung do-

minieren.

3.4 Hauptsätze der Wärmelehre

Wie in der Mechanik so gibt es auch in der Wärmelehre entsprechende Erhaltungssätze. Diese bezeichnet man als Hauptsätze der Thermodynamik.

3.4.1 Zustandsgrößen, Zustandsänderungen

Die Thermodynamik beschreibt ein System mit einem Satz von Zustandsgrößen. Man unterscheidet **intensive** und **extensive** Zustandsgrößen. Diese unterscheiden sich hinsichtlich des Resultats bei dem Zusammenfügen von zwei Systemen.

- **intensiv:** Intensive Zustandsgrößen sind zum Beispiel der Druck oder die Temperatur in einem System. Fügt man zwei Systeme zusammen, so stellt sich für das neue Gesamtsystem ein *Mittelwert* für Temperatur und Druck ein.
- **extensiv:** Extensive Zustandsgrößen sind zum Beispiel Volumen, Energie und Teilchenzahl. Fügt man zwei Systeme zusammen, so stellt sich für das neue Gesamtsystem die Summe der Zustandsgrößen der einzelnen Systeme ein.

In der Wärmelehre betrachtet man ein System, das unterschiedliche Zustände einnehmen kann. Im Falle eines idealen Gases entspricht jeder dieser Zustände einer neuen Realisierung der Zustandsgrößen p, V, N, T , die der Zustandsgleichung $pV = Nk_B T$ genügen müssen. Ändert sich der Zustand allerdings von einer Bedingung p_1, T_1, V_1, N_1 zu p_2, T_2, V_2, N_2 kommt es auf die Art der Prozessführung und das betrachtete System an, welcher neuer Zustand sich einstellt. So kann zum Beispiel eine Verkleinerung des Volumens je nach Prozessführung zu einer anderen Kombination von p und T führen (siehe isotherme bzw. adiabatische Kompression unten).

Zunächst unterscheidet man:

- **offene Systeme:** bei einem offenen System kann ein Prozeß Wärme und/oder Teilchen mit der Umgebung austauschen. Typischer Fall ist ein Wärmebad, bei dem Energie in das System hinein- oder hinausfließen muß, damit eine konstante Temperatur herrscht, die durch das Wärmebad vorgegeben ist.
- **geschlossene Systeme:** bei einem geschlossenen System findet kein Austausch mit der Umgebung statt. Dies ist der Fall für isolierte Prozesse.

Man kann zudem grundsätzlich zwei Arten der Zustandsänderung unterscheiden:

- **reversibel:** bei einer reversiblen Zustandsänderung gelangt man wieder an den Ausgangspunkt bezüglich p, T, V, N zurück, wenn man den Prozeß rückwärts ablaufen läßt. Die meisten Ableitungen der Wärmelehre zur Beschreibung von Kreisprozessen gehen zunächst von reversiblen Zustandsänderungen aus.
- **irreversibel:** Zustandsänderungen in realen Prozessen sind allerdings oftmals irreversibel, da Reibung überwunden werden muß oder bei einer Volumenausdehnung ein Kolben beschleunigt wird. Dies führt jeweils zu einem Verlust an Energie, die durch eine Umkehrung des Prozesses nicht mehr zurückgewonnen werden kann.

Für die Änderung von Zustandsgrößen verwendet man folgende Bezeichnungen je nach Prozessführung, wie in Abb. 3.4.1 illustriert:

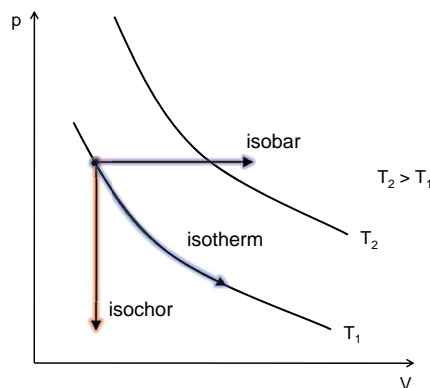


Abbildung 3.4.1: Zustandsänderungen in einem idealen Gas.

- **isotherm, $T=\text{const.}$:** bei einem isothermen Prozeß ändert sich die Temperatur nicht. Dies ist in der Regel der Fall, wenn eine Reaktion in einem Wärmebad der Temperatur T stattfindet.
- **isobar, $p=\text{const.}$:** bei einem isobaren Prozeß ändert sich der Druck nicht. Dies ist in der Regel der Fall bei chemischen Reaktionen die offen bei Umgebungsdruck ablaufen. Hierbei muß der Prozeß in der Regel gegen den Umgebungsdruck Arbeit leisten oder kann von außen Arbeit aufnehmen.

- **isochor, $V=\text{const.}$:** bei einem isochoren Prozeß ändert sich das Volumen nicht. Dies in der Regel der Fall, wenn wir einen Druckbehälter betrachten. Ein isochorer Prozeß kann auch gleichzeitig ein isothermer Prozeß sein, wenn dieser Druckbehälter ein Wärmebad darstellt.
- **adiabatisch, $Q=\text{const.}$:** Bei einem adiabatischen Prozeß kann sich die Wärmemenge in dem System nicht ändern. Dies ist in der Regel der Fall für isolierte Systeme bei denen kein *Temperatúrausgleich* stattfinden kann. Diese Isolation von der Umgebung kann auch durch schnelle Zustandsänderungen realisiert sein, da auf kurzen Zeitskalen ein System auch keine Möglichkeit hat seine Temperatur mit der Umgebung auszugleichen. Wenn sich die Wärmemenge nicht ändert ist der Prozeß automatisch auch **isentrop** ($S=\text{const.}$).

3.4.2 Der erste Hauptsatz

Bei der Ableitung der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck hatten wir die Beziehung:

$$dQ = dU + pdV \quad (3.4.1)$$

abgeleitet, d.h. die zugeführte Wärme fließt in eine Erhöhung der inneren Energie und eine Expansion des Gases. Mit der Arbeit $\Delta W = -p\Delta V$ können wir dies schreiben zu:

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W \quad (3.4.2)$$

Dies läßt sich umschrieben zu:

$$\boxed{\Delta U = \Delta Q + \Delta W} \quad (3.4.3)$$

Dies bezeichnet man als **ersten Hauptsatz**. Die Erhöhung der inneren Energie ΔU in einem System kann durch Zufuhr von Wärme ΔQ oder durch von außen zugeführte Arbeit ΔW erfolgen (siehe Experiment von Joule Abb. 3.4.2). Dieser erste Hauptsatz ist eine Erfahrungstatsache und kann nicht aus grundlegenden Prinzipien abgeleitet werden.

Die zugeführte Arbeit für ein ideales Gas bei einer Volumenänderung ΔV ist:

$$\Delta W = F\Delta x = -pA\Delta x = -p\Delta V \quad (3.4.4)$$

D.h. komprimieren wir ein Gas, so ist $\Delta V < 0$ und damit $\Delta W > 0$. D.h. wir stecken Energie in das System hinein. Damit bekommen wir als Energiesatz für ein ideales Gas:

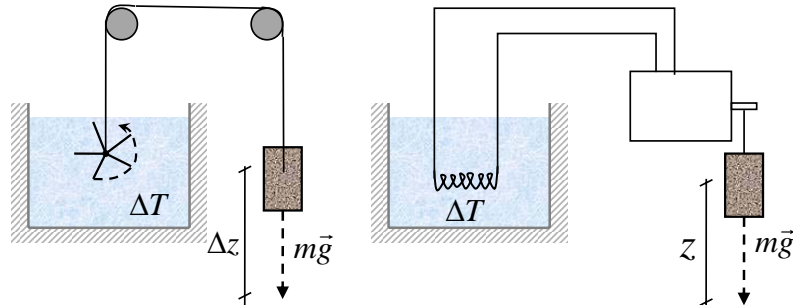


Abbildung 3.4.2: Umwandlung von Arbeit in Wärme im Experiment von Joule. Ein Gewicht gibt eine potentielle Energie $mg\Delta z$ ab und treibt entweder einen Rührer (links) oder einen Generator (Umwandlungseffizienz 100%) an, der eine Glühwendel aufheizt (rechts). In beiden Fällen beobachtet man die gleiche Temperaturerhöhung ΔT einer Flüssigkeit.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W = \Delta Q - pdV \quad (3.4.5)$$

Der erste Hauptsatz soll jetzt für einige Zustandsänderungen genauer beschrieben werden, wie in Abb. 3.4.3 illustriert.

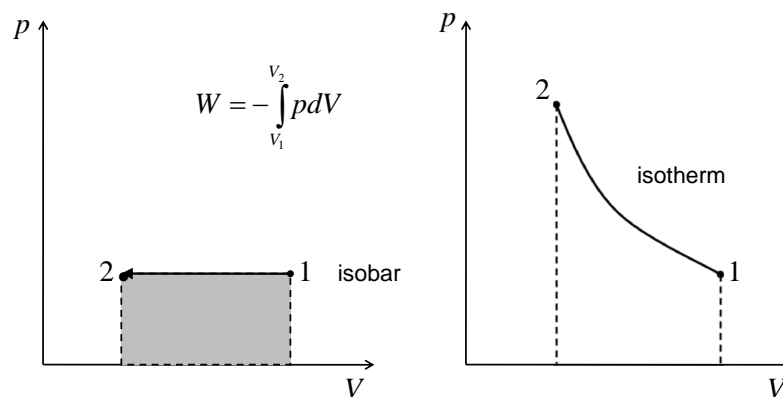


Abbildung 3.4.3: Prozesse im pV-Diagramm eines idealen Gases.

- $V = \text{const.}$, isochor

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der das Volumen konstant bleibt. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \quad (3.4.6)$$

da $V = \text{const.}$ und

$$dQ = dU = C_V dT \quad (3.4.7)$$

gilt, bekommen wir:

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V \quad (3.4.8)$$

D.h. die zugeführte Wärme wird komplett in innere Energie umgewandelt.

- **$p = \text{const.}$, isobar**

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der der Druck konstant bleibt. Dies ist ein häufiger Fall bei Reaktionen der Chemie. Dort ist der Umgebungsdruck konstant und ein Gas muß sich z.B. beim Ablau- fen der chemischen Reaktion gegenüber dem Luftdruck der Umgebung ausdehnen. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \quad (3.4.9)$$

Die Wärmemenge ist

$$dQ = dU + pdV = C_p dT \quad (3.4.10)$$

Zur einfacheren Beschreibung führen wir eine neue Größe H ein, die **Enthalpie**:

$$\boxed{H = U + pV} \quad (3.4.11)$$

Leitet man die Enthalpie nach der Produktregel ab, so ergibt sich:

$$dH = dU + pdV + dpV \quad (3.4.12)$$

bzw. nach dem Einsetzen von Gl. 3.4.10

$$dH = dQ + V dp \quad (3.4.13)$$

Da $dp = 0$ gilt, ist für die isobare Zustandsänderung $dQ = dH$, d.h. man bekommt:

$$C_p = \left. \frac{dH}{dT} \right|_p \quad (3.4.14)$$

Somit beschreibt die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck die Änderung der Enthalpie mit der Temperatur während die spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen die Änderung der inneren Energie mit der Temperatur ausdrückt.

Für die Betrachtung eines gegebenen Systems muß man somit die passende Formulierung der Energie- bzw. Enthalpieerhaltung wählen: bei isochoren Systemen stellt sich ein Minimum der inneren Energie ein $dU = 0$, während man bei isobaren Systemen ein Minimum der Enthalpie $dH = 0$ bekommt.

- **$T = \text{const.}$, isotherm**

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der die Temperatur konstant bleibt. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - p dV \quad (3.4.15)$$

Bei einem idealen Gas hängt die innere Energie *nur* von der Temperatur ab:

$$U = \frac{1}{2} f N_A k_B T \quad (3.4.16)$$

Da somit bei isothermen Prozessen $dU = 0$ gelten muß, bekommen wir:

$$dQ = p dV \quad (3.4.17)$$

d.h. Wärme wird *vollständig* in Arbeit umgewandelt. Mit

$$pV = N k_B T \quad (3.4.18)$$

bekommt man schließlich.

$$pV = \text{const.} \quad (3.4.19)$$

Dies ist wieder das Gesetz von Boyle-Mariott.

• $dQ = 0$, **adiabatisch**

Betrachten wir eine Zustandsänderung bei der *keine* Wärme ausgetauscht wird. Dieser Vorgang kommt häufig vor, da viele Systeme ihren Zustand schnell ändern, so daß der Wärmetransport auf dieser Skala sehr ineffizient erfolgt und damit eine Angleichung von Temperaturen nicht stattfindet. Typisches Beispiel ist die adiabatische Kompression eines Gases in einer Luftpumpe. Hier ist der Kontakt zur Umgebung so gering, daß das expandierende/komprimierte Gas keine Möglichkeit zum Temperatenausgleich hat. Die Energieerhaltung war:

$$dU = dQ - pdV \quad (3.4.20)$$

mit $dQ = 0$ bekommen wir:

$$dU = C_V dT = -pdV \quad (3.4.21)$$

mit dem idealen Gasgesetz ($pV = Nk_B T$) läßt sich dies umschreiben zu:

$$C_V \frac{dT}{T} = -N_A k_B \frac{dV}{V} \quad (3.4.22)$$

Integriert man auf beiden Seiten bekommen wir:

$$C_V \ln T = -N_A k_B \ln V + \text{const.} \quad (3.4.23)$$

bzw:

$$\ln (T^{C_V} V^{N_A k_B}) = \text{const.} \quad (3.4.24)$$

Aus der Ableitung der spezifischen Wärmekapazität eines idealen Gases wissen wir, daß gelten muß:

$$N_A k_B = C_p - C_V \quad (3.4.25)$$

mit dem **Adiabatenkoeffizienten** $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ bekommen wir dadurch:

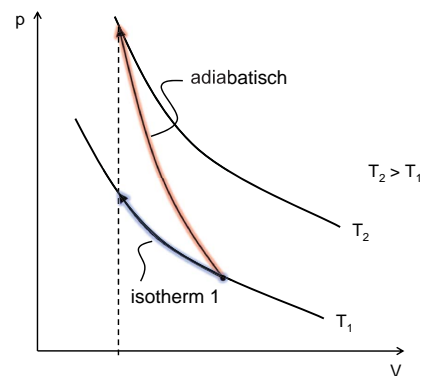


Abbildung 3.4.4: Vergleich einer isothermen und einer adiabatischen Zustandsänderung.

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{const.}} \quad (3.4.26)$$

bzw:

$$\boxed{pV^{\gamma} = \text{const.}} \quad (3.4.27)$$

Für ein ein-atomiges ideales Gas war $\gamma = 5/3$. D.h. die Zustandskurven für adiabatische Zustandsänderungen in Abb. 3.4.4 laufen wie $p \propto V^{-5/3}$. Damit laufen sie steiler als die isothermen Zustandskurven ($p \propto V^{-1}$)

Vergleicht man zwei Punkte im pV -Diagramm, so kann man zwei Gleichungen benutzen, um den bekannten Zustand p_1, T_1 und V_1 in einen neuen Zustand bei p_2, T_2 und V_2 zu überführen. Es sei z.B. vorgegeben, daß ein Gas von einem Volumen V_1 zu einem Volumen V_2 komprimiert wird.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad (3.4.28)$$

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \quad (3.4.29)$$

D.h. aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die Unbekannten p_2 und T_2 berechnen.

Der Adiabatenkoeffizient läßt sich in dem *Experiment von Ruechard* bestimmen. Hierzu verwendet man ein Gasreservoir bei einem Druck

p , das durch einen beweglichen Kolben abgeschlossen wird (siehe Abb. 3.4.5). Dieser Kolben möge mit einer Frequenz ω_0 um seine Gleichgewichtslage schwingen. Bei diesem Schwingen komprimiert er das Gas.

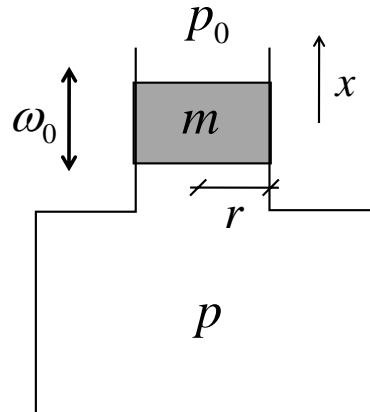


Abbildung 3.4.5: Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten γ : Ein Kolben der Masse m wird in Schwingung versetzt und komprimiert dabei ein Volumen V adiabatisch.

Im Gleichgewicht herrsche ein Druck p_0 außen und ein Druck p innen. Der Druck im Innern des Behälters entsteht durch die Addition der Gewichtskraft des Kolbens und des Außendruckes. Mit einer Masse m des Kolbens (Radius r) ergibt sich:

$$p = p_0 + \frac{mg}{\pi r^2} \quad (3.4.30)$$

Durch eine Änderung des Druckes um dp beginnt der Kolben sich um seine Gleichgewichtslage ($x = 0$) zu bewegen. Die rückstellende Kraft ist $dF = Adp$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \pi r^2 dp \quad (3.4.31)$$

Diese Bewegung erfolgt so schnell, daß die Zustandsänderung adiabatisch erfolgt. D.h. es gilt:

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad p(V) = \text{const.} \cdot V^{-\gamma} \quad (3.4.32)$$

Diese Gleichung abgeleitet nach dem Volumen ergibt:

$$dp = -\frac{p\gamma}{V}dV \quad (3.4.33)$$

Mit der Volumenänderung $dV = r^2\pi x$ ergibt sich schließlich:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\pi r^2\frac{p\gamma}{V}r^2\pi x \quad (3.4.34)$$

Dies ist der Form nach eine Schwingungsgleichung mit der Eigenfrequenz:

$$\omega_0^2 = \gamma\frac{\pi^2 r^4 p}{mV} \quad (3.4.35)$$

Mit bekanntem r , m , p und V läßt sich somit aus der Messung der Frequenz ω_0 der Adiabatenkoeffizient γ ermitteln.

3.4.3 Der zweite Hauptsatz

Die Energieerhaltung beschreibt nur die Gesamtenergie eines Systems als zusammengesetzt aus der Wärmemenge und der an dem System geleisteten Arbeit. Doch wie läßt sich Wärme in Arbeit umwandeln? Der Energieinhalt in Form von Wärme und Arbeit ist von unterschiedlichem Charakter, da Wärme Energie in der ungeordneten Bewegung der Gasteilchen speichert, während die Arbeit (zum Beispiel die Bewegung eines Gasstempels) jeweils nur in *eine Richtung* Arbeit hinein steckt bzw. aus dem System abrufte. Dies ist in Abb. 3.4.6 veranschaulicht.

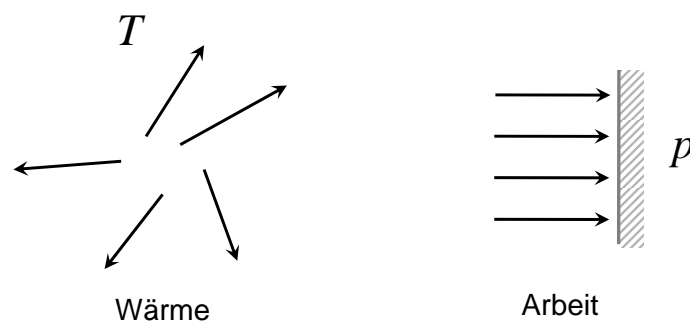


Abbildung 3.4.6: Unterschied zwischen Wärme und Arbeit.

Im mikroskopischen Sinn ist die Temperatur auch immer Ausdruck für das Maß an *Unordnung* in einem System. Bewegen sich allerdings alle Teilchen in eine Richtung, so ist dieser Zustand der *Ordnung* gleichbedeutend mit einer sehr *niedrigen* Temperatur. D.h. möchte man ein System in einen geordneten Zustand überführen, so muß es gekühlt werden. Beispiel hierfür ist die Strahlkühlung bei Beschleunigern, die bewirkt daß alle Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit in die gleiche Richtung fliegen.

Abb. 3.4.5 verdeutlicht auch, daß die Umwandlung von Arbeit in Wärme (*Ordnung* \rightarrow *Unordnung*) zu 100 % erfolgen kann: zugeführte Arbeit durch einen Kolben erhöht die Geschwindigkeit der Teilchen in eine Richtung. Durch die Stöße der Teilchen untereinander wird die Geschwindigkeitsverteilung allerdings schnell räumlich isotrop und man hat einen Zustand mit definierter Temperatur T erreicht. Die umgekehrte Umwandlung von Wärme in Arbeit (*Unordnung* \rightarrow *Ordnung*) kann allerdings nicht so ohne weiteres ablaufen, da das Antreiben eines Kolbens nur eine Richtung der isotropen Geschwindigkeitsverteilung beeinflusst. Diese zunächst anschauliche Ableitung wollen wir im folgenden genauer begründen und quantifizieren.

Der Carnot-Prozeß

Um die Effizienz der Umwandlung von Wärme in Arbeit zu diskutieren, betrachten wir einen Kreisprozeß, der im pV-Diagramm eines idealen Gases wieder zum Ausgangspunkt zurück führt. Solche Kreisprozesse sind in Abb. 3.4.7 veranschaulicht. Je nach "Laufriichtung" kann man zwei Arten unterscheiden:

- "Wärmepumpe"

Bei einer Wärmepumpe wird einer Maschine Arbeit zugeführt, die eine Wärmemenge ΔQ einem kälteren Reservoir entnimmt und danach an ein wärmeres Reservoir wieder abgibt (Beispiel Kühlschranks). Bei einer Wärmepumpe ist die Laufriichtung des Kreisprozesses *links* herum, da das Integral $\Delta W = - \int p dV$ positiv wird. D.h. die Maschine muß Arbeit *aufnehmen*.

- "Wärmekraftmaschine"

Bei einer Wärmekraftmaschine wird einer Maschine Wärme zugeführt, die diese in Arbeit umwandelt (Beispiel Dampfmaschine). Bei einer Wärmekraftmaschine ist die Laufriichtung des Kreisprozesses *rechts* herum, da das Integral $\Delta W = - \int p dV$ negativ wird. D.h. die Maschine gibt Arbeit *ab*.

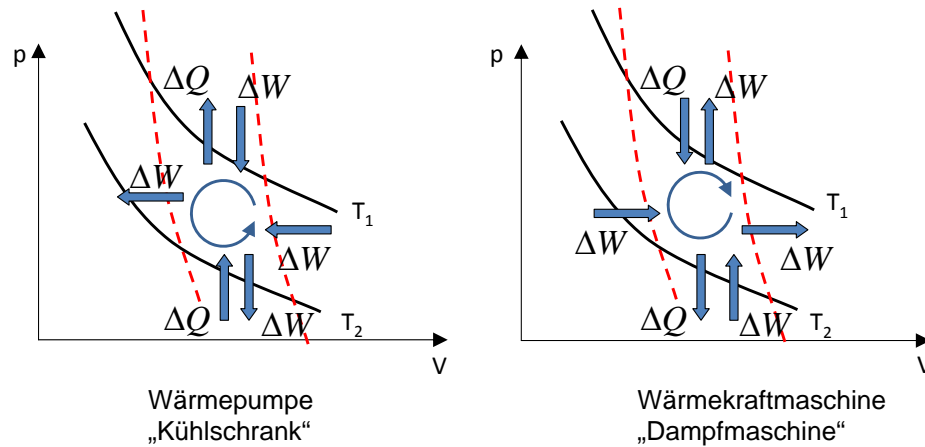


Abbildung 3.4.7: Kreisprozeß, der sich aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten zusammensetzt: Erfolgt der Prozeßablauf im Uhrzeigersinn erhält man eine Wärmekraftmaschine; gegen den Uhrzeigersinn erhält man eine Wärmepumpe.

Die kontinuierliche Umwandlung von Wärme in Arbeit kann in vielen Kreisprozessen realisiert werden. Beim sog. **Carnot'schen** Kreisprozeß (siehe Abb. 3.4.8) erzielt man allerdings den maximalen Wirkungsgrad. Bei diesem Prozeß durchläuft ein ideales Gas eine zyklische Zustandsänderung bestehen aus einer isothermen und adiabatischen Expansion und einer isothermen und adiabatischen Kompression. Der Prozeß durchläuft zyklisch 4 Punkte im pV -Diagramm $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Die Temperatur der wärmeren Isotherme sei T_1 , die der kälteren T_2 . Die Volumina an den 4 Punkten sind jeweils V_1 , V_2 , V_3 und V_4 . Der Druck stellt sich immer gemäß der Zustandsgleichung eines idealen Gases ein. Um den Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses zu bestimmen müssen wir die Wärmemengen und die Arbeit in jedem dieser Teilschritte bilanzieren:

- **isotherme Expansion $1 \rightarrow 2$**

Bei der isothermen Expansion gilt $dU = 0$. Dabei wird Wärme komplett in Arbeit umgewandelt:

$$dQ = pdV \quad (3.4.36)$$

mit $p = \frac{1}{V}RT$ (für 1 Mol) erhält man durch Integration von V_1 nach V_2 :

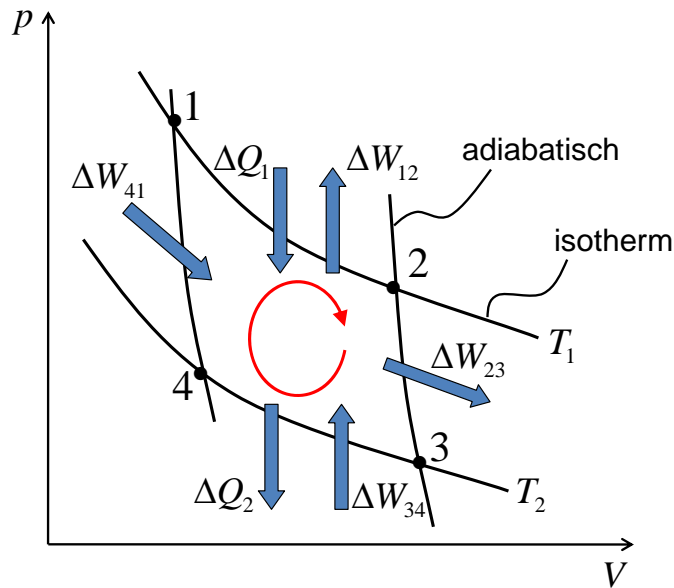


Abbildung 3.4.8: Beim Carnot'scher Kreisprozeß wird bei der Temperatur T_1 eine Wärmemenge ΔQ_1 entnommen und in Arbeit umgesetzt.

$$\Delta Q_1 = -\Delta W_{12} = RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (3.4.37)$$

da $V_2 > V_1$ ist $\Delta W_{12} < 0$, d.h. durch die zugeführte Wärme ΔQ_1 leistet das System Arbeit gegen den Umgebungsdruck. Diese Arbeit ist:

$$\Delta W_{12} = RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \quad (3.4.38)$$

- **adiabatische Expansion** $2 \rightarrow 3$

Bei der adiabatischen Expansion wird innere Energie in Arbeit umgewandelt.

$$dU = -pdV = U(T_2) - U(T_1) = \Delta W_{23} \quad (3.4.39)$$

Nachdem die innere Energie *nur* von der Temperatur abhängt, ist es zulässig für die Berechnung von dU einfach, die absoluten Werte vor ($U(T_1)$) und nach ($U(T_2)$) der Zustandsänderung zu vergleichen.

- **isotherme Kompression** $3 \rightarrow 4$

Bei der isothermen Kompression wird Wärme an die Umgebung abgegeben:

$$\Delta Q_2 = -\Delta W_{34} = RT_2 \ln \left(\frac{V_4}{V_3} \right) \quad (3.4.40)$$

da $V_4 > V_3$ ist $\Delta W_{34} > 0$, d.h. durch die Kompression nimmt das System von der Umgebung Arbeit auf und gibt diese als Wärme ΔQ_2 wieder ab. Diese aufgenommene Arbeit ist:

$$\Delta W_{12} = RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) \quad (3.4.41)$$

- **adiabatische Kompression** $4 \rightarrow 1$

Bei der adiabatischen Kompression wird zugeführte Arbeit in innere Energie umgewandelt. Analog zu oben können wir wieder die Differenz der inneren Energien des Anfangs- und des Endzustandes benutzen:

$$dU = -pdV = U(T_1) - U(T_2) = \Delta W_{41} = -\Delta W_{23} \quad (3.4.42)$$

Nachdem bei den adiabatischen Zustandsänderungen die Temperaturen der jeweilige Endpunkte gleich sind, wird bei den Schritten $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ netto keine Wärme in Arbeit umgewandelt. Die insgesamt geleistete Arbeit ist demnach:

$$\Delta W = \Delta W_{12} + \Delta W_{34} = RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) + RT_2 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) \quad (3.4.43)$$

Mit den Zustandsgleichungen für eine adiabatische Zustandsänderung lassen sich die Temperaturen und Volumina verknüpfen. Man bekommt:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (3.4.44)$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (3.4.45)$$

Daraus folgt $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$, bzw:

$$\ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = -\ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) \quad (3.4.46)$$

Mit dieser Ersetzung bekommen wir schließlich:

$$\Delta W = (T_1 - T_2) R \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \quad (3.4.47)$$

Der **Wirkungsgrad** dieser Umwandlung ist das Verhältnis aus geleisteter Arbeit ΔW und der zugeführten Wärme ΔQ_1 . Mit Gl. 3.4.37 bekommt man somit:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1 \quad (3.4.48)$$

Man erkennt, daß die Umwandlung von Wärme in Arbeit *nicht vollständig* erfolgt. Der Wirkungsgrad dieser Umwandlung ist kleiner als 1, da ein Teil der hinein gesteckten Wärme als Wärmemenge ΔQ_2 an die Umgebung abgegeben wird und dabei die Arbeit ΔW_{34} verbraucht.

Wirkungsgrad thermodynamischer Maschinen

Der Carnot-Wirkungsgrad ist der *maximale* Wirkungsgrad den eine thermodynamische Maschine erreichen kann. Die Umwandlung von Wärme in Arbeit erfolgt im Schritt $1 \rightarrow 2$ zu 100 %! Die Umwandlung von Wärme in Arbeit in den Schritten $2 \rightarrow 3$ und $4 \rightarrow 1$ hebt sich gegenseitig wieder auf. Allerdings muß der Kreisprozeß *geschlossen* werden, was einen Schritt $3 \rightarrow 4$ bedingt. Die Notwendigkeit dieses Schrittes bewirkt einen Wirkungsgrad der kleiner als 1 ist, da bei dieser Kompression wieder Wärme an die Umgebung abgegeben wird, D.h. das System muß einen Teil seiner Arbeit, die es in Schritt $1 \rightarrow 2$ abgegeben kann, verwenden, um wieder zu Punkt 4 zu gelangen wobei es allerdings die Wärme ΔQ_2 an die Umgebung abgibt. Die geleistete Arbeit ist dabei die Fläche unter der Kurve $3 \rightarrow 4$. Somit ist es am günstigsten, wenn die Temperatur T_2 bei dieser isothermen Kompression möglichst gering ist.

Der Wirkungsgrad ist zudem größer je größer der Temperaturunterschied der einzelnen Reservoirs ist. Dies hat große Bedeutung für den Betrieb von Kraftwerken zur Stromerzeugung in denen oftmals ein Medium erhitzt wird (Wasser), das über eine Turbine Arbeit leisten muß. Je höher der Temperaturunterschied des Mediums beim Kreisprozeß ist, desto effizienter ist die Konversion von Wärme in mechanische Arbeit. Der Wirkungsgrad einiger Prozesse der Energiewandlung sind in Tab. 3.1 gezeigt: (i) Bei einem Kohlekraftwerk wird zunächst Kohle verfeuert und damit Wasser erhitzt. Über Dampf wird dann eine Turbine bzw. ein Generator zur Elektrizitätserzeugung angetrieben. Der Wirkungsgrad ist hier durch den Temperaturunterschied des Dampf-

Kraftwerk	Umwandlung	Wirkungsgrad
Gaskraftwerk	chemisch \rightarrow elektrisch	60%
Kohlekraftwerk	chemisch \rightarrow elektrisch	25-45%
Kohlekraftwerk (+Fernwärme)	chemisch \rightarrow elektr., therm.	85%
Wasserkraftwerk	mechanisch \rightarrow elektrisch	90%
Dampfmaschine	chemisch \rightarrow mechanisch	10%
Dieselmotor	chemisch \rightarrow mechanisch	65%
Ottomotor	chemisch \rightarrow mechanisch	40%
Generator	elektrisch \rightarrow mechanisch	90%

Tabelle 3.1: Wirkungsgrade einiger thermodynamischer Maschinen bzw. anderer Methoden der Energiewandlung

fes beim Durchgang durch die Turbine gegeben. Dies begrenzt den Wirkungsgrad auf unter 50%. Dies kann kompensiert werden durch Fernwärmenutzung, was einer Vermarktung der sonst verlorenen Wärmemenge ΔQ_2 entspricht. (ii) In einem Gaskraftwerk wird mit den heißen Gasen, die bei der Verbrennung von Erdgas entstehen, eine Turbine direkt angetrieben. Die Verbrennungstemperaturen können dabei bis 1400°C erreichen was einen hohen Wirkungsgrad bedingt.

Läßt man den Prozeß in umgekehrter Reihenfolge ablaufen, so bekommt man den **inversen Carnot-Prozeß**. Eine solche Maschine bezeichnet man als **Wärmepumpe**, da sie einem Reservoir die Wärmemenge ΔQ_2 bei T_2 entzieht und sie an ein wärmeres Reservoir bei T_1 als Wärmemenge ΔQ_1 wieder abgibt. Dazu ist die Arbeit ΔW nötig wie zum Beispiel bei der adiabatischen Kompression des Mediums. Der Wirkungsgrad läßt sich analog zu dem einer Wärmekraftmaschine ableiten. Man definiert hier allerdings eine sog. Leistungszahl ϵ_{WP} , die größer als eins ist, zu:

$$\epsilon_{WP} = \frac{1}{\eta} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (3.4.49)$$

In folgendem Gedankenexperiment wollen wir eine Wärmepumpe und einer Wärmekraftmaschine koppeln. Hierbei soll die Arbeit, die die Wärmekraftmaschine abgibt, zum Antrieb der Wärmepumpe genutzt werden. Für den gesamten Wirkungsgrad kann man niemals etwas größeres als eins bekommen, wie in Abb. 2.4.9 veranschaulicht ist: eine optimale Wärmekraftmaschine erreicht einen Wirkungsgrad η , die ihrerseits eine Wärmepumpe mit optimaler Leistungszahl $1/\eta$ antreibt. Somit kann eine Wärmekraftmaschine nie mehr Arbeit produzieren als nötig wäre um netto Wärme von dem kälteren Reservoir zum wärmeren Reservoir zu transportie-

ren. Diese Tatsache läßt sich auch anders formulieren:

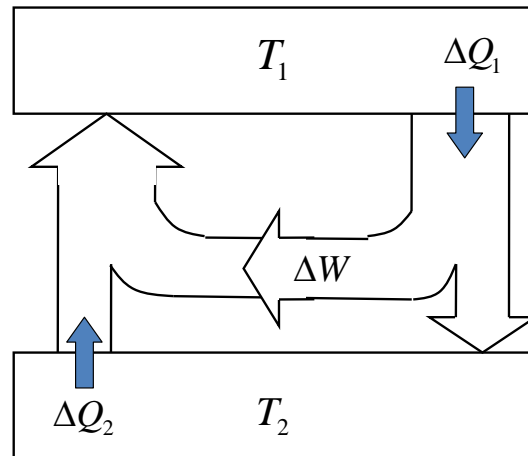


Abbildung 3.4.9: Kopplung einer Wärmekraftmaschine mit einer Wärmepumpe: Nachdem die Abgabe der Arbeit der Wärmekraftmaschine durch den Carnot-Wirkungsgrad begrenzt ist, der auch für den Betrieb der Wärmepumpe gilt, kann es keine abgeschlossene Maschine geben, die Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Reservoir pumpt.

Wärme fließt immer von dem heißeren zum kälteren Gegenstand

Dies bezeichnet man als **zweiten Hauptsatz** der Wärmelehre.

Alternativ zur Formulierung der Leistungszahl einer Wärmepumpe kann man auch eine Leistungszahl ϵ_{KM} einer Kältemaschine definieren. Diese bezieht sich auf die entnommene Wärmemenge eines kälteren Reservoirs ΔQ_2 :

$$\epsilon_{KM} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (3.4.50)$$

3.4.4 Die Entropie

Thermodynamische Formulierung

Der zweite Hauptsatz läßt sich auch mathematisch elegant formulieren. Betrachten wir dazu eine neue Größe, die **Entropie**. Sie ist definiert als:

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T}} \quad (3.4.51)$$

Betrachten wir noch einmal unseren Kreisprozeß. Bei den isothermen Zustandsänderungen bekommen wir die Entropieänderungen:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{T_1} RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (3.4.52)$$

$$\Delta S_{3 \rightarrow 4} = -\frac{1}{T_2} RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (3.4.53)$$

$$(3.4.54)$$

Bei den adiabatischen Zustandsänderungen ist $\Delta S = 0$ wegen $dQ = 0$. Damit bekommt man:

$$\Delta S_{\text{gesamt}} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{3 \rightarrow 4} \quad (3.4.55)$$

D.h. die Entropie bleibt bei reversiblen Prozessen konstant.

$$\boxed{\Delta S_{\text{reversibel}} = 0} \quad (3.4.56)$$

Wie ist das bei irreversiblen Prozessen? Betrachten wir dazu zwei gleiche Körper (jeweils 1 Mol), die unterschiedliche Temperaturen T_1 und T_2 besitzen. Fügt man diese Körper zusammen, so gleicht sich die Temperatur aus und eine Mischtemperatur $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ stellt sich ein (siehe Abb. 3.4.17). Dabei fließt von dem wärmeren Körper eine Wärmemenge ΔQ zu dem kälteren Körper, die diesen erwärmt. Die Entropieänderungen der beiden Körper sind dabei wie folgt.

Die Entropieänderung bei der Erwärmung des kälteren Körpers ist:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_m} \frac{dQ}{T} = C_V \int_{T_1}^{T_m} \frac{dT}{T} = C_V \ln \frac{T_m}{T_1} \quad (3.4.57)$$

Analog dazu ist die Entropieänderung beim Abkühlen des wärmeren Körpers:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_m} \frac{dQ}{T} = C_V \int_{T_2}^{T_m} \frac{dT}{T} = C_V \ln \frac{T_m}{T_2} \quad (3.4.58)$$

Insgesamt ergibt sich damit eine Entropieänderung von:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_V \ln \frac{T_m^2}{T_1 T_2} \quad (3.4.59)$$

Setzt man hier $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ ein, so erkennt man, daß

$$\Delta S = C_V \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0 \quad (3.4.60)$$

gilt. D.h. bei diesem Prozeß nimmt die Entropie zu. Der Temperaturausgleich von zwei Körpern ist ein irreversibler Prozeß, da es nicht vorkommt, daß beim Kontakt von zwei Körpern Wärme von dem kälteren zu dem wärmeren fließt. In diesem Sinne kann man den zweiten Hauptsatz anders formulieren als:

Bei irreversiblen Prozessen nimmt die Entropie in dem System immer zu bzw. $\Delta S_{irreversibel} > 0$

Wie ändert sich jetzt die Entropie eines idealen Gases bei der Änderung von einem Ausgangszustand mit p_0 , T_0 und V_0 zu einem Endzustand mit p , T und V ? Beginnen wir zunächst mit dem ersten Hauptsatz:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}(dU + pdV) \quad (3.4.61)$$

Mit $p = \frac{1}{V}N_A k_B T$ und $dU = C_V dT$ bekommen wir:

$$dS = \frac{1}{T}C_V dT + \frac{1}{V}N_A k_B dV \quad (3.4.62)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_0}^T \frac{1}{T} C_V dT + \int_{V_0}^V \frac{1}{V} N_A k_B dV \\ &= C_V \ln \frac{T}{T_0} + N_A k_B \ln \frac{V}{V_0} \end{aligned} \quad (3.4.63)$$

mit $C_V = \frac{3}{2}N_A k_B$ und $V \propto \frac{T}{p}$ für ein ein-atomiges ideales Gas bekommen wir:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{3}{2}N_A k_B \ln \frac{T}{T_0} + N_A k_B \ln \frac{V}{V_0} \\ &= N_A k_B \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \left(\frac{V}{V_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4.64)$$

Die Abhängigkeit bezüglich des Druckes läßt sich einfach bestimmen, da immer die Zustandsgleichung gelten muß. D.h. wir ersetzen $V \propto \frac{T}{p}$ und bekommen:

$$\Delta S = N_A k_B \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \left(\frac{p_0}{p} \right) \right] \quad (3.4.65)$$

Mikroskopische Formulierung

Die Entropie läßt sich allerdings auch auf der Basis eines *mikroskopischen* Bildes verstehen. Betrachten wir dazu zunächst ein Volumen das isotherm expandiert. In einem Behälter befindet sich eine Trennwand. Im Anfangszustand befinden sich nur auf einer Seite dieser Trennwand die Gasatome. Entfernt man diese Trennwand, so verteilen sich die Atome im ganzen Hohlraum (siehe Abb. 3.4.10). Die Änderung der Entropie ist hierbei:

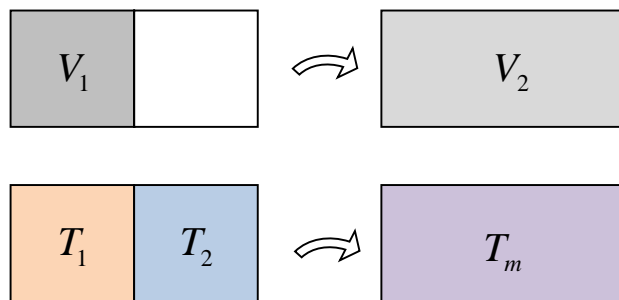


Abbildung 3.4.10: (a) Entropieänderung bei der isothermen Expansion eines Gases. Hierbei wird eine Trennwand entfernt und die Gasteilchen können sich vom Volumen V_1 auf das Volumen V_2 ausdehnen. (b) Entropieänderung bei dem Temperaturausgleich zweier Körper.

$$dS = \frac{1}{T} dQ = \frac{1}{T} (dU + pdV) \quad (3.4.66)$$

Man bekommt:

$$dS = \frac{1}{T} C_V dT + \frac{1}{T} \frac{RT}{V} dV \quad (3.4.67)$$

Integration liefert

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (3.4.68)$$

Unter der Annahme einer isothermen Zustandsänderung, fällt der erste Term weg ($T_1 = T_2$). D.h. wir bekommen eine Entropieänderung durch das Entfernen der Zwischenwand von:

$$\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (3.4.69)$$

Mit $V_2 > V_1$ wird ΔS positiv. Man kann zeigen, daß sich ein identischer Ausdruck auch aus der Betrachtung von *Wahrscheinlichkeiten* ableiten läßt!

Betrachten wir dazu die Wahrscheinlichkeit w , daß sich N_A Moleküle in dem Teilvolumen V_1 befinden, wie es vor dem Entfernen der Zwischenwand das Gas eingeschlossen hat. Die Wahrscheinlichkeit für 1 Teilchen sich in dem Volumen V_1 aufzuhalten ist:

$$w_{1 \text{ Teilchen}} = \frac{V_1}{V_2} \quad (3.4.70)$$

Für die Wahrscheinlichkeit, daß N_A Teilchen sich *gleichzeitig* im Volumen V_1 aufhalten, bekommen wir:

$$w = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{N_A} \quad (3.4.71)$$

mit $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ wird diese Wahrscheinlichkeit natürlich *sehr, sehr* klein. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich formal umformen zu:

$$k_B \ln w = k_B N_A \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right) = - \underbrace{R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}_{\Delta S} \quad (3.4.72)$$

D.h. die Entropie ist ein Maß für Wahrscheinlichkeit⁻¹ einer bestimmten Konfiguration:

$$\Delta S = -k_B \ln w = k_B \ln \frac{1}{w} \quad (3.4.73)$$

bzw. proportional zu den **Realisierungsmöglichkeiten** Ω für eine bestimmte Konfiguration $1/w = \Omega$ in einem System. Definiert man $S = 0$ für $\Omega = 1$, so kann man eine *absolute Skala* für die Entropie angeben als:

$$\boxed{S = k_B \ln \Omega} \quad (3.4.74)$$

Die Realisierungsmöglichkeiten für obiges Beispiel bedeuten, daß *alle Teilchen in V_1* nur einer einzigen Möglichkeit entspricht, während es $\Omega = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{N_A}$ andere Möglichkeiten gibt die Teilchen *beliebig* auf der linken und rechten Seite der Trennwand zu verteilen. Demnach steigt die Entropie um $k_B \ln \Omega$ an!

Im folgenden wollen wir diese mikroskopische Interpretation der Entropie an zwei berühmten Beispielen illustrieren:

- **Gibb'sches Paradoxon**

Betrachten wir zunächst zwei getrennte Volumina, wie oben illustriert, die jetzt allerdings jeweils mit einem Gas A und einem Gas B bei *gleicher Druck* und *gleicher Temperatur* gefüllt sind. Entfernt man die Zwischenwand, so mischen sich beide Gase, Dabei wird die **Mischungsentropie** erzeugt. Diese berechnet sich wie folgt:

- **Mischen zweier Gase A und B**

Die absolute Entropie des Gases A im Volumen V_A vor dem Entfernen der Zwischenwand ist analog zu obiger Ableitung gegeben als:

$$S_A = k_B \ln \left(\frac{V_A}{V_0} \right)^{N_A} \quad (3.4.75)$$

Hierbei ist V_0 ein Normvolumen⁴. Die absolute Entropie des Gases B im Volumen V_B vor dem Entfernen der Zwischenwand ist gegeben als:

$$S_B = k_B \ln \left(\frac{V_B}{V_0} \right)^{N_B} \quad (3.4.76)$$

Nach dem Entfernen der Zwischenwand vergrößert sich für beide Gase das Volumen jeweils auf $V_A + V_B$ und wir bekommen für die neuen Entropien S'_A und S'_B :

$$S'_A = k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_0} \right)^{N_A} \quad (3.4.77)$$

$$S'_B = k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_0} \right)^{N_B} \quad (3.4.78)$$

Die Differenz

$$\Delta S = S'_A + S'_B - S_A - S_B \quad (3.4.79)$$

ergibt mit

⁴Da wir uns im folgenden nur für Entropieänderungen interessieren, fällt V_0 immer wieder heraus

$$\begin{aligned} \Delta S &= N_A k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_0} \right) + N_B k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_0} \right) \\ &\quad - N_A k_B \ln \left(\frac{V_A}{V_0} \right) - N_B k_B \ln \left(\frac{V_B}{V_0} \right) \end{aligned} \quad (3.4.80)$$

schließlich

$$\boxed{\Delta S = N_A k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_A} \right) + N_B k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_B} \right)} \quad (3.4.81)$$

Dies bezeichnet man als Mischungsentropie.

– **Mischen zweier gleicher Gase A und A**

Jetzt wollen wir allerdings den Fall betrachten, daß die Gase im Volumen A und im Volumen B *identisch* sind! Durch das Entfernen der Zwischenwand können sich die Gase vermischen. Fügt man die Trennwand allerdings wieder hinein, so gelangt man wieder zum Ausgangszustand. Somit hat sich der Grad an Ordnung nicht geändert und man sollte erwarten das $\Delta S = 0$ gilt. Stattdessen ergibt obige Ableitung auch für den Fall, daß zwei gleiche Gase vorliegen $\Delta S > 0$. Dies bezeichnet man als **Gibbs'sches Paradoxon**. Wo liegt der Fehler? Das Paradoxon läßt sich beheben, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß die Teilchen *ununterscheidbar* sind!

Betrachten wir N_A Teilchen, die auf das Volumen aufgeteilt werden. Die absolute Zahl der Möglichkeiten für *unterscheidbare* Teilchen ist $\left(\frac{V_A}{V_0}\right)^{N_A}$. Falls die Teilchen *ununterscheidbar* sind, werden eine Vielzahl von Möglichkeiten doppelt gezählt. Wenn wir N_A Teilchen in einem Volumen verteilen gibt es $N_A!$ ⁵ Permutationen, die zu demselben Ergebnis führen. Dieser Umstand kann in der Formulierung der Entropie korrigiert werden, indem die Zahl der Möglichkeiten durch $N_A!$ geteilt wird

$$S_A = k_B \ln \frac{1}{N_A!} \left(\frac{V_A}{V_0} \right)^{N_A} \quad (3.4.82)$$

Da N_A eine große Zahl ist kann man die **Stirling-Formel** $\ln N! = N \ln N - N$ benutzen. Es ergibt sich:

⁵ $N_A!$ bezeichnet die *Fakultät* und ist gegeben als $N_A \cdot (N_A - 1) \cdot (N_A - 2) \dots$

$$\begin{aligned}
S_A &= k_B \ln \left(\frac{V_A}{V_0} \right)^{N_A} - k_B \ln N_A! \\
&= k_B \ln \left(\frac{V_A}{V_0} \right)^{N_A} - k_B N_A \ln N_A + k_B N_A \\
&= N_A k_B \ln \left(\frac{V_A}{N_A V_0} \right)^{N_A} + k_B N_A \quad (3.4.83)
\end{aligned}$$

Auf der Basis dieser Ableitung können wir alle Terme in Gl. 3.4.81 analog zu $V \rightarrow \frac{V}{N}$ ersetzen und bekommen für die Entropieänderung⁶:

$$\Delta S = N_A k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{N_A + N_B} \cdot \frac{N_A}{V_A} \right) + N_B k_B \ln \left(\frac{V_A + V_B}{N_A + N_B} \cdot \frac{N_B}{V_B} \right) \quad (3.4.84)$$

Nachdem wir vorausgesetzt hatten, daß in beiden Teilvolumina p und T gleich sind muß auch N/V konstant bleiben und wir bekommen:

$$\frac{N_A}{V_A} = \frac{N_B}{V_B} = \frac{N_A + N_B}{V_A + V_B} \quad (3.4.85)$$

Dadurch gilt:

$$\frac{V_A + V_B}{N_A + N_B} \frac{N_A}{V_A} = 1 \quad (3.4.86)$$

Wenn wir dies in obige Gleichung einsetzen wird der Logarithmus Null und man bekommt schließlich:

$$\Delta S = 0 \quad (3.4.87)$$

Dies ist in Übereinstimmung mit der Vorstellung, daß wir keine Änderung durchführen, wenn wir bei gleichen Gasen bei gleicher Temperatur und Druck eine Trennwand hineinfügen oder herausziehen.

Man beachte, daß bei dieser Ableitung auch die Gase A und B, wie sie zu Anfang einzeln in den Volumina V_A und V_B vorliegen

⁶Der letzte Term in Gl. 3.4.83 $k_B N_A$ fällt bei der Bildung von ΔS immer weg.

natürlich *ununterscheidbar* sind. D.h. die Formulierung entsprechend $N_A!$ und $N_B!$ ist in jedem Fall gültig. Allerdings gilt bei dem zusammengeführten System nur für gleiche Gase $(N_A + N_B)!$, für unterschiedliche Gase muß man $N_A!N_B!$ setzen!

• Maxwell's Dämon

Die mögliche Verletzung des zweiten Hauptsatzes wurde in einem berühmten Gedankenexperiment von Maxwell formuliert. In einem Behälter befindet sich eine Trennwand mit einem kleinen Loch. Zu Anfang befindet sich auf beiden Seiten ein Gas der Temperatur T . Maxwell postulierte einen Dämon, der die Teilchen beobachtet wie sie durch dieses Loch treten und sie gemäß ihrer Geschwindigkeit sortiert: die heißeren Teilchen läßt er nach links übertreten, während die kälteren Teilchen rechts bleiben müssen. Nach einiger Zeit muß sich ein Temperaturunterschied einstellen. Damit hätte sich die Entropie in dem System *verringert*. Dies wäre eine Verletzung des zweiten Hauptsatzes.

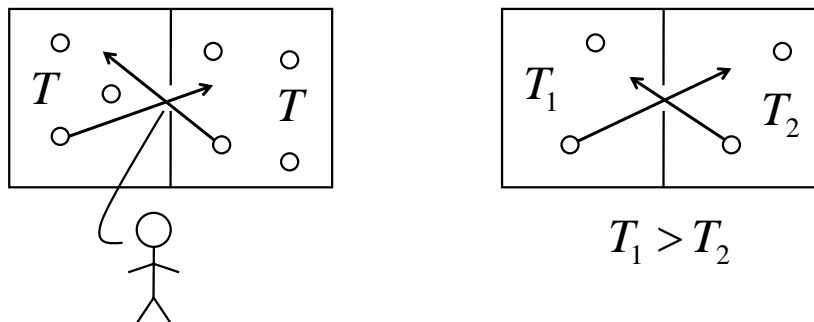


Abbildung 3.4.11: Der Maxwell'sche Dämon sortiert Teilchen, die durch eine Öffnung zwischen zwei Behältern hindurch treten hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit. Dadurch entstehen unterschiedliche Temperaturen. Dies verletzt zunächst den zweiten Hauptsatz, da die Entropie dabei abnimmt.

Dieser Sachverhalt löst sich auf indem man postuliert, daß die *Information* ob ein Teilchen heiß oder kalt ist, der Erzeugung von Entropie durch den Maxwell'schen Dämon entspricht. Die Fallunterscheidung für jedes Teilchen erzeugt einen Zuwachs von:

$$\Delta S = k_B \ln 2 \quad (3.4.88)$$

Somit nimmt die Entropie in dem Behälter ab, aber gleichzeitig die Entropie der Information zu. Diese Sichtweise begründet die sog. **Informationstheorie**

Man erkennt aus dieser Betrachtung der Entropie, daß irreversible Änderungen in einem geschlossenen System immer zu einer Maximierung der Entropie führen. In diesem Sinne ist auch die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung eine Verteilung *maximaler Entropie*, da sie die meisten Realisierungsmöglichkeiten darstellt eine vorgegebene Energiemenge auf N Teilchen zu verteilen. Dies läßt sich leicht illustrieren: nehmen wir an, daß die gesamte Energie von 10 Teilchen 10 Joule betragen soll. Eine Möglichkeit wäre es einem Teilchen genau 10 Joule zuzuweisen und den anderen 9 jeweils 0 Joule. Dies ist allerdings nur eine einzige Variante. Verteilt man die Energie gleichmäßiger auf die Teilchen so existieren mehr Permutationen, d.h. diese Möglichkeiten sind *viel wahrscheinlicher* und besitzen deshalb eine größere Entropie.

3.4.5 Der dritte Hauptsatz

Der dritte Hauptsatz der Wärmelehre betrachtet schließlich den absoluten Nullpunkt der Temperaturskala. Er besagt:

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0} \quad (3.4.89)$$

D.h. die Entropie S strebt für $T \rightarrow 0$ gleichzeitig auch Null an. Am absoluten Nullpunkt ist dann nur ein Zustand ($\Omega = 1$) in einem System realisiert nach $S = k_B \ln \Omega$ ($\ln 1 = 0$). Läßt sich dieser Zustand erreichen? Dafür benötigen wir eine thermodynamische Maschine, die ein Reservoir abkühlt bis zur Temperatur Null. Die maximale Effizienz ϵ_{KM} einer solchen Kältemaschine wurde oben abgeleitet zu:

$$\epsilon_{KM} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} = \frac{T_{kalt}}{T_{warm} - T_{kalt}} \quad (3.4.90)$$

Setzen wir jetzt zum Beispiel für $T_{warm} = 1$ K und für $T_{kalt} = 10^{-3}$ K, so müssen wir für eine Wärmeabfuhr von $\Delta Q_2 = 1$ J eine Arbeit von $\Delta W = 10^3$ J aufwenden. Wollen wir noch weiter abkühlen steigt die dazu notwendige Arbeit weiter an. D.h. der absolute Nullpunkt ist *nicht* erreichbar, sondern kann nur näherungsweise erreicht werden. Der bisherige Rekord liegt bei Nanokelvin.

Die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes läßt sich auch aus der Entropieabhängigkeit des idealen Gases ableiten. Wir hatten abgeleitet, daß die Entropie eines idealen Gases wie:

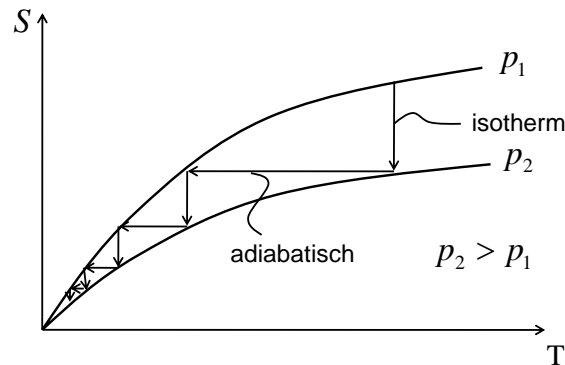


Abbildung 3.4.12: In einer Kältemaschine laufen abwechselnd isotherme und adiabatische Prozesse zwischen zwei Drücken p_1 und p_2 ab, bei denen ein Medium kontinuierlich abgekühlt wird. Im ST-Diagramm wird deutlich, daß der Punkt $T = 0$ nicht erreichbar ist.

$$S \propto \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \left(\frac{p_0}{p} \right) \right] \quad (3.4.91)$$

skaliert. Die Form dieser Kurven für unterschiedliche Drücke p_1 und p_2 ist in Abb. 3.4.12 gezeigt. Man erkennt, daß eine Kältemaschine in einer Abfolge von einem isothermen und einem adiabatischen Schritten zwischen den Drücken p_1 und p_2 nur eine endliche Temperaturerniedrigung realisieren läßt. Koppelt man eine Reihe von Kältemaschinen hintereinander (das kältere Reservoir der ersten bildet das warme Reservoir der nächsten), so läßt sich nie die Temperatur $T = 0\text{K}$ erreichen kann. Einige Methoden zur Erzeugung tiefer Temperaturen

3.4.6 Thermodynamische Maschinen

Thermodynamische Maschinen sind allgemein Apparate in denen ein Medium einem Kreisprozeß unterworfen wird, wobei Wärme aus einem Reservoir in mechanische Arbeit umgewandelt wird oder umgekehrt. Im folgenden wollen wir einige typische Kreisprozeße diskutieren:

Kältemaschine

Bei einer Kältemaschine (bzw. Wärmepumpe) nimmt ein Medium bei einer tiefen Temperatur T_2 eine Wärmemenge ΔQ auf (siehe Abb. 3.4.13). In

Medium	Methode	erreichte Temperatur
Luft	Joule-Thomson	O ₂ 90 K, N ₂ 77 K
H ₂	Joule-Thomson	20 K
⁴ He	Joule-Thomson	4.21 K
³ He	Joule-Thomson	3.19 K
⁴ He	JT+Abpumpen	0.7 K
⁴ He- ³ He	Entmischungskühler	0.0019 K
paramg. Salze	adiabat. Entmagnetisierung	0.002 K (T _e)
Atomkerne	adiabat. Entmagnetisierung	10 ⁻⁵ K (T _e)
Atomkerne	adiabat. Entmagnetisierung	10 ⁻¹⁰ K (T _{Kern})

Tabelle 3.2: Erzeugung tiefer Temperaturen. Der Joule-Thomson-Effekt bezieht sich auf die adiabatische Expansion realer Gase (siehe unten). In einem Entmischungskühler wird die Entropieänderung bei einem Phasenübergang zur Abfuhr von Wärme benutzt. Adiabatische Entmagnetisierung bezieht sich auf die Kühlung eines Spinsystems durch äußere Magnetfelder. Beim adiabatischen Abschalten des Magnetfeldes steigt die Entropie des Spinsystems auf Kosten der Entropie in der kinetischen Energie.

einem realen **Kühlschrank** ist dies oft latente Wärme, die durch das Verdampfen eines Kühlmittels gegeben ist. Je größer die spezifische Wärme des Kühlmittels ist, desto besser kann dieses die Wärmemenge mitnehmen. Ein Kompressor verdichtet das Kühlmittel auf einen hohen Druck und Temperatur T_1 . In einem Wärmetauscher gibt es die Wärmemenge an die Umgebung ab. Danach wird das Kühlmittel über eine Drossel entspannt, wobei es sich wieder abkühlt und dabei verflüssigt. Damit ist der Kreislauf geschlossen.

Otto- und Dieselmotor

Bei einem **Ottomotor** laufen zwei isentrope und zwei isochore Prozesse zyklisch ab (siehe Abb. 3.4.14). Das Zünden des Brennstoff-Luft-Gemisches, sowie das Ausstoßen des Abgases erfolgt so schnell, daß sich dabei das Volumen nicht ändert. Beim Ansaugen des Kraftstoffgemisches, sowie bei der Expansion des gezündeten Kraftstoffgemisches kann keine Wärme abgegeben werden und man kann das System als geschlossen betrachten. D.h. die Zustandsänderungen erfolgen isentrop bzw. adiabatisch.

Bei einem **Dieselmotor** hat man wieder zwei isentrope Zustandsänderung, aber nur eine isochore beim Ausstoß des Abgases, aber eine isobare bei der Zündung des Gemisches. Die Verbrennung von Diesel erfolgt viel langsamer, so daß bei der Ausdehnung der Kolben entsprechend nachgeben kann und der Druck bei dieser Verbrennung nahezu konstant bleibt. Der

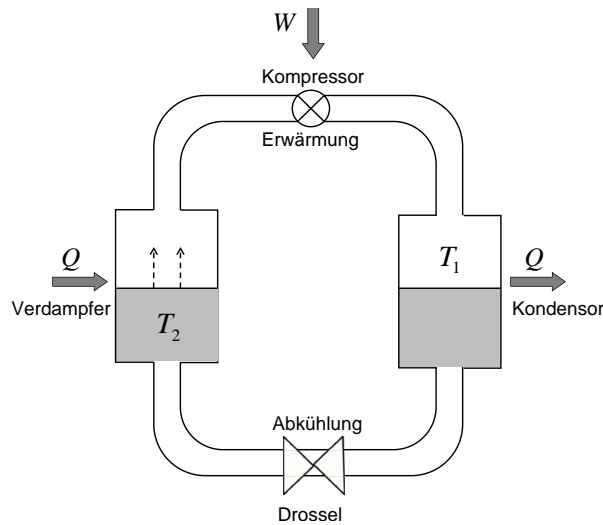


Abbildung 3.4.13: Kältemaschine.

Wirkungsgrad bei einem Dieselmotor ist größer, da ein viel höherer Druck als beim Ottomotor erreicht wird, und damit die Fläche, die der Kreisprozeß einschließt auch größer wird.

Stirling-Motor

Eine weitere thermodynamische Maschine bei der der Wirkungsgrad den des Carnot-Prozesses erreicht, ist der Stirling-Prozeß, der sich aus zwei Isothermen und zwei Isochoren zusammensetzt. Abb. 3.4.15 zeigt den Ablauf. An einem Rad sind über zwei Kurbeln zwei Kolben aufgehängt, die um 90° gegeneinander versetzt sind. Ein Kolben komprimiert und expandiert das Gas, bei der isothermen Expansion und Kompression. Der zweite Kolben ist in der Mitte durchlässig, wobei das Gas beim Durchströmen seine Wärme an Kupferwolle abgibt, bzw. von dieser aufnimmt. Dieser durchlässige Kolben macht die isochoren Zustandsänderungen.

- Im ersten Schritt wird das Gas isotherm expandiert und nimmt dabei Wärme von einem heißen Reservoir auf.
- In dem zweiten Schritt findet eine isochore Abkühlung statt, bei der die Wärme von der Cu-Wolle aufgenommen wird.
- In dem dritten Schritt findet eine isotherme Kompression statt, bei der Wärme an ein kälteres Reservoir abgegeben wird.

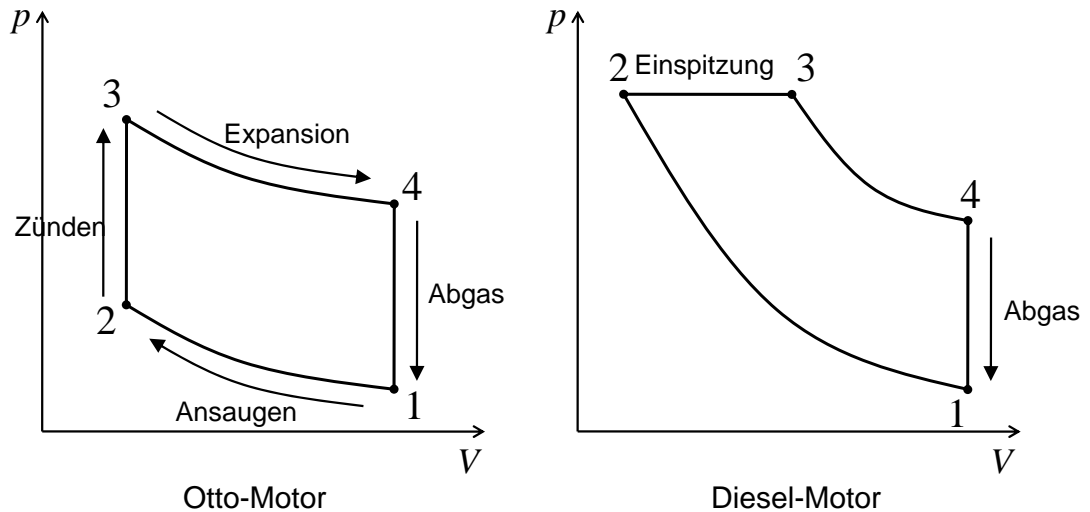


Abbildung 3.4.14: pV-Diagramme von Otto-Motor und Dieselmotor.

- Im letzten Schritt findet wieder eine isochore Erwärmung statt, bei der die Cu-Wolle wieder Wärme an das Gas abgibt.

Falls der Wärmeübertrag an die Cu-Wolle verlustfrei erfolgt, so hat auch dieser Prozeß denselben Wirkungsgrad wie der Carnot-Prozeß. Die einzelnen Schritte sind im pV-Diagramm in Abb. 3.4.15 noch einmal dargestellt.

3.4.7 Thermodynamische Potentiale

Für die Beschreibung von Systemen und entsprechenden Zustandsänderungen lassen sich unterschiedliche Erhaltungsgrößen definieren, die sich in Abhängigkeit von Variablen einstellen. Betrachtet man zum Beispiel ein abgeschlossenes System bei konstantem Volumen, so lassen sich einzelne Systeme hinsichtlich des Volumens und der darin enthaltenen Entropie voneinander unterscheiden. Für die Berechnung des Gleichgewichtszustandes fordert man das Minimum der Energie. Diese Forderung muß allerdings in Abhängigkeit von dem System unterschiedlich formuliert werden, da für jeden Fall das Minimum eines anderen *thermodynamische Potentials* gesucht wird:

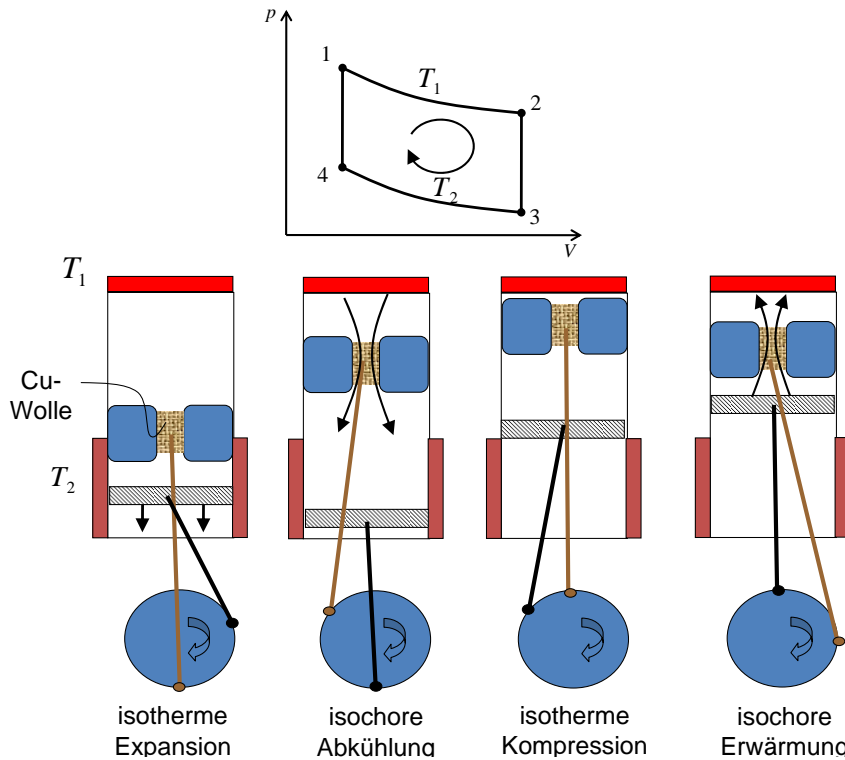


Abbildung 3.4.15: Der Stirling-Prozeß ist in 4 Schritte unterteilt, die isotherme Expansion, die isochore Abkühlung, die isotherme Kompression, die isochore Erwärmung.

Energie, Variablen S und V

Betrachten wir ein abgeschlossenes System in dem die Gesamtenergie im Gleichgewicht minimal werden muß: $dU = 0$. Unterschiedliche Systeme unterscheiden sich bezüglich der Variablen Entropie S und Volumen V . Nach dem ersten Hauptsatz gilt:

$$\boxed{dU = TdS - pdV} \tag{3.4.92}$$

Diese Gleichung besagt wie die innere Energie U von den unabhängigen Variablen S und V abhängt. Damit diese Gleichung *immer* gelten kann, müssen allerdings die intensiven Größen Druck und Temperatur einer Beziehung genügen. Die Ableitung der inneren Energie nach den Variablen ergibt:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V = T \tag{3.4.93}$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p \quad (3.4.94)$$

Nachdem die innere Energie ein Potential ist muß die Reihenfolge der Ableitungen egal sein und gelten:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} \quad (3.4.95)$$

Dies läßt sich anders formulieren als:

$$\left. \frac{\partial}{\partial S} \right|_V \underbrace{\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S}_{-p} = \left. \frac{\partial}{\partial V} \right|_S \underbrace{\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V}_T \quad (3.4.96)$$

Daraus folgt der Zusammenhang:

$$\boxed{- \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_V = \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_S} \quad (3.4.97)$$

D.h. die Zustandsgleichung zur Beschreibung eines abgeschlossenen Systems bei konstantem Volumen muß dieser Bedingung genügen.

Enthalpie, Variablen S und p

Betrachten wir jetzt ein abgeschlossenes System bei dem der Druck p und die Entropie S gegeben sein soll, sich aber das Volumen ändern kann. Dies ist der häufigste Fall für chemische Reaktionen, die oftmals bei Umgebungsdruck stattfinden. Mit dem Fortschreiten der chemischen Reaktion kann auch Arbeit $p dV$ gegen den Umgebungsdruck geleistet werden. Mit dem ersten Hauptsatz

$$dU = T dS - p dV \quad (3.4.98)$$

ergibt sich:

$$dU = T dS - d(pV) + V dp \quad (3.4.99)$$

Dies läßt sich umwandeln zu:

$$d(\underbrace{U + pV}_{=H}) = T dS + V dp \quad (3.4.100)$$

Mit dieser Definition der **Enthalpie** ergibt sich:

$$\boxed{dH = TdS + Vdp} \quad (3.4.101)$$

Man erkennt, daß man bei isobaren Systemen im Gleichgewicht ein Minimum der Enthalpie $dH = 0$ fordern muß! Das Minimum der inneren Energie $dU = 0$ vernachlässigt, daß der Druck von außen an dem System zusätzlich Arbeit leisten kann.

Damit die Enthalpie eine Erhaltungsgröße ist muß für die Variablen Temperatur und Volumen ein Zusammenhang gelten. Die Abhängigkeit der Enthalpie von den Variablen ist:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_p = T \quad (3.4.102)$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_S = V \quad (3.4.103)$$

Nachdem die Enthalpie ein Potential ist, muß die Reihenfolge der Ableitungen egal sein und gelten:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial S} \quad (3.4.104)$$

Dies läßt sich anders formulieren als:

$$\frac{\partial}{\partial S} \bigg|_p \underbrace{\left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_S}_V = \frac{\partial}{\partial p} \bigg|_S \underbrace{\left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_p}_T \quad (3.4.105)$$

Daraus folgt der Zusammenhang:

$$\boxed{\left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_p = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_S} \quad (3.4.106)$$

Freie Energie, Variablen T und V

Betrachten wir ein isothermes System bei konstantem Volumen (siehe Abb. 3.4.16). Wir beginnen wieder mit dem ersten Hauptsatz:

$$dU = TdS - pdV \quad (3.4.107)$$

Mit

$$dU = d(TS) - SdT - pdV \quad (3.4.108)$$

läßt sich die **freie Energie** F definieren als:

$$F = U - TS \quad (3.4.109)$$

und man bekommt

$$\boxed{dF = -SdT - pdV} \quad (3.4.110)$$

Damit die freie Energie eine Erhaltungsgröße ist, muß zwischen der Entropie und dem Druck folgender Zusammenhang gelten:

$$\boxed{\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V} \quad (3.4.111)$$

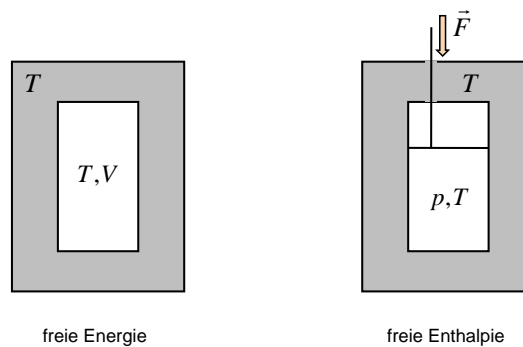


Abbildung 3.4.16: Freie Energie und freie Enthalpie bei isothermen Systemen.

Die freie Energie wird oftmals benutzt um Prozesse an Festkörperoberflächen zu beschreiben, die bei einer konstanten Temperatur ablaufen und bei denen sich das Volumen nicht ändert. Zudem ist die freie Energie, derjenige Anteil an der inneren Energie, der nach außen Arbeit leisten kann ($F = U - TS$).

Freie Enthalpie, Variablen T und p

Als letztes betrachten wir ein isothermes System bei dem der Druck konstant gehalten wird. Es gilt zunächst:

$$dU = TdS - pdV \quad (3.4.112)$$

Mit

$$dU = d(TS) - SdT - d(pV) + Vdp \quad (3.4.113)$$

können wir die sogenannte **freie Enthalpie** G definieren als:

$$G = U - TS + pV \quad (3.4.114)$$

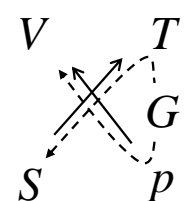
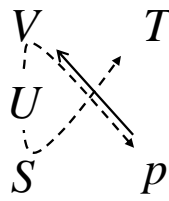
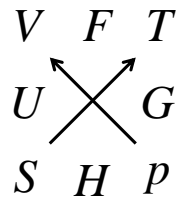
und bekommen

$$\boxed{dG = -SdT + Vdp} \quad (3.4.115)$$

Die freie Enthalpie wird insbesondere bei isothermen Prozessen wie der Kondensation von Gasen angewendet. Auch hier kann analog zu obigen Beispielen ein Zusammenhang der Variablen gefordert werden von:

$$\boxed{-\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p} \quad (3.4.116)$$

Die Verknüpfungen zwischen den einzelnen thermodynamischen Potentialen lassen sich mit einer einfachen Merkregel ableiten, wie sie in Abb. ?? illustriert ist. Im Uhrzeigersinn gelesen ergibt sich "Viereck für thermodynamisch genutzte Potentiale hilft bei schnellem Umrechnen": an den Seiten stehen jeweils die 4 Potentiale. Dieses Potential setzt sich aus den zwei Variablen links und rechts zusammen mit den Vorfaktoren auf den diagonal gegenüber liegenden Seiten. Falls man sich entgegen der Pfeilrichtung bewegt multipliziert sich noch ein Minuszeichen.



$$dH = TdS + Vdp \quad dU = TdS - pdV \quad dF = -SdT - pdV \quad dG = Vdp - SdT$$

Abbildung 3.4.17: Viereck für thermodynamisch genutzte Potentiale hilft bei schnellem Umrechnen.

3.5 Reale Gase

3.5.1 van der Waals Zustandsgleichung

Bei der Betrachtung von thermodynamischen Prozessen haben wir bislang immer ideale Gase betrachtet. Bei *realen* Gasen müssen wir allerdings berücksichtigen, daß die Atome oder Moleküle ein *Eigenvolumen* haben bzw. daß eine *anziehende Wechselwirkung* zwischen ihnen besteht. Für ein ideales Gas galt:

$$pV = Nk_B T \quad (3.5.1)$$

Bei einem realen Gas, das wir uns als Atome/Moleküle mit endlichem Radius r vorstellen, ist der Mindestabstand zwischen zwei Atomen $2r$. D.h. das Volumen das den Gasatomen zur Verfügung gestellt werden kann nicht beliebig klein werden. Das Eigenvolumen eines Gasteilchens ist danach:

$$V_{\text{Gasteilchen}} = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (3.5.2)$$

Nachdem der Abstand zwischen zwei Gasteilchen mindestens $2r$ beträgt ist das verbotene Volumen, in dem sich kein zweites Atom aufhalten kann (siehe Abb. 3.5.1):

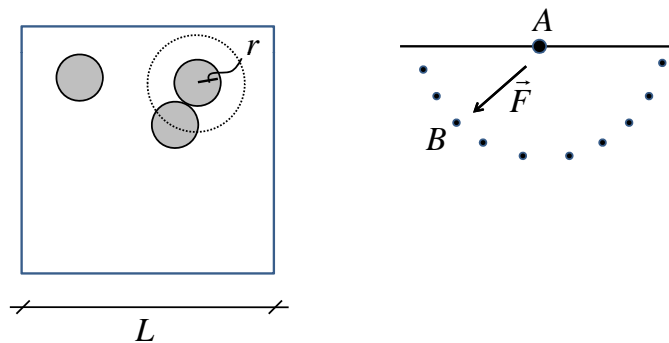


Abbildung 3.5.1: In einem realen Gas, besetzen die Atome ein endliches Volumen.

$$V_{\text{verboten}} = \frac{4\pi}{3} (2r)^3 = 8V_{\text{Gasteilchen}} \quad (3.5.3)$$

Welches echte Volumen $V_{\text{reales Gas}}$ steht nun N Gasteilchen in einem Behälter mit Volumen V zur Verfügung:

$$V_1(1\text{tes Teilchen}) \rightarrow V \quad (3.5.4)$$

$$V_2(2\text{tes Teilchen}) \rightarrow V - 8V_{\text{Gasteilchen}} \quad (3.5.5)$$

$$V_3(3\text{tes Teilchen}) \rightarrow V - 2 \cdot 8V_{\text{Gasteilchen}} \quad (3.5.6)$$

...

$$V_N(N\text{tes Teilchen}) \rightarrow V - \sum_{n=1}^N (n-1)8V_{\text{Gasteilchen}} \quad (3.5.7)$$

$$(3.5.8)$$

Führt man diese Reihe zu Ende, so bekommt man als das mittlere Volumen für N Teilchen:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N V_n = V - \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=1}^N (n-1)8V_{\text{Gasteilchen}}}_{=N(N-1)8V_{\text{Gasteilchen}}} \quad (3.5.9)$$

Mit dem Molvolumen V_M für N_A Teilchen ergibt sich:

$$V_{M,\text{reales Gas}} \rightarrow V_M - 4N_A V_{\text{Gasteilchen}} = V_M - b \quad (3.5.10)$$

mit b einer gasart-abhängigen festen Konstanten.

Neben dem Volumen ändert sich allerdings bei einem realen Gas auch der Druck durch die anziehende Wechselwirkung der Gasteilchen untereinander. Betrachten wir ein Gasteilchen A , das mit den Gasteilchen B der Umgebung eine anziehende Wechselwirkung eingeht. Im Inneren des Mediums heben sich die Kräfte auf A auf, da alle Richtungen gleichberechtigt sind. Liegt das Gasteilchen A allerdings an der Oberfläche, so entsteht eine Nettokraft, die das Teilchen nach innen anzieht (siehe Abb. 3.5.1). Dies ist gleichbedeutend mit einem äußeren Druck. Dieser sog. **Binnendruck** ist proportional zur Anzahl der Gasteilchen B und zur Anzahl der Gasteilchen A an der Oberfläche. Beides skaliert mit der Dichte der Gasteilchen N/V in dem Volumen. Damit läßt sich der Druck neu formulieren als:

$$p_{\text{reales Gas}} \rightarrow p + c \left(\frac{N_A}{V} \right)^2 = p + \frac{a}{V^2} \quad (3.5.11)$$

mit einer gasart-abhängigen Konstante c bzw. a . Das endliche Volumen und der Binnendruck in einem realen Gas führen zur sog. **van-der Waals**

Zustandsgleichung eines realen Gases (für ein Mol, das ein Molvolumen V_M einnimmt):

$$\boxed{\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right) (V_M - b) = RT} \quad (3.5.12)$$

Bezieht man alles auf eine Anzahl von n Mol eines Gases in einem Volumen V , so bekommt man:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \quad (3.5.13)$$

Bei einem realen Gas ändert sich auch die innere Energie, die jetzt zum Teil durch die Bewegungsenergie aber auch durch die *potentielle Energie* gegeben ist. Komprimiert man das Volumen eines realen Gases, so verringert sich der Abstand der Gasteilchen. Dadurch verringert sich bei einer attraktiven Wechselwirkung die potentielle Energie. Dieser Betrag läßt sich formal aus einer Integration der Arbeit $p dV$ ableiten zu:

$$E_{pot} = \int_{\infty}^V \frac{a}{V_M^2} dV = -\frac{a}{V_M} \quad (3.5.14)$$

Damit wird die gesamte innere Energie zu:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} f RT - \frac{a}{V_M}} \quad (3.5.15)$$

Dies hat Folgen für die Expansion eines realen Gases im Vergleich zu einem idealen Gas. Expandiert man ein ideales Gas in Vakuum (freie Expansion) so ändert sich seine Temperatur nicht, da das Gas keine Arbeit leisten muß. Expandiert man allerdings ein reales Gas in Vakuum (bzw. einem sehr geringen Druck) so kann es gegen die innere Wechselwirkung Arbeit leisten und dementsprechend abkühlen. Betrachten wir eine sog. adiabatische (kein Ausgleich der Wärme mit der Umgebung) Expansion bei konstantem Druck. Wir suchen zur Bestimmung des Gleichgewichts das Minimum der Enthalpie.

$$H = U + pV \quad (3.5.16)$$

Für U setzen wir obigen Ausdruck ein. Die van der Waals-Zustandsgleichung lösen wir auf zu:

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2} \quad (3.5.17)$$

Damit bekommt man:

$$H = RT \left(\frac{f}{2} + \frac{V_M}{V_M - b} \right) - \frac{2a}{V_M} \quad (3.5.18)$$

Nachdem $dH = 0$ gelten muß, stehen die Änderung der Enthalpie mit dem Volumen und mit der Temperatur in folgendem Zusammenhang:

$$dH = \frac{dH}{dV}dV + \frac{dH}{dT}dT = 0 \quad (3.5.19)$$

Die Ableitungen $\frac{dH}{dV}$ und $\frac{dH}{dT}$ bestimmen wir aus Gl. 3.5.18 und bekommen:

$$\frac{dT}{dV} \simeq \frac{bRT - 2a}{\left(\frac{f}{2} + 1\right) RV_M^2} \quad (3.5.20)$$

Man erkennt daß für $2a > bRT$ die Temperatur bei Vergrößerung des Volumens abnimmt. D.h. das Gas kühlt sich ab, da es gegen den Binnendruck Arbeit leistet. Dies bezeichnet man als **Joule-Thomson-Effekt**. Dies gilt allerdings nur unterhalb der sog. **Inversionstemperatur** T_I :

$$T_I = \frac{2a}{bR} \quad (3.5.21)$$

Bei höheren Temperaturen nimmt bei der Expansion sogar die Temperatur zu!

3.5.2 Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht

Die Zustandsgleichung eines realen Gases 3.5.12 läßt sich in einem pV-Diagramm darstellen. Man erkennt, daß für sehr hohe Temperaturen die Form der Kurven für konstante Temperatur ähnlich zu den Kurven eines idealen Gases sind. Bei Temperaturen unterhalb einer kritischen Temperatur T_K durchlaufen die Kurven allerdings Minima und Maxima! Verfolgt man eine dieser Kurven so bekommt man Bereiche in denen $\frac{dp}{dV} > 0$ ist. Dies bedeutet, daß der Druck bei einer *Vergrößerung* des Volumens zunimmt. Dies ist unphysikalisch!

Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man berücksichtigt, das bei einem realen Gas **Phasenübergänge** auftreten können. Bei einem Phasenübergang findet eine Umwandlung von *fest* nach *flüssig* nach *gasförmig* statt. Betrachten wir dazu ein System, das sich bei einer Temperatur $T < T_K$ befindet. Bei einem niedrigen Druck und einem großen Volumen verhält sich das System wie ein ideales Gas. Wenn wir den Punkt A in Abb. 3.5.2 erreichen, folgt das System *nicht* mehr der Kurve wie von Gl. 3.5.12 vorgegeben, sondern der Geraden ABC. Auf dieser Geraden bleibt der Druck konstant und die Verkleinerung des Volumens, führt zu einer Phasenumwandlung von *gasförmig*

nach *flüssig*. Am Punkt A bilden sich die ersten Tröpfchen und an Punkt C ist fast das ganze Gas in eine Flüssigkeit umgewandelt worden. Nach Punkt C, steigt der Druck bei einer weiteren Volumenverkleinerung sehr stark an, da Flüssigkeiten kaum kompressibel sind, d.h. eine kleine Volumenverkleinerung führt zu einer sehr starken Druckerhöhung.

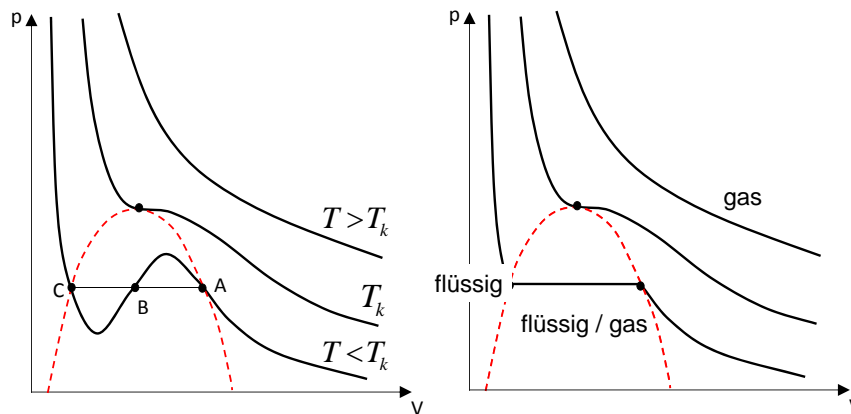


Abbildung 3.5.2: Nach der van-der Waals Zustandsgleichung eines realen Gases, findet unterhalb einer kritischen Temperatur T_K eine Phasenumwandlung statt. Im Bereich *flüssig-gasförmig* findet eine Koexistenz der flüssigen und der gasförmigen Phase statt.

Wie findet man jetzt die Gerade ABC? Dabei hilft folgende Überlegung: die Fläche unter der Kurve $p(V)$ entspricht der geleisteten Arbeit bei der Zustandsänderung (wegen $\Delta W = -pdV$). Bei den unterschiedlichen Möglichkeiten für eine Zustandsänderung von A nach C, soll jeweils die gleiche Arbeit geleistet werden. D.h. die Flächen unter der Gerade ABC und der Kurve nach Gl. 3.5.12 müssen *gleich* sein! Dies entspricht der graphischen Auftragung in Abb. 3.5.2. Man bezeichnet dies als **Maxwell-Konstruktion**.

Betrachten wir jetzt ein System, das sich in dem Übergangsbereich zwischen *gasförmig* und *flüssig* befindet. Betrachten wir das System bei konstanter Temperatur, so stellt sich ein Gleichgewicht ein, bei der die Rate der Moleküle, die verdampfen, und die Rate der Moleküle, die kondensieren, gleich ist (siehe Abb. 3.5.3). Den Druck, der sich dann einstellt, bezeichnet man als **Sättigungsdampfdruck** p_S . Dieser Druck p_S steigt mit der Temperatur an, da auch die Verdampfungsrate ansteigt. Durch den hohen Druck in dem Behälter und erhöht sich wiederum auch die Rate mit der die Teilchen wieder auf die Oberflächen treffen (\propto Teilchendichte \times mittlere Geschwin-

digkeit) und kondensieren können. Ein neues Gleichgewicht entsteht.

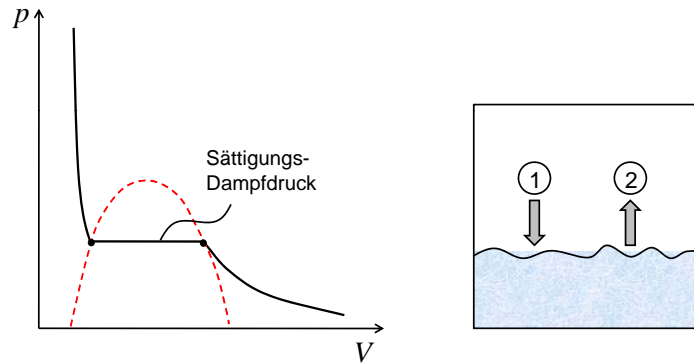


Abbildung 3.5.3: In einem System im Gleichgewicht stellt sich der Sättigungsdampfdruck ein, bei dem genauso viele Teilchen kondensieren (1) wie verdunsten (2).

Wie läßt sich jetzt diese Abhängigkeit des Sättigungsdampfdruckes von der Temperatur ausrechnen? Dazu betrachten wir einen Kreisprozeß bei dem Flüssigkeit verdampft und wieder kondensiert, wie in Abb. 3.5.4 illustriert.

Um eine Flüssigkeit mit Volumen $V_{flüssig}$ bei dem Sättigungsdampfdruck p_s zu verdampfen, muß die latente Wärme ΔQ_1 (= Aktivierungsenergie E_{act} in Abb. 3.5.4) dem System zugeführt werden. Diese wird in Arbeit umgewandelt, da sich der Druck $p_s + dp_s$ und das Volumen $V_{flüssig} \rightarrow V_{gasförmig}$ ändert:

$$\Delta W_1 = (p_s + dp_s) (V_{flüssig} - V_{gasförmig}) \quad (3.5.22)$$

Das Gas wird dann adiabatisch expandiert, wobei sich der Druck wieder um dp_s erniedrigt und die Temperatur von $T + dT$ auf T sinkt. Dann kondensiert die Flüssigkeit wieder und die Arbeit:

$$\Delta W_2 = p_s (V_{gasförmig} - V_{flüssig}) \quad (3.5.23)$$

wird von dem System aufgenommen. Insgesamt bekommen wird dann:

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2 = (V_{flüssig} - V_{gasförmig}) dp \quad (3.5.24)$$

Der Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses soll der eines Carnot-Prozesses sein und man bekommt:

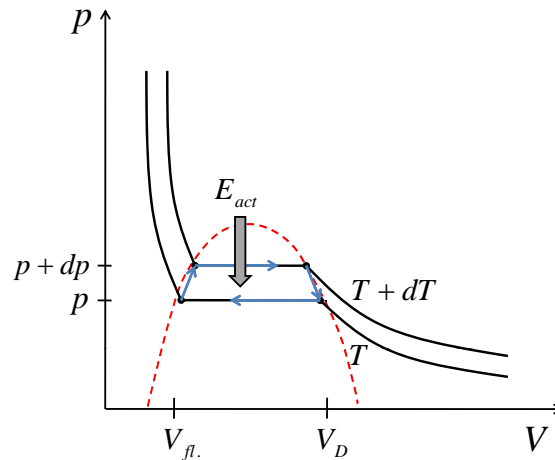


Abbildung 3.5.4: Die latente Wärme, die aufgebracht werden muß für einen Phasenübergang läßt sich aus einem Kreisprozeß ableiten.

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_1} = \frac{(V_{\text{flüssig}} - V_{\text{gasförmig}}) dp}{\Delta Q_1} = \frac{T_{\text{warm}} - T_{\text{kalt}}}{T_{\text{warm}}} \simeq \frac{dT}{T} \quad (3.5.25)$$

für $dT \ll T$. Daraus bekommt man schließlich die **Clausius-Clapeyron-Gleichung**:

$$\Delta Q = T \frac{dp}{dT} (V_{\text{gasförmig}} - V_{\text{flüssig}}) \quad (3.5.26)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich jetzt der prinzipielle Verlauf von $p_s(T)$ ausrechnen, wie in Abb. 3.5.5 skizziert. Nachdem das gasförmige Volumen sehr viel größer ist als das Volumen der Flüssigkeit, bekommt man mit $p_s V_{\text{gasförmig}} = RT$, die Gleichung:

$$\frac{1}{p_s} dp_s = \frac{\Delta Q_{\text{Verdampfung}}}{RT^2} dT \quad (3.5.27)$$

mit der Lösung:

$$p_s(T) = p_0 e^{-\frac{\Delta Q_{\text{Verdampfung}}}{RT}} \quad (3.5.28)$$

D.h. der Sättigungsdampfdruck steigt exponentiell mit der Temperatur⁻¹ an. Aus der Bestimmung des Sättigungsdampfdruckes bei gegebener Temperatur läßt sich zudem die latente Wärme berechnen, die für den Pha-

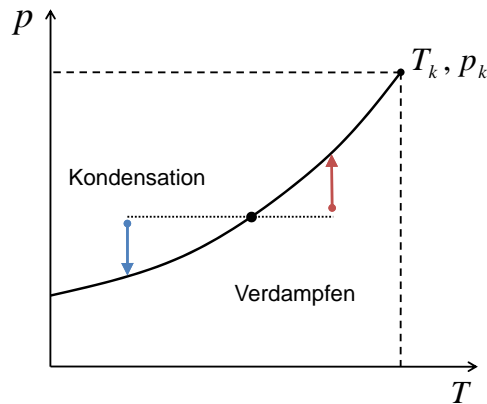


Abbildung 3.5.5: Der Sättigungsdampfdruck stellt sich bei einem Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht ein.

senübergang notwendig ist. Im folgenden werden einige Beispiele für das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht diskutiert:

- **Sieden von Wasser**

Die Dampfdruckkurve wird beim Siedepunkt von Wasser in Abhängigkeit vom Luftdruck sichtbar. Bei sehr geringem Druck findet der Phasenübergang *flüssig-gasförmig* schon bei sehr viel geringerer Temperatur statt. D.h. im Gebirge siedet das Wasser schon bei Temperaturen deutlich unter 100° . Im umgekehrten Maße wird in einem Dampfkochtopf der Druck erhöht, so daß das Garen bei höheren Temperaturen stattfinden kann.

- **Wettergeschehen**

Fügt man zum Beispiel eine Flüssigkeit in einen evakuierten Behälter ein, so wird diese solange verdampfen bis der Sättigungsdampfdruck erreicht ist. Falls man im umgekehrten Sinne ein Gas in einen evakuierten Behälter einfüllt, so wird das Gas solange *nicht* kondensieren, bis der Druck den Sättigungsdampfdruck erreicht hat. Der Sättigungsdampfdruck von Wasser in der Atmosphäre entspricht 100% Luftfeuchtigkeit. Dieser Wert wird allerdings selten erreicht, da ein System für diese Phasenumwandlung sehr lange benötigt, so daß man beim Wettergeschehen auch Luftfeuchtigkeiten ungleich 100% beobachten kann. Erst falls die Luft steht und keine Durchmischung in der Atmosphäre auftritt kommt man den 100% Luftfeuchte nahe (schwüle

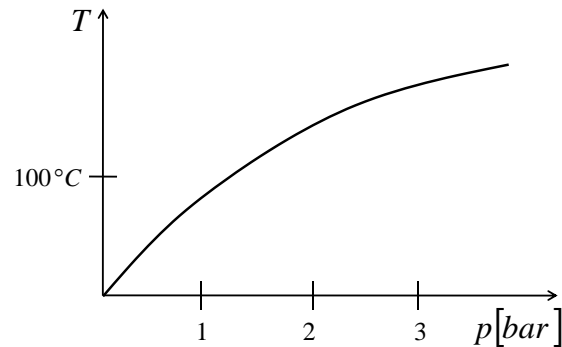


Abbildung 3.5.6: Sieden von Wasser.

Luft). Erniedrigt man zum Beispiel bei 100% Luftfeuchtigkeit die Temperatur, so erniedrigt sich der Sättigungsdampfdruck und Kondensation setzt ein. Es regnet!

- **Geysire**

Bei einem Geysir wird an dem unteren Ende eines wassergefüllten Schlotes die Wassersäule erhitzt (siehe Abb. 3.5.7). Durch den hohen Druck (p_1) erwärmt sich das Wasser bis auf über 100° bis sich Gasblasen bilden. Wenn diese Gasblasen in dem engen Schlot emporsteigen, kann es passieren, daß sie den Druck am unteren Ende der Wassersäule etwas verringern ($p_1 \rightarrow p_0$). Durch die Druckerniedrigung kann nun mehr Wasser den Phasenübergang schlagartig vollziehen und eine große Menge an Dampf wird freigesetzt. Der sich dabei aufbauende Druck führt zu einem explosionsartigen Ausstoßen der Flüssigkeitssäule.

3.5.3 Phasendiagramme

Neben dem Phasenübergang *gasförmig-flüssig*, kann noch der Phasenübergang *flüssig-fest* stattfinden. In einem pT-Diagramm kann man wieder die einzelnen Bereiche unterscheiden. Die Kurve des Sättigungsdampfdruckes p_s wird beschrieben durch eine Lösung der Gleichung:

$$\Delta Q_{\text{Verdampfung}} = \frac{dp_s}{dT} T (V_{\text{gasförmig}} - V_{\text{flüssig}}) \quad (3.5.29)$$

Für den Phasenübergang *fest-flüssig*, dem Schmelzen läßt sich wieder die Clausius-Clapeyron-Gleichung bemühen:

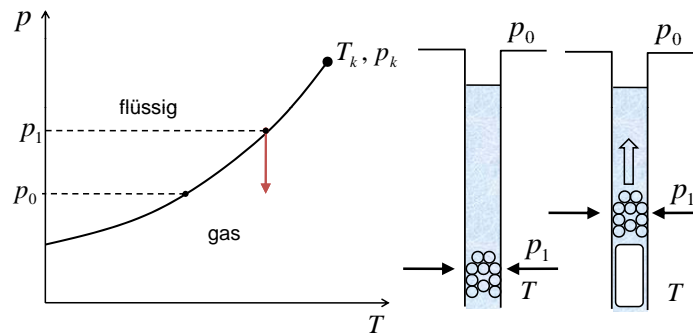


Abbildung 3.5.7: Bei einem Geysir führt die Blasenbildung in der Tiefe zu einem spontanen Druckabfall und damit dem schlagartigen Verdampfen der Flüssigkeit.

$$\Delta Q_{\text{Schmelzen}} = \frac{dp_S}{dT} T (V_{\text{flüssig}} - V_{\text{fest}}) \quad (3.5.30)$$

Die latente Wärme und der Volumenunterschied bestimmen gemäß dieser Gleichung die Steigung der Kurve $p_S(T)$.

Überlagert man das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht und das Fest-Flüssig-Gleichgewicht, so erkennt man drei Bereiche in einem Phasendiagramm (Abb. 3.5.8): *fest*, *flüssig* und *gasförmig*. Am sogenannten **Tripelpunkt** ist die *Koexistenz* von drei Phasen möglich. Bei Wasser liegt dieser Punkt bei einem Druck von $p_T=611.657$ Pa und einer Temperatur $T_T=273.16$ K. Dieser Tripelpunkt ist eindeutig für die jeweilige Substanz und eignet sich zur Eichung von Temperaturmessmethoden. Den Übergang zwischen den Phasen *fest-flüssig* (Weg 2 in Abb. 3.5.8) bezeichnet man als **Schmelzen/Frieren**; den Übergang zwischen den Phasen *flüssig-gasförmig* (Weg 3 in Abb. 3.5.8) bezeichnet man als **Verdampfen/Verflüssigen**; den direkten Übergang zwischen den Phasen *fest-gasförmig* (Weg 1 in Abb. 3.5.8) bezeichnet man als **Sublimieren/Kondensieren**.

Oberhalb einer kritischen Temperatur T_k und einem Druck p_k wird die Substanz **überkritisch**, da eine Unterscheidung zwischen Flüssigkeit und Gas nicht mehr sinnvoll wird. Am kritischen Punkt selbst bilden sich fortlaufend Flüssigkeitströpfchen und verschwinden wieder⁷. Der überkritische Zustand für Temperaturen $T > T_k$ und Drücken $p > p_k$ vereint die guten Lösungsmitelegenschaften einer Flüssigkeit mit den guten Transportei-

⁷Im Experiment wird das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht intransparent durch die starke Lichtstreuung an den feinen Tröpfchen

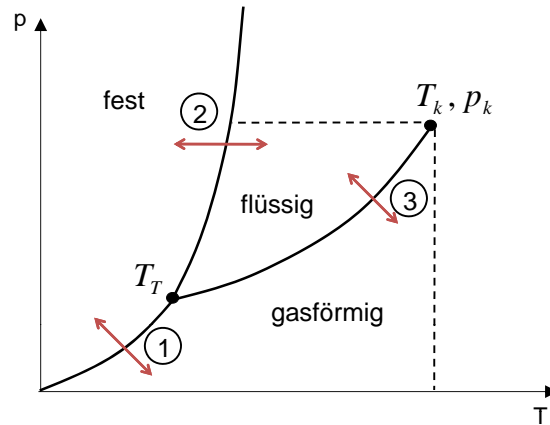


Abbildung 3.5.8: In einem pT-Diagramm lassen sich die Phasen fest-flüssig-gasförmig unterteilen. Die Phasenübergang (1) entspricht Kondensieren-Sublimieren; (2) Schmelzen-Frieren; (3) Verdampfen-Verflüssigen.

enschaften von Gasen. Überkritische Medien werden derzeit in der Chemie genutzt, um Reaktionen optimal ablaufen zu lassen bei denen eine perfekte Durchmischung der Reaktanden wichtig wird. Typisches Beispiel ist überkritisches CO_2 ($p_K = 73 \text{ atm}$, $T_k = 304 \text{ K}$), das als ausgezeichnetes Lösungsmittel dienen kann. So wird z.B. die Entkoffeinierung von Kaffee und die Entnikotinisierung von Tabak mittels überkritischem CO_2 als Lösungsmittel großtechnisch realisiert.

Phasenübergänge lassen sich in unterschiedliche Ordnungen einteilen. Bei einem **Phasenübergang 1. Ordnung** beobachtet man eine direkte Unstetigkeit der thermodynamischen Potentiale. Beispiel wären alle Prozesse bei denen latente Wärme aufgewendet werden muß. Bei einem **Phasenübergang 2. Ordnung** beobachtet man eine Unstetigkeit erst in der ersten Ableitung der thermodynamischen Potentiale. Beispiel wären alle Prozesse bei denen keine latente Wärme aufgewendet werden muß, bei denen sich aber die Freiheitsgrade in dem System ändern (Beispiel Magnetisierung).

Für die Zahl der frei wählbaren Zustandsgrößen (T, p, V) läßt sich die sog. **Gibbs'sche Phasenregel** anwenden. Mit f der Zahl der freien Zustandsvariablen und q der Zahl der koexistenten Phasen bekommt man den Zusammenhang:

$$f = 3 - q \quad (3.5.31)$$

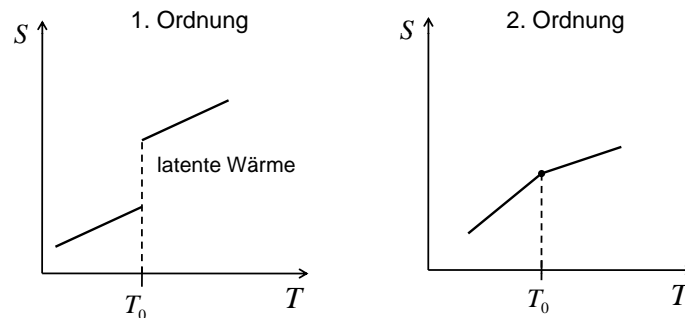


Abbildung 3.5.9: Phasenübergang 1. und 2. Ordnung.

Bei einem Gas wäre $q = 1$ und $f = 2$, d.h. p und T lassen sich zum Beispiel frei einstellen, und V ergibt sich aus der Zustandsgleichung. Bei der Dampfdruckkurve ist $q = 2$, d.h. für gegebene Temperatur gibt es einen Sättigungsdampfdruck p_s . Das Volumen ergibt sich wieder aus der Zustandsgleichung. Am Tripelpunkt selbst ist $q = 3$, d.h. $f = 0$ und alle Zustandsvariablen sind festgelegt.

Ein Phasendiagramm betrachtet immer ein System, das sich bei gegebenen äußeren Parametern wie Druck, Temperatur, Volumen etc. im Gleichgewicht befindet. In der Realität erfolgt eine Änderung der äußeren Parameter allerdings nicht beliebig langsam, so daß das Erreichen des Gleichgewichts eine endliche Zeit in Anspruch nehmen kann. Dies soll an folgenden Beispielen erklärt werden:

- **Kondensstreifen**

Betrachten wir das Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht. Verändert man einen äußeren Parameter, der zum Beispiel den Anteil an der flüssigen Phase erhöhen würde, so kann dieser Übergang in der Regel nicht *instantan* erfolgen. Beispiel wäre die Unterkühlung von Wasserdampf: kühlt man gesättigten Wasserdampf ab, so muß sich die flüssige Phase bilden. Damit sich allerdings neue Flüssigkeitströpfchen bilden, müssen sich freie Moleküle verbinden. Aus der Betrachtung von Stoßprozessen unter Energie- und Impulserhaltung ist bekannt, daß eine einfache Rekombination von zwei Wassermolekülen nicht möglich ist. Erst ein Stoß von drei Stoßpartnern ermöglicht die gleichzeitige Erfüllung von Energie- und Impulserhaltung. Diese Dreier-Stöße sind allerdings sehr unwahrscheinlich, so daß die Bildung von Flüssigkeitströpfchen eine lange Zeit in Anspruch nimmt. Die Rate kann sich allerdings stark

erhöhen werden, wenn sog. **Kondensationskeime** existieren wie z.B. Staub. Dies erklärt die Bildung von Kondensstreifen hinter Flugzeugen, die immer dann in großer Höhe auftreten, wenn sich feuchte, unterkühlte Luft in der Atmosphäre befindet. Die Rußpartikel in den Flugzeugabgasen wirken dann wie Kondensationskeime.

- **Blitzeis**

Die endlichen Zeiträume für das Abfließen eines Phasenübergangs wird auch beim sog. Blitzeis sichtbar: in der Atmosphäre kann unterkühltes Wasser entstehen, das keine Zeit hatte, um zu Eis oder Hagel zu kondensieren. Trifft ein solch unterkühlter Wassertropfen auf den Boden, so bildet sich sofort Eis, da die Bodenoberfläche genügend Kondensationskeime zur Verfügung stellt. Der Boden muß dabei *nicht* gefroren sein, da das Wasser selbst schon eine Temperatur unter Null Grad besitzt.

- **Nebelkammer**

In der Teilchenphysik verwendet man auch Detektoren, die nach diesem Prinzip funktionieren. Hierbei wird ein Volumen schnell variiert in dem sich Alkoholdampf bei Sättigungsdampfdruck befindet. Bei Verkleinerung des Volumens erhöht man den Anteil an flüssiger Phase. Allerdings kann dieser Vorgang nicht beliebig schnell erfolgen. In dem pV-Diagramm folgt man deshalb der Isothermen, wie in Abb. 3.5.10 gezeigt. Läuft nun ein Elementarteilchen durch dieses Gasvolumen, so ionisiert es die Gasmoleküle und hinterlässt eine Spur an Ladungsträgern. Diese Ladungsträger wirken wie Kondensationskeime und die Spur wird als Kondensstreifen sichtbar.

Bei schneller Änderung der äußeren Parameter kann man somit Flüssigkeiten und Gase **unterkühlen (supercooling)** oder **überhitzen (superheating)**. Das Einbringen von einem *einzigsten* Kondensationskeim läßt allerdings die Phasenumwandlung spontan und sehr schnell einsetzen. D.h. eine unterkühlte Flüssigkeit gefriert schlagartig bzw. eine überhitzte Flüssigkeit verdampft schlagartig. Solche Systeme besitzen ein hohes Gefährdungspotential in der Technik.

Lösungsmittel

Im folgenden wollen wir ein Medium als Lösungsmittel betrachten in das eine andere Substanz (z.B. ein Salz) eingebracht wird. Dabei sinkt in der Regel der Dampfdruck um einen Betrag Δp_s , da bei einer Desorption von

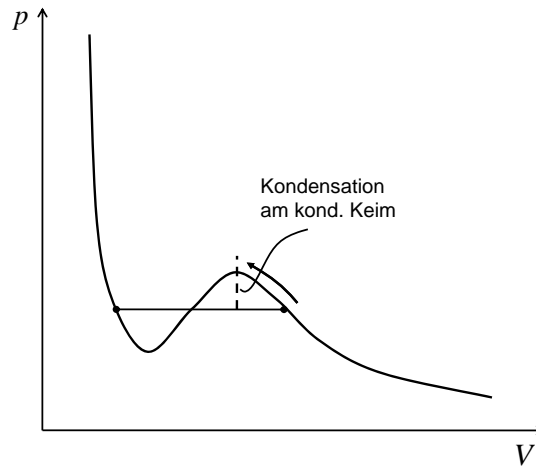


Abbildung 3.5.10: Bei schnellen Änderungen, kann das System einer Phasenänderung nicht mehr *instantan* folgen. Es entsteht z.B. *übersättigter* Wasserdampf.

Flüssigkeitsteilchen auch die *anziehende* Wechselwirkung der gelösten Substanz überwunden werden muß. Für die Änderung des Dampfdrucks findet sich ein empirisches Gesetz der Form:

$$\frac{\Delta p_s}{p_s} = -\frac{n_1}{n_0 + n_1} \approx -\frac{n_1}{n_0} \quad (3.5.32)$$

für $n_1 \ll n_0$ mit n_1 der Molzahl der gelösten Substanz und n_0 der Molzahl des Lösungsmittels. Wie ändern sich nun die anderen Zustandsvariablen? Betrachten wir dazu wieder die Clausius-Clapeyron -Gleichung.

$$\Delta Q = \frac{dp_s}{dT} T (V_{Dampf} - V_{Flüssigkeit}) \quad (3.5.33)$$

mit $V_{Dampf} \gg V_{Flüssigkeit}$ und $V_M = \frac{RT}{p_s}$ bekommen wir:

$$\Delta Q = \frac{dp_s}{dT} RT^2 \frac{1}{p_s} \quad (3.5.34)$$

bzw.

$$\frac{\Delta Q}{RT^2} dT = \frac{1}{p_s} dp_s \quad (3.5.35)$$

Wir integrieren über den Temperaturunterschied ΔT und den Druckunterschied Δp_s und bekommen:

$$\int_T^{T+\Delta T} \frac{\Delta Q}{RT^2} dT = \int_{p_s}^{p_s+\Delta p_s} \frac{1}{p_s} dp_s \quad (3.5.36)$$

$$\frac{\Delta Q}{R} \left[-\frac{1}{T+\Delta T} + \frac{1}{T} \right] = \ln(p_s + \Delta p_s) - \ln p_s = \ln \left(1 + \frac{\Delta p_s}{p_s} \right) \quad (3.5.37)$$

Nähern wir diese Gleichung für $\Delta T \ll T$ und $\Delta p_s \ll p_s$ bekommt man:

$$\Delta T = \frac{RT^2}{\Delta Q} \frac{\Delta p_s}{p_s} \quad (3.5.38)$$

An dieser Stelle werden nur die Beträge der Temperatur- und Druckänderungen betrachtet, da die Vorzeichen von der Richtung der Integration in Gl. 3.5.36 abhängen. Im allgemeinen verschiebt sich die Dampfsättigungskurve im Phasendiagramm nach unten durch die Dampfdruckerniedrigung, wie in Abb. 3.5.11 gezeigt ist. Eine Zugabe des Salzes in ein Lösungsmittel führt gleichzeitig zu einer Erniedrigung des Dampfdruckes und bei konstanten Druck zu einer Erhöhung des Siedepunktes, d.h. die Flüssigkeit inkl. Salz siedet bei einer höheren Temperatur.

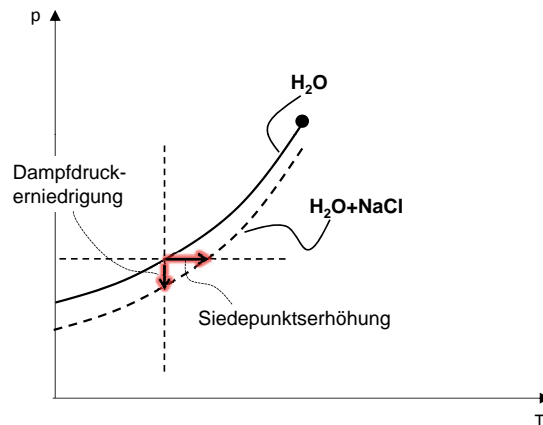


Abbildung 3.5.11: Die Zugabe eines Stoffes (z.B. Salz) in ein Lösungsmittel führt zu einer Erniedrigung des Dampfdruckes und zu einer Erhöhung der Siedetemperatur.

Mit dem empirischen Zusammenhang 3.5.32 zwischen p_s und der Konzentration der gelösten Substanz ergibt sich für den Betrag der Temperaturänderung $n_1 \ll n_0$ das sog. **Raoult'sche Gesetz**:

$$\boxed{\Delta T = \frac{RT^2}{\Delta Q} \frac{n_1}{n_0}} \quad (3.5.39)$$

D.h. die Zugabe eines Lösungsmittel erniedrigt sich der Sättigungsdampfdruck gemäß Gl. 3.5.32 und die Kurve in Abb. 3.5.4 verschiebt sich entsprechend nach unten. Im gleichen Zuge erhöht sich die Siedetemperatur gemäß Gl. 3.5.39.

Betrachten wir im folgenden das Beispiel der Mischung von zwei Substanzen 1 und 2 mit unterschiedlichen Sättigungsdampfdrücken der reinen Phasen $p_{1,0}$ und $p_{2,0}$. In der Mischung stellt sich ein Gesamtdruck p ein, der sich aus der Summe der sogenannten **Partialdrücke** ergibt:

$$p = p_1 + p_2 \quad (3.5.40)$$

Nach dem Raoult'schen Gesetz gilt für die Änderung des Druckes in Abhängigkeit von den Teilchendichten n_1 und n_2 der beiden Substanzen.

$$\frac{\Delta p_1}{p_{1,0}} = -\frac{n_1}{n_1 + n_2} = x_1 \quad \frac{\Delta p_2}{p_{2,0}} = -\frac{n_2}{n_1 + n_2} = x_2 \quad (3.5.41)$$

mit x_1 und x_2 den jeweiligen Konzentrationen, für die gilt $x_1 + x_2 = 1$. Mit

$$\frac{\Delta p_1}{p_{1,0}} = \frac{p_1 - p_{1,0}}{p_{1,0}} = x_1 \quad \frac{\Delta p_2}{p_{2,0}} = \frac{p_2 - p_{2,0}}{p_{2,0}} = x_2 \quad (3.5.42)$$

bekommt man schließlich die Abhängigkeit:

$$p = p_1 + p_2 = p_{2,0} + x_1 (p_{1,0} - p_{2,0}) \quad (3.5.43)$$

Man erkennt, daß der Sättigungsdampfdruck p in der Mischung linear zwischen $p_{2,0}$ und $p_{1,0}$ variiert, wenn man die Konzentration x_1 laufend erhöht. Dies ist in Abb. 3.5.12 dargestellt.

Das chemische Potential

Bislang hatten wir beim ersten Hauptsatz der Wärmelehre zunächst nur die Änderung der inneren Energie durch die Zufuhr von Wärme und Arbeit betrachtet. Wenn wir zusätzlich annehmen, daß wir von außen neue Teilchen hinzufügen können, so ändert sich im selben Maße auch die innere Energie. Für dieses Hinzufügen von Teilchen muß jedoch eine gewisse Energiemenge aufgebracht werden, da die Teilchen in dem Gas zum Beispiel eine mittlere Geschwindigkeit haben, auf die ein Teilchen zunächst beschleunigt werden

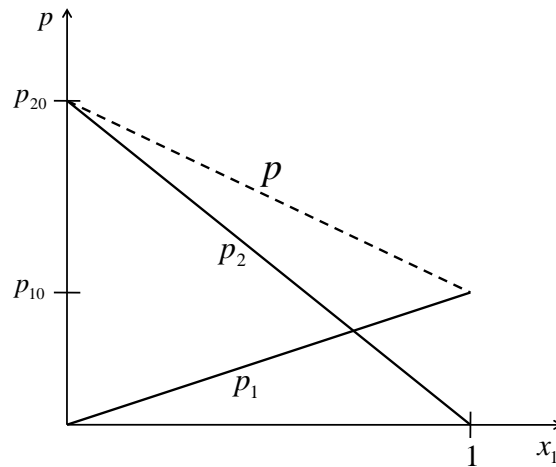


Abbildung 3.5.12: Sättigungsdampfdruck p in einer Mischung aus zwei Komponenten 1 und 2 mit Konzentration x_1 bzw. $x_2 = 1 - x_1$.

muß. Die notwendige Energie bezeichnet man als **chemisches Potential** μ . Wir können den ersten Hauptsatz somit erweitern zu:

$$dU = dQ - pdV + \mu dN \quad (3.5.44)$$

D.h. ändern wir die Teilchenzahl um einen Betrag dN so erhöht sich die innere Energie um einen Betrag μdN . Dieser erste Hauptsatz läßt sich auch verallgemeinern für ein System mit $j = 1..n$ Komponenten, die jeweils ihr eigenes chemisches Potential μ_j besitzen:

$$dU = dQ - pdV + \sum_j^n \mu_j dN_j \quad (3.5.45)$$

Das chemische Potential einer Komponente hängt von den Zustandsgrößen ab, die für das System gelten. Dies sind die Temperatur T und der Anteil am Gesamtdruck p , den eine einzelnen Komponente beiträgt. Für n Komponenten bekommen wir einen Gesamtdruck p aus der Summe der sog. **Partialdrücke** p_j mit:

$$p = \sum_j^n p_j \quad (3.5.46)$$

Wie ist jetzt die Abhängigkeit $\mu_j(T, p_j)$? Neben dem ersten Hauptsatz gilt für die innere Energie als thermodynamischem Potential auch allgemein

(nur 1 Komponente mit Potential μ):

$$U = TS - pV + \mu N \quad (3.5.47)$$

Bilden wir das totale Differential so bekommen wir:

$$dU = TdS + SdT - pdV - Vdp + \mu dN + d\mu N \quad (3.5.48)$$

Nachdem beide Gleichungen 3.5.44 und 3.5.48 gelten sollen, können wir auch 3.5.44 in 3.5.48 einsetzen und bekommen eine abgeleitete Beziehung:

$$\boxed{0 = SdT - Vdp + Nd\mu} \quad (3.5.49)$$

Dies bezeichnet man als **Gibbs-Duhem-Gleichung**. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen T, p und μ einer Komponente in dem System. Im folgenden wollen wir die Anwendung des chemische Potentials an zwei Beispielen illustrieren:

- **Nukleation, $T=\text{const.}$, $V=\text{const.}$**

Wir betrachten ein Gas-Flüssigkeits-Gleichgewicht bei dem eine Temperatur T und ein Druck p von außen vorgegeben sind. In Abhängigkeit von diesem Druck p kann die Bildung von Flüssigkeitströpfchen einsetzen, man spricht von **Nukleation**. Für ein System mit gegebenem Druck und Temperatur ist die freie Enthalpie G die richtige Formulierung des ersten Hauptsatzes:

$$G = U + pV - TS \quad (3.5.50)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung 3.5.47, so erkennt man sofort, daß gilt:

$$G = U + pV - TS = \mu N \quad (3.5.51)$$

D.h. die freie Enthalpie ist *identisch* mit dem Produkt μN . Hat man mehrere Phasen oder unterschiedliche Gasmoleküle in einem System vorliegen, so besitzt jeder Bestandteil sein eigenes chemisches Potential und man bekommt im allgemeinen für ein System mit n Komponenten (Index j):

$$G = \sum_{j=1}^n \mu_j N_j \quad (3.5.52)$$

In Analogie zum ersten Hauptsatz gilt

$$dG = \sum_{j=1}^n \mu_j dN_j = 0 \quad (3.5.53)$$

Im Flüssigkeits-Dampf-Gleichgewicht bei dem Sättigungsdampfdruck p_0 haben wir zum Beispiel:

$$\mu_{Flüssigkeit} dN_{Flüssigkeit} + \mu_{Dampf} dN_{Dampf} = 0 \quad (3.5.54)$$

Im Gleichgewicht muß die Zahl der kondensierenden und der verdampfenden Teilchen pro Zeit gleich sein, d.h. es gilt $dN_{Flüssigkeit} = -dN_{Dampf}$. Damit gilt:

$$\mu_{Flüssigkeit} = \mu_{Dampf} \quad (3.5.55)$$

D.h. befindet sich ein System im Gleichgewicht, so haben sich die chemischen Potentiale der unterschiedlichen Phasen für eine bestimmte Komponente aneinander *angepaßt*.

Bei der Nukleation betrachten wir jetzt eine Reaktion von N Gasteilchen, die als neues Flüssigkeitströpfchen kondensieren sollen. Für diesen Übergang gilt:

$$\Delta G = G_{Flüssigkeit} - G_{Dampf} = -\Delta\mu N \quad (3.5.56)$$

Dieser Vorgang kann nur stattfinden, wenn sich das chemische Potential der Gasteilchen von dem der Flüssigkeit unterscheidet ($\Delta\mu \neq 0$)! Dies kann man erzielen, wenn man den Druck der Gasphase gegenüber dem Sättigungsdampfdruck erhöht, wodurch sich das chemische Potential der Gasteilchen auch verschiebt. Jetzt ist das chemische Potential der Flüssigkeitsteilchen kleiner und der Vorgang der Kondensation erniedrigt die Energie in dem System um $(\mu_{Gas} - \mu_{Flüssigkeit})N$.

Für die Berechnung der Druckabhängigkeit des chemischen Potentials gehen wir wieder von der Gibbs-Duhem Beziehung für $T = \text{const.}$ aus:

$$d\mu = \frac{1}{N} V dp \quad (3.5.57)$$

D.h. wenn wir den Druck von $p_0 \rightarrow p$ ändern, bekommen wir eine Änderung des chemischen Potentials von:

$$\Delta\mu = \int_{p_0}^p \frac{1}{N} V dp = \int_{p_0}^p \frac{1}{N} N k_B T \frac{1}{p} dp = k_B T \ln \frac{p}{p_0} \quad (3.5.58)$$

D.h. mit steigendem Druck steigt auch das chemische Potential in einem gegebenen Gasvolumen.

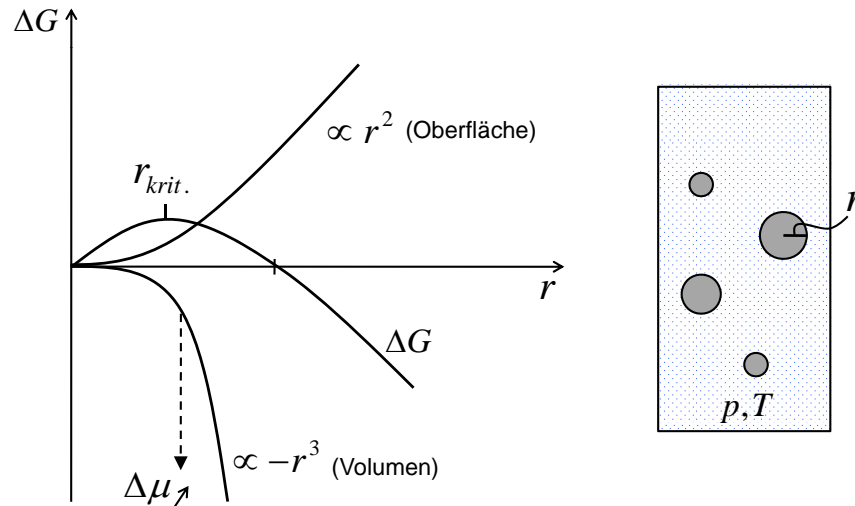


Abbildung 3.5.13: Änderung der freien Enthalpie ΔG bei der Nukleation von Tröpfchen in der Gasphase. Erst ab einem kritischen Radius r_{krit} bleiben die Tröpfchen stabil.

Bei der Bildung von Tröpfchen wird jedoch eine Flüssigkeit-Gas Grenzfläche geschaffen, wobei die Oberflächenenergie E_{OF} aufgebracht werden muß. Dies ist ein zusätzlicher Beitrag bei der Energiebilanz und wir bekommen für die Bildung eines Tröpfchens eine Energieänderung:

$$\Delta G = -\Delta\mu N + A E_{OF} \quad (3.5.59)$$

Mit A der Oberfläche des Tröpfchens. Die Anzahl der Teilchen im Volumen skaliert mit dem Tröpfchenradius r^3 , während die Oberfläche des Tröpfchens mit r^2 skaliert. Trägt man die Änderung der Enthalpie ΔG in Abhängigkeit vom Tröpfchenradius auf, so bekommt man eine Abhängigkeit wie in Abb. 3.5.13 gezeigt.

Man erkennt, daß *unterhalb* eines kritischen Radius r_{krit} , die Enthalpie bei Vergrößerung des Tröpfchens zunimmt, d.h. die Reaktion der

Bildung eines Tröpfchens kann *nicht* ablaufen, weil der Endzustand *nicht* energetisch günstiger ist. Erst bei größeren Tröpfchen wird die Änderung der Enthalpie negativ und die Reaktion kann ablaufen. Der kritische Radius ist klein und oftmals von der Größenordnung mehrerer Moleküldurchmesser. D.h. falls sich ein neues größeres Molekül bei Dreier-Stoß-Rekombinationen bildet, kann das weitere Wachstum dieses Tröpfchens ungehindert fortschreiten, da jetzt ΔG immer negativ bleibt. Nachdem Dreier-Stoß-Rekombinationen⁸ selten vorkommen verstreicht eine gewisse Zeitspanne in dem übersättigten Dampf bevor die Nukleation einsetzt.

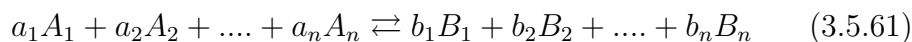
Die absolute Größe des kritischen Radius $r_{krit.}$ hängt von der Änderung des chemischen Potentials $\Delta\mu$ ab, wobei ein kleiner Wert für $r_{krit.}$ eine große Änderung von $\Delta\mu$ bedingt. D.h. übersättigt man den Dampf am Anfang sehr stark ($p \gg p_0$), so sinkt der kritische Radius und die Nukleation setzt schneller ein.

• Chemische Reaktionen

Bei der Ableitung des chemischen Potentials hatten wir die Enthalpie definiert als:

$$G = \sum_{i=1}^n \mu_i N_i \quad (3.5.60)$$

Betrachten wir jetzt eine chemische Reaktion für eine Reihe von **Edukten** A zu einer Reihe von **Produkten** B . Diese liegen in entsprechender Anzahl von Molen a und b vor. Für eine chemische Reaktion im Gleichgewicht gilt gemäß der **Stöchiometrie**:



Im Gleichgewicht muß gelten:

$$dG = \sum_{j=1}^n \mu_j dN_j = 0 \quad (3.5.62)$$

Läuft jetzt eine chemische Reaktion ab, so verringert sich die Anzahl der Edukte und es erhöht sich die Anzahl der Produkte entsprechend ihrem

⁸Nur bei Dreier-Stoß-Rekombinationen lassen sich gleichzeitig Energie- und Impulserhaltung erfüllen.

stöchiometrischem Gewicht. Die Änderungen der Teilchenzahlen dN_j können wir mir $dN_j = a_j N$ alle auf eine gleiche Anzahl N beziehen und bekommen für die Summe aller Reaktanden multipliziert mit dem chemischen Potential:

$$dG = - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i N + \sum_{j=1}^m \mu_j b_j N = 0 \quad (3.5.63)$$

D.h. es gilt:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i a_i = \sum_{j=1}^m \mu_j b_j \quad (3.5.64)$$

Bei der chemischen Reaktion ändert sich der Partialdruck der einzelnen Spezies und damit deren chemisches Potential. Uns interessiert jetzt die Abhängigkeit des chemischen Potentials von der Temperatur *und* dem Partialdruck p_j . Für das chemische Potential hatten wir:

$$d\mu_j = - \frac{1}{N_j} S_j dT + \frac{V}{N_j} dp_j \quad (3.5.65)$$

Für die Entropie S_j benutzen wir Gl. 3.4.65 mit $S_j = S_0 + \Delta S(T, p_j)$ sowie $V = \frac{k_B N_j T}{p_j}$ und bekommen als Änderung des chemischen Potentials, bezogen auf den Ausgangszustand T_0 und p_0 :

$$\begin{aligned} \Delta\mu_j(T, p_j) &= - \int_{T_0}^T \frac{1}{N} (S_0 + \Delta S) dT + \int_{p_0}^{p_j} \frac{k_B T}{p_j} dp_j \quad (3.5.66) \\ &= \int_{T_0}^T \left(S_0 + \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \left(\frac{p_0}{p_j} \right) \right] \right) dT \\ &\quad + \int_{p_0}^{p_j} \frac{k_B T}{p_j} dp_j \quad (3.5.67) \end{aligned}$$

Mit $\int \ln x dx = x \ln x - x$ und einer entsprechenden Definition von S_0 bekommen wir als einfachen Ausdruck für die Änderung des chemischen Potentials einer Komponente $\Delta\mu_j(T, p_j)$ bezogen auf den Ausgangszustand bei T_0 und p_0 :

$$\Delta\mu_j(T, p_j) = -k_B T \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \left(\frac{p_0}{p_j} \right) \right] \quad (3.5.68)$$

Für $T = T_0$ ist dieser Ausdruck identisch zu Gl. 3.5.58. Wenn wir diesen Ausdruck in Gl. 3.5.64 einsetzen, so bekommen wir

$$\sum_i a_i \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \left(\frac{p_0}{p_i} \right) \right] = \sum_j b_j \ln \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} \left(\frac{p_0}{p_j} \right) \right] \quad (3.5.69)$$

Diese Summation läßt sich anders sortieren zu:

$$\sum_i a_i \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} + \sum_i \ln \left(\frac{p_0}{p_i} \right)^{a_i} = \sum_j b_j \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2} + \sum_j \ln \left(\frac{p_0}{p_j} \right)^{b_j} \quad (3.5.70)$$

Beziehungsweise:

$$\ln \left[\left(\frac{p_0}{p_{1a}} \right)^{a_1} \left(\frac{p_0}{p_{2a}} \right)^{a_2} \dots \left(\frac{p_{1b}}{p_0} \right)^{b_1} \left(\frac{p_{2b}}{p_0} \right)^{b_2} \right] = \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2(b_1+b_2+\dots-a_1-a_2\dots)} \quad (3.5.71)$$

Wenn wir die Konzentration einer Komponente A_1 als x_{1a} bezeichnen, gemäß $\frac{p_{1a}}{p_0} = x_{1a}$, ergibt sich der Zusammenhang:

$$\boxed{\frac{x_{1b}^{b_1} x_{2b}^{b_2} \dots}{x_{1a}^{a_1} x_{2a}^{a_2} \dots} = K(T)} \quad (3.5.72)$$

Dies bezeichnet man als **Massenwirkungsgesetz** der Chemie. D.h. die Konzentrationen der Edukte und Produkte stehen im Gleichgewicht in einem festen Verhältnis zueinander, das *nur* von der Temperatur abhängt.

3.5.4 Wasser

Wasser ist bestimmend für viele Vorgänge der Biologie und der Atmosphäre. Dies begründet sich durch ein Reihe von außerordentlichen Eigenschaften, wie ungewöhnlichen Schmelz- und Siedepunkten, der Dichte-Erniedrigung beim Frieren und seinen guten Eigenschaften als Lösungsmittel. Dies sei im folgenden erläutert.

Anomalien

Wasser besitzt insgesamt 63 Anomalien, die es von chemisch gleichwertigen Flüssigkeiten wie H_2S , H_2Te , H_2Se und H_2Po abgrenzt. Im folgenden seien einige der wichtigsten genannt:

- **Dichte nimmt beim Frieren ab**

Beim Frieren von Wasser nimmt dessen Dichte ab! Aus diesem Grund schwimmt gefrorenes Wasser (=Eis) an der Oberfläche. Im Vergleich dazu sinkt zum Beispiel ein hartes Stück Kerzenwachs in flüssigem Kerzenwachs zu Boden. Falls Eis nicht schwimmen würde, würden die Meere über kurz oder lang bis zum Grund durchfrieren!

- **Wasser hat die größte Dichte bei $+4^\circ\text{C}$**

Wasser besitzt seine größte Dichte bei $+4^\circ\text{C}$. Damit ist die Temperatur in den Tiefen der Weltmeere immer bei diesem Wert und das Wasser kann dort nicht frieren!

- **Wasser hat ungewöhnlich hohe Schmelz- und Siedepunkte**

Vergleicht man die Reihe der chemisch gleichwertigen Hydrate H_2O , H_2S , H_2Te , H_2Se und H_2Po so sind die Schmelz- und Siedepunkte von Wasser ungefähr 100°C höher als erwartet, wie es in Abb. 3.5.14 illustriert ist.

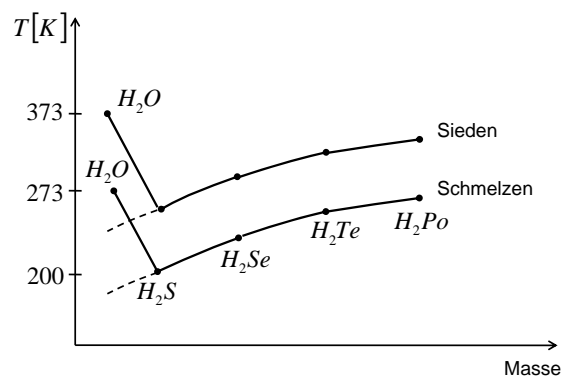


Abbildung 3.5.14: Schmelzpunkte und Siedepunkte von H_2O , H_2S , H_2Te , H_2Se und H_2Po .

- **Wasser hat eine außergewöhnliche hohe spezifische Wärmekapazität**

Wasser hat eine sehr hohe spezifische Wärmekapazität im Bereich zwischen 0°C und 40°C ⁹ mit einem Minimum bei 311 K, wie in Abb. 3.5.15 illustriert. Durch diese hohe Wärmekapazität können die Weltmeere als gute Energiespeicher in der Atmosphäre dienen.

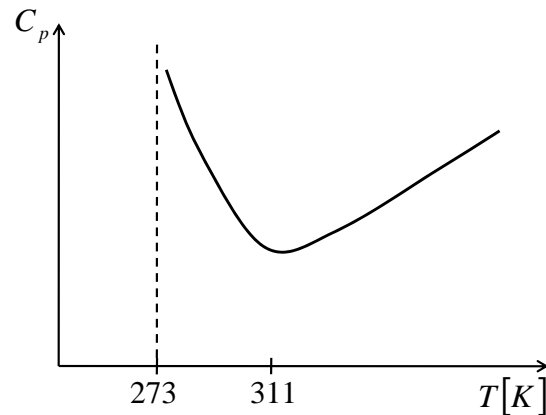


Abbildung 3.5.15: Spezifische Wärme von Wasser bei konstantem Druck. Insbesondere im Bereich zwischen 273 und 311 K ist die spezifische Wärmekapazität um ein Vielfaches höher als bei vergleichbaren Flüssigkeiten.

- **Warmes Wasser friert schneller als kaltes**

Kühlt man Wasser bei konstanter Temperatur ab, so friert warmes Wasser schneller als kaltes (Mpemba-Effekt). Bis zum Vorgang des Frierens wird kaltes Wasser stärker unterkühlt als warmes Wasser und braucht damit länger bis Kristallisation einsetzt. Dies ist in Abb. 3.5.16 veranschaulicht.

- **Wasser ist exzellentes Lösungsmittel**

Sehr viele polare Substanzen lassen sich in Wasser lösen.

Die Eigenschaften von Wasser lassen sich wieder in einem Phasendiagramm ausdrücken (siehe Abb. 3.5.17). Im Unterschied zu anderen Substanzen wird die Steigung für die Schmelzkurve wegen dem negativen Vorzeichen

⁹Am Gefrierpunkt selbst, muß $C_p = \frac{dH}{dT}$ gegen unendlich gehen, da bei einem Phasenübergang 1. Ordnung Energie in latente Wärme aber nicht in Temperaturerhöhung umgesetzt wird.

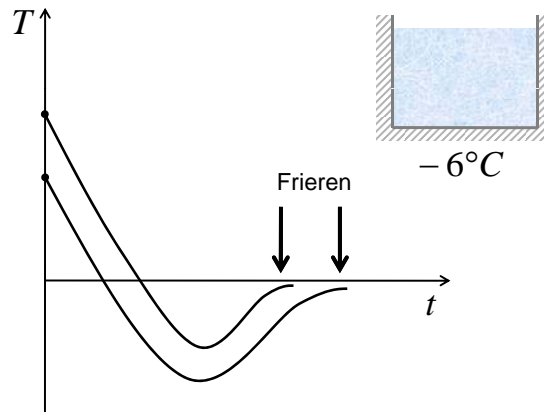


Abbildung 3.5.16: Setzt man Wasser einem Kältebad von unter 0° Grad aus, so gefriert warmes Wasser schneller als kaltes Wasser. Beim Vorgang des Frierens wird kaltes Wasser stärker unterkühlt als warmes Wasser.

des Terms ($V_{flüssig} - V_{fest}$) negativ. Dies ist im Unterschied z.B. zu CO_2 , bei dem das Volumen beim Schmelzen zunimmt.

Mikroskopische Struktur

Alle Anomalien des Wassers lassen sich durch dessen mikroskopische Struktur erklären. Ein Wassermolekül H_2O hat die Struktur eines Tetraeders, wobei zwei Ecken durch die Wasserstoffatome und zwei Ecken durch die ungebundenen Elektronenpaare des Sauerstoffatoms gegeben sind. Zwischen den Wasserstoffatomen und den ungebundenen Elektronenpaaren eines benachbarten Wassermoleküls kann eine **Wasserstoff-Brückenbindung** ausgebildet werden. Quantenmechanische Rechnungen zeigen, daß der Abstand zwischen den Sauerstoffatomen in einem Wasserdimer (zwei benachbarte H_2O -Moleküle) ca. 2.9 \AA ist (siehe Abb. 3.5.18). Dieser Abstand kann sich verkürzen, wenn mehrere Wassermoleküle zusammen kommen und sich ein dreidimensionales Netzwerk aus Tetraedern formt. Man kann folgende Strukturen unterscheiden:

- **Gasförmiges Wasser, Dampf**

In der Gasphase bilden sich als stabilste Formen in der Regel 6er Ringe von Wassermolekülen, vergleichbar zum Benzol in der organischen Chemie (siehe Abb. 3.5.18). Von diesen 6er-Ringen existieren mehrere Formen.

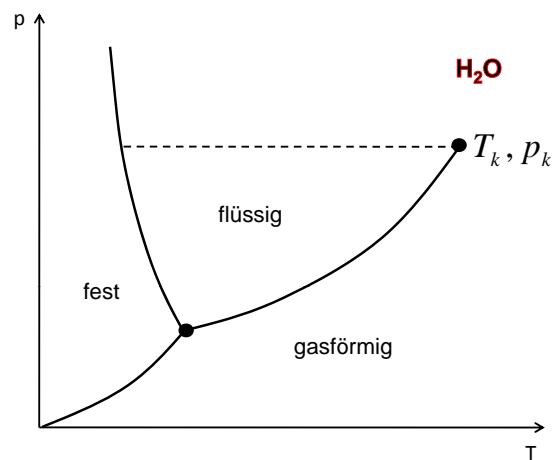


Abbildung 3.5.17: Phasendiagramm von Wasser mit der kritischen Temperatur T_k und Druck p_k . Insbesondere die negative Steigung der Schmelzkurve ist einzigartig bei der Substanz Wasser.

- **Flüssiges Wasser**

In flüssigem Wasser sind die Wassermoleküle durch zahlreiche Wasserstoff-Brückenbindungen miteinander verbunden, die allerdings schnell alternieren. Im Mittel besitzt ein Wassermolekül ungefähr 5 nächste Nachbarn. Als größere Strukturen beobachtet man im Gleichgewicht die Bildung von **Icosaedern**.

- **Festes Wasser, Eis**

In festem Wasser bildet sich ein Wasserstoff-Brücken-Netzwerk, bei dem jedes Wassermolekül genau 4 Nachbarn hat. In Analogie zum Kohlenstoff gibt es hexagonal (wie Graphit bei Kohlenstoff) oder tetraedrisch (wie Diamant bei Kohlenstoff) geordnetes Eis. Bei einer Variation von Druck und Temperatur durchläuft Eis insgesamt 15 (!) Kristallstrukturen, die sich durch unterschiedliche Packungsdichten auszeichnen.

Diese Mikrostruktur erlaubt es alle Anomalien von Wasser zu erklären: (i) im flüssigen Zustand hat ein Wassermolekül im Mittel 5 Nachbarn, während es im festen Zustand genau 4 Nachbarn hat. Dadurch nimmt die Dichte ab; (ii) im selben Maße wird seine Dichte bei $+4^\circ\text{C}$ maximal. Die hohen Schmelz- und Siedepunkte werden dadurch erklärt, daß die zugeführte Wärme komplexe Wasserstoff-Brücken-Netzwerke aufbrechen muß, bevor ein Schmelzen bzw. ein Verdampfen eintreten kann; (iii) warmes Wasser gefriert schneller,

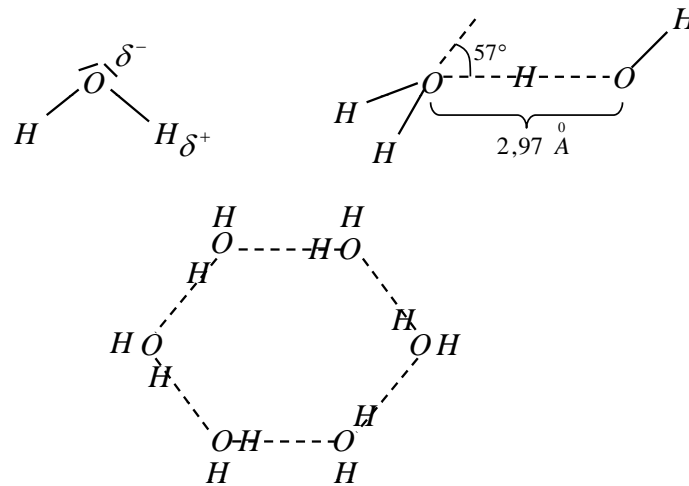


Abbildung 3.5.18: Ein Wassermolekül bildet einen Tetraeder. Durch die Ladungsverschiebung δ^+ und δ^- können sich schwache Bindung zwischen zwei Wassermolekülen ausbilden, die sog. Wasserstoffbrückenbindungen. Dies führt zur Bildung von ausgedehnten Wasserstoff-Brücken-Netzwerken, mit einem 6er Ring als einfachstem Beispiel.

da die Wassermoleküle im warmen Wasser zunächst ungeordnet vorliegen und sich damit schnell in das hexagonale Gitter beim Frieren umordnen können. Bei kaltem Wasser hingegen haben sich in großer Zahl *Icosaeder* gebildet, die zunächst aufgelöst werden müssen, bevor sich die hexagonale Struktur des Wasserseises einstellen kann; (iv) je nach polarer Substanz können sich unterschiedliche Wasserstoff-Brücken-Netzwerke bilden, die das polare Molekül umschließen und es so wasserlöslich machen.

Eine lange Debatte (seit 1850 bis heute) entspannte sich um die Tatsache, daß man auf Eis **Schlittschuhfahren** kann. Die älteste These war diejenige, daß durch die negative Steigung der Schmelzkurve (siehe Abb. 3.5.14) eine Druckerhöhung zum Schmelzen von Eis führt. Ein Schlittschuhfahrer gleitet dann nahezu reibungslos auf einem dünnen Wasserfilm.

Betrachtet man dieses Argument allerdings quantitativ, so kann ein Schlittschuhfahrer wegen seiner sehr schmalen Schlittschuhkufen maximal einen Druck von ca. 500 Atmosphären auf das Eis ausüben. Bei diesem Druck schmilzt das Eis schon bei -3.5°C . Die Erfahrung zeigt jedoch, daß Schlittschuhfahren bei sehr viel tieferen Temperaturen noch möglich ist. Bis ca. -33°C kann man Schlittschuhfahren, und erst bei -46°C gleicht das Gleiten auf Schnee und Eis eher dem Gleiten auf Sand wie man seit der Südpolexpedition

von Robert Scott weiß. Nach dem Phasendiagramm, kann Eis auch bei tieferen Temperaturen durch Druck schmelzen. Allerdings ist das Minimum bei -22°C und man benötigt dann einen Druck von ca. 5000 Atmosphären!

Dieses Rätsel hat sich erst in den letzten Jahren aufgelöst. Durch eine mikroskopische Analyse hat man festgestellt, daß auf einer Eisoberfläche *immer* ein Flüssigkeitsfilm existiert: an der Grenzfläche Eis-Luft bewirkt das Fehlen von benachbarten Wassermolekülen, daß die vierfach koordinierte Struktur des Eises instabil wird. Es findet eine sog. *Rekonstruktion* der Oberfläche statt, die knapp unterhalb der Schmelztemperatur an der Bildung eines dünnen Flüssigkeitsfilms sichtbar wird. Dieses Phänomen beobachtet man generell bei vielen Festkörperoberflächen kurz unterhalb ihres Schmelzpunktes.

Nahe unter dem Gefrierpunkt ist dieser Flüssigkeitsfilm ungefähr 100 nm dick, wird dann mit sinkender Temperatur schnell dünner bevor er bei -33°C ganz verschwindet! Dieses Verhalten kann man in sog. **Regelations-**Experimenten beobachten. Hierbei wird ein Draht um einen Eisblock gelegt und dann mit einem Gewicht beschwert, wie in Abb. 3.5.19 illustriert. An der Grenzfläche zwischen Draht und Eis bildet sich fortlaufend ein Wasserfilm, durch den dieser langsam nach unten sinkt. Hinter dem Draht verschwindet die Grenzfläche und das Eis friert wieder zusammen. Der Draht bewegt sich also langsam durch den Eisblock, wobei dieser intakt bleibt. Die Geschwindigkeit des Drahtes hängt von der Dicke des Wasserfilms an der Grenzfläche ab. Nahe bei Null Grad bewegt sich der Draht sehr viel schneller als bei sehr tiefen Temperaturen. Dies ist eine eindrucksvolle Bestätigung der Abhängigkeit der Dicke des Wasserfilms von der Temperatur.

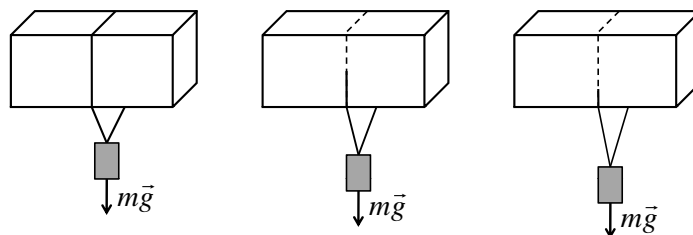


Abbildung 3.5.19: Regelation von Eis: Ein Draht schmilzt durch einen Eisblock hindurch da sich an der Grenzfläche Draht-Eis immer ein Flüssigkeitsfilm bildet.

Wasser und Lösungsmittel

Die besondere Form des Phasendiagramms von Wasser hat signifikante Folgen bei der Mischung von Wasser und einer gelösten anderen Substanz wie zum Beispiel Salz. Durch die Anwesenheit von Lösungsmittel-Molekülen erhöht sich die latente Wärme, die für einen Phasenübergang zugeführt werden muß, da auch die anziehende Wirkung dieser Lösungsmittelmoleküle überwunden werden muß! Insgesamt entsteht eine Verschiebung der Dampfdruck- und Schmelzdruckkurven, wie in Abb. 3.5.20 illustriert. D.h. der Sättigungsdampfdruck *erniedrigt* sich bzw. der Siedepunkt *erhöht* sich: gesalzenes Wasser kocht bei höheren Temperaturen. Durch diese Anomalie des Wassers *erniedrigt* sich aber auch zusätzlich die Schmelztemperatur, da die Schmelzdruckkurve eine negative Steigung hat! Aus diesem Grund läßt sich Eis durch die Zugabe von Salz auftauen.

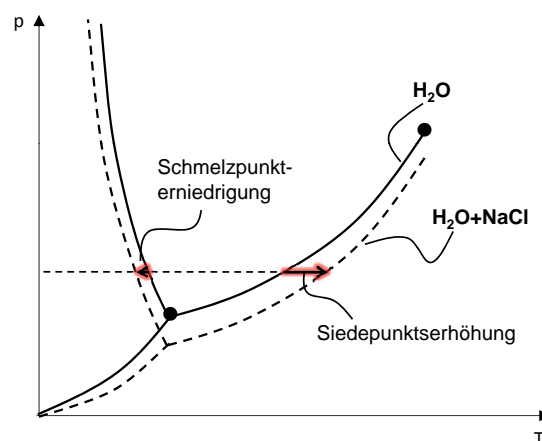


Abbildung 3.5.20: Durch die Zugabe eines Lösungsmittel zu Wasser erhöht sich die latente Wärme für eine Verdunstung, da jetzt auch Arbeit gegen die anziehende Wirkung der Lösungsmittelmoleküle geleistet wird. Dies führt zu einer Verschiebung der Kurven. Als Folge bekommt man bei Wasser eine Siedepunktserhöhung und eine Schmelzpunkt-Erniedrigung.

Anhang A

Formelsammlung

Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2. Newton'sche Axiom, Translation

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Arbeit

$$W = \int \vec{F} d\vec{r}$$

Leistung

$$P = \frac{dW}{dt}$$

kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Gravitationskraft, allgemein

\hat{r} ist Einheitsvektor

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

potentielle Energie,

Gravitation Erdoberfläche

$$E_{pot} = mgh$$

potentielle Energie,

Gravitation allgemein

$$E_{pot} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Zusammenhang Kraft, potentielle Energie

$$\vec{F} = -\text{grad} E_{pot}$$

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Bahngeschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} = -\omega^2 r \hat{r}$$

γ -Faktor, spez. Rel.	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
Lorentztrafo Ort, v in x-Richtung	$x' = \gamma(x - vt)$
Lorentztrafo Zeit, v in x-Richtung	$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$
Drehimpuls eines Massenpunktes	$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$
Drehmoment	$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$
Trägheitsmoment, Dichte ρ	$I = \int_{\text{Volumen}} r_{\perp}^2 \rho dV$
Drehimpuls, feste Achse	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
I Hohlzylinder, Radius R , Masse M	$I = MR^2$
I Vollzylinder, Radius R , Masse M	$I = \frac{1}{2}MR^2$
I Kugel, Radius R , Masse M	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Steiner'sche Satz	$I = I_{\text{Schwerpunkt}} + a^2M$
2. Newton'sche Axiom, Rotation	$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
kinetische Energie, Rotation	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$
Hook'sches Gesetz, Dehnung und Stauchung	$\sigma = E\epsilon$
Hook'sches Gesetz, Verscherung	$\tau = G\gamma$
Querkontraktion, μ Poissonzahl	$\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu\epsilon_x$
Massenflußdichte	$j = \rho v \text{ [gm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{]}$
Teilchenflußdichte	$j = nv \text{ [m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{]}$
Teilchenerhaltung, Strömung	$j_1 A_1 = j_2 A_2$
Energieerhaltung, Bernoulli-Gleichung	$p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2$
Gesetz von Hagen-Poiseuille Rohr mit Radius R und Länge L	$\frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}$

Reynoldszahl	$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{Reibung}}$
Harmonischer Oszillator	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0$
Eigenfrequenz Feder c Federkonstante, m Masse	$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$
Eigenfrequenz Pendel l Länge	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
Gedämpfter Oszillator	$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$
Wellenlänge f Frequenz, ω Kreisfrequenz	$\lambda = \frac{2\pi}{\omega}v_{Phase} = \frac{1}{f}v_{Phase}$
Wellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Wellengleichung x Amplitude, z Ausbreitungsrichtung	$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\frac{d^2x}{dz^2}$
Phasengeschwindigkeit	$v_{Phase} = \frac{\omega}{k}$
Gruppengeschwindigkeit	$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk}$
Amplitude einer Welle Ort \vec{r} , Zeit t und Phase φ	$x = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi)$
Dopplereffekt bewegte Quelle Quelle nähert/entfernt sich	$f = f_0 \frac{1}{1 \mp \frac{v_{Quelle}}{v_{Phase}}}$
Dopplereffekt bewegter Beobachter Beobachter nähert/entfernt sich	$f = f_0 \left(1 \pm \frac{v_{Beobachter}}{v_{Phase}}\right)$

allgemeine Gasgleichung	$pV = Nk_B T$
spezifische Wärme c Masse des Körpers M	$\Delta Q = cM\Delta T$
innere Energie eines idealen Gases f Freiheitsgrade	$U = \frac{1}{2}fNk_B T$
spezifische Wärmekapazität von 1 Mol eines idealen Gases $V=\text{const.}$	$C_V = \frac{1}{2}fR$
spezifische Wärmekapazität von 1 Mol eines idealen Gases $p=\text{const.}$	$C_p = \frac{1}{2}(f + 2)R$
Adiabatenkoeffizient	$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$
Wärmetransport	$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$
1. Hauptsatz	$dU = dQ + dW$
Arbeit eines Gas	$dW = -pdV$
Enthalpie	$H = U + pV$
Adiabatengleichung	$pV^\gamma = \text{const.}$
Adiabatengleichung	$TV^{\gamma-1} = \text{const.}$
Wirkungsgrad Carnot-Prozeß, $T_1 > T_2$	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$
Entropie	$dS = \frac{dQ}{T}$
Entropie	$S = k_B \ln \Omega$
2. Hauptsatz	$\Delta S_{\text{irreversibel}} > 0$
van der Waals Zustandsgleichung für ein Mol	$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT$
Clausius-Clapeyron-Gleichung	$\Delta Q = T \frac{dp_S}{dT} (V_{\text{Phase}_1} - V_{\text{Phase}_2})$

Anhang B

Konstanten

Erdbeschleunigung

$$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Gravitationskonstante

$$G = 6.672591 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Masse Erde

$$M = 5.975 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Boltzmannkonstante

$$k_B = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Gaskonstante

$$R = 8.314510 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Avogadro-Konstante

$$N_A = 6.0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Anhang C

Fragenkatalog

C.1 Kapitel 1: Was ist Physik ?

- Wie werden Naturgesetze aufgestellt? Was ist das Falsifizierungsprinzip?
- Welche Maßeinheiten der Physik gibt es und wie werden sie geeicht.
- Beschreiben sie Experiment und Interpretation am Beispiel des freien Falls.
- Unterscheiden sie systematische und statistische Fehler.

C.2 Kapitel 2: Mechanik

C.2.1 Bewegung eines Massenpunktes

- Wie stehen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung zueinander?
- Beschreiben sie den schrägen Wurf.
- Was sind die Newton'schen Axiome?
- Was ist der Unterschied zwischen schwerer und träger Masse?
- Was ist die Zentripetalbeschleunigung?
- Wie lautet der Energiesatz der Mechanik?
- Was sind konservative und nicht-konservative Kraftfelder?

C.2.2 Systeme von Massenpunkten

- Definieren sie Schwerpunkt und Schwerpunktsgeschwindigkeit.
- Welche Erhaltungssätze gelten?
- Was sind elastische, inelastisch und superelastische Stöße? Wie ändert sich dabei der Schwerpunkt und die Schwerpunktsgeschwindigkeit?
- Beschreiben sie den Übergang vom Labor- ins Schwerpunktsystem.
- Was ist die reduzierte Masse und wofür wird sie verwendet?
- Was ist der Stoßparameter und Streuwinkel?
- Was lernt man aus Streuexperimenten?

C.2.3 Bezugssysteme

- Was ist ein Inertialsystem?
- Was ist die Zentrifugal- und die Corioliskraft?
- Beschreiben sie die Zeitdilatation?
- Beschreiben sie die Längenkontraktion?
- Was ist die Lorentztransformation?
- Was ist die relativistische Masse?
- Was bedeutet die Äquivalenz von Masse und Energie?

C.2.4 Ausgedehnte starre Körper

- Was ist Translation und Rotation?
- Was sind Drehimpuls und Drehmoment?
- Was ist die Bewegungsgleichung der Rotation?
- Was ist die kinetische Energie der Rotation?
- Was ist ein Trägheitsmoment?
- Wie läßt sich mittels der Energieerhaltung das Abrollen eines Zylinders beschreiben?

- Vergleichen sie die Kinematik der Rotation und der Translation?
- Was ist die Nutation?
- Was ist eine Präzession?
- Kennen sie einige Anwendungen eines Kreisels?

C.2.5 Reale Körper

- Was ist das Hook'sche Gesetz?
- Definieren sie Dehnung, Stauchung, Zugspannung und Druckspannung?
- Was ist das Elastizitätsmodul?
- Beschreiben sie die Querkontraktion?
- Was ist das Schubmodul und die Scherspannung?
- Was ist die neutrale Faser?
- Wie wird die Durchbiegung eines Balkens berechnet?
- Wie unterscheiden sich elastische Körper, Flüssigkeiten und Gase hinsichtlich der Kräfte, die sie aufnehmen können und der Änderung von Volumen und Dichte?
- Wie ist der Druck definiert?
- Was ist das Archimedische Prinzip? Wie entsteht der Auftrieb? Was bedeutet Schwimmen?
- Leiten sie die barometrische Höhenformel ab.

C.2.6 Transport

- Was ist die Kontinuitätsgleichung?
- Leiten sie die Bernoulli-Gleichung ab.
- Beschreiben sie einige Effekte, die sich gut mit der Bernoulli-Gleichung erklären lassen.
- Was beschreibt das Gesetz von Hagen-Poiseuille?

- Was ist der Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung?
- Was ist die Reynoldszahl?
- Wie entstehen Wirbel?
- Was ist Diffusion?
- Was ist die freie Weglänge ?

C.2.7 Schwingungen

- Was ist eine typische Schwingungsgleichung?
- Wie hängt die Periode eines Pendels von der Länge und der Masse ab.
- Was ist eine Schwebung?
- Welche Arten der Dämpfung einer Feder existieren? Was ist der aperi-
odische Grenzfall?
- Wie ändern sich die Amplitude und Phase bei der erzwungenen Schwin-
gung?
- Was ist Resonanz?
- Was passiert bei gekoppelten Oszillatoren?

C.2.8 Wellen

- Was ist die Wellengleichung?
- Definieren sie Wellenlänge, Phasengeschwindigkeit und Amplitude ei-
ner Welle.
- Was sind longitudinale und transversale Wellen?
- Was sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit?
- Was ist das Huygens'sche Prinzip ?
- Was ist die Wellenzahl und der Wellenvektor ?
- Beschreiben sie Interferenz, Brechung und Beugung.
- Wann entstehen stehende Wellen?
- Was ist der Dopplereffekt?

C.3 Kapitel 3: Wärmelehre

C.3.1 kinetische Gastheorie

- Wie sind die Geschwindigkeit der Teilchen in einem idealen und die Temperatur verknüpft?
- Was ist die Verteilungsfunktion?
- Wie ergeben sich gemittelte Größen aus einer Verteilungsfunktion?
- Was ist die Maxwell-Boltzmann-Verteilung?

C.3.2 Wärme

- Wie werden Temperaturen gemessen?
- Definieren sie Wärme?
- Was ist die spezifische Wärme und wie läßt sie sich messen?
- Was ist der Gleichverteilungssatz?
- Beschreiben sie die spezifische Wärme eines Gases und eines Festkörpers.
- Was ist die latente Wärme

C.3.3 Wärmetransport

- Wie ist die Wärmeleitfähigkeit definiert?
- Was ist der Wärmestrom und der Wärmewiderstand?
- Was ist Wärmestrahlung?
- Was ist ein schwarzer Körper?
- Wie ist die spektrale Verteilung der Wärmestrahlung?

C.3.4 Hauptsätze

- Was ist der Unterschied zwischen Arbeit und Wärme?
- Definieren Sie isotherm, isochor, isobar, isentrop, isenthalp, irreversibel, reversibel.
- Was beschreibt der erste Hauptsatz?
- Was beschreibt der zweite Hauptsatz?
- Was ist ein Carnot-Prozeß? Warum ist sein Wirkungsgrad maximal?
- Was ist die Entropie?
- Wies ist die mikroskopische Interpretation der Entropie?
- Wie funktioniert ein Stirling-Motor?
- Beschreiben sie die thermodynamischen Potentiale Energie, freie Energie, Enthalpie und freie Enthalpie.
- Was ist das thermodynamische Viereck?

C.3.5 Reale Gase

- Beschreiben sie die van-der-Waals-Zustandsgleichung?
- Was ist die kritische Temperatur und der kritische Druck?
- Was beschreibt die Clausius-Clapeyron-Gleichung?
- Was ist der Dampfdruck?
- Was ist der Tripelpunkt?
- Beschreiben sie den Joule-Thomson-Effekt.
- Was ergibt sich bei schnellen Änderungen für Phasenübergänge?
- Beschreiben sie die Phänomene Schmelzpunktniedrigung und Siedepunktserhöhung?
- Welche Anomalien besitzt Wasser und warum?

Index

- c_W -Wert, 172
- Äquivalenzprinzip, 107
- überhitzen, 301
- 0-ter Hauptsatz, 230

- Absorptionsvermögen, 248
- Achse
 - feste, 111
 - freie, 111
- Adiabatenkoeffizient, 241
- adiabatische Entmagnetisierung, 280
- allgemeine Gasgleichung, 227
- allgemeine Relativitätstheorie, 109
- Anomalien des Wassers, 312
- Antischall, 209
- Arbeit, 50
- Archimedisches Prinzip, 149
- Atomhypothese, 237
- Atomuhr, 13
- Auftrieb, 148
- Ausdehnungskoeffizient, 232
- Auswuchten, 121
- Avogadro-Konstante, 236

- Balkenwaage, 115
- barometrische Höhenformel, 157
- Bernoulli-Gleichung, 162
- Beugungsmuster, 213
- Binnendruck, 290
- Boltzmannkonstante, 227
- Boyle-Mariott-Gesetz, 155

- chemisches Potential, 305
- Clausius-Clapeyron-Gleichung, 295

- Corioliskraft, 90

- Dämpfung, 185
- Dehnung, 136
- Dezibel, 203
- Diffusion, 176
- Dispersion, 205
- Divergenz, 161
- Drehimpuls, 59, 114
- Drehimpulserhaltung, 71
- Drehmoment, 72, 112
- Druck, 146
- Druckspannung, 138

- Edukt, 309
- Eigenfrequenz, 218
- Elastizitätsmodul, 137
- Emissionsvermögen, 248
- Energie, 283
 - kinetische, 53
 - potentielle, 54
- Energieübertrag, 75
- Energieerhaltung, 71
- Enthalpie, 284
- Entmischungskühler, 280
- Epizyklen, 7
- Erdbeschleunigung, 44
- Erhaltungsgröße, 59
- Euler-Gleichung, 166

- Fahrradfahren, 133
- Falsifizierungs-Prinzip, 6
- Federkonstante, 44
- Federkraft, 44

- Fehler
 Fehlerfortpflanzung, 18
 statistisch, 15
 systematisch, 15
 Fick'sches Gesetz, 176
 Foucault'sches Pendel, 91
 Fourier-Transformation, 206
 freie Energie, 286
 freie Enthalpie, 286
 freie Fall, 30
 freie Weglänge, 175
- Galileo, 11
 Gaskonstante, 237
 Gesetz Gay-Lussac, 237
 Geysir, 297
 Gibb'sches Phasenregel, 299
 Gibbs-Duhem-Gleichung, 306
 Gleichverteilungssatz, 239
 Gleichzeitigkeit, 98
 Gradient, 57
 Gravitation, 43
 Gravitationsgesetz, 60
 Gravitationskonstante, 43
 Gravitationswaage, 60
 Gruppengeschwindigkeit, 204
- Hagen-Poiseuille, 168
 harmonische Näherung, 137
 Hauptträgheitsmomente, 128
 Hook'sches Gesetz, 138
 Huygens'sche Prinzip, 210
 hydraulische Hebebühne, 147
 Hydrodynamisches Paradoxon, 162
- ideales Gas, 225
 Impuls, 39
 Impulserhaltung, 68, 70
 Inertialsystem, 86
 Informationstheorie, 278
 innere Energie, 238
 Interferenz, 185
 destruktiv, 209
 konstruktiv, 209
 Inversionstemperatur, 292
- Joule, 51
 Joule-Thomson-Effekt, 292
- k-Wert, 247
 Kalorie, 234
 Kalorimeter, 235
 Kapillarwirkung, 153
 Karmann'sche Wirbelstraße, 172
 Kelvin, 227
 Kepler, 8
 Kepler'sche Gesetze, 58
 Kondensstreifen, 300
 Kontaktwinkel, 153
 Kontinuitätsgleichung, 161
 Kopernikus, 8
 Kraft-Gegenkraft-Paar, 42
 Kraftfeld
 konservativ, 52
 nicht-konservativ, 52
 Kreisbewegung, 34
 Kreisel, 131
 Kreiselkompass, 132
 Kugelschalentheorem, 61
 Kugelwelle, 210
- Laborsystem, 77
 latente Wärme, 242
 Lautstärke, 203
 Lichtgeschwindigkeit, 12
 Lichtuhr, 94
 Lorentztransformation, 101
 Luftwiderstand, 47
- Magnuseffekt, 163
 Masse
 schwere, 48
 träge, 40, 48
 Massenflußdichte, 159

- Massenwirkungsgesetz, 311
 Maxwell-Boltzmann-Verteilung, 229
 Maxwell-Konstruktion, 293
 Mol, 236
 molare Wärmekapazität, 238

 neutrale Faser, 140
 Newton, 9
 Newton'sche Axiome, 38
 Normalkraft, 41
 Nutation, 130

 Oberflächenenergie, 150
 Oberflächenspannung, 151
 Ordnung Phasenübergang, 299

 Partialdruck, 305
 Phasenübergang, 292
 Planck-Verteilung, 251
 Poissonzahl, 139
 Präzession, 131
 Produkt, 309

 Querkontraktion, 139

 Rakete, 68
 Raoult'sche Gesetz, 303
 Rechte-Hand-Regel, 28
 reduzierte Masse, 79
 Regulation, 317
 Reibung, 44, 167
 Gleiten, 45
 Haften, 45
 Reibungskoeffizienten, 45
 relativistischer Impuls, 106
 Reynoldszahl, 172
 Rotation, 111
 Rotationsenergie, 121
 Ruheenergie, 107
 Ruhemasse, 106

 Sättigungsdampfdruck, 293
 Schallwellen, 200

 Scheinkraft, 87
 Scherspannung, 142
 Schiffshebewerk, 150
 Schlittschuhfahren, 316
 schräger Wurf, 31
 Schubmodul, 143
 schwarzer Strahler, 250
 Schwerpunkt, 66, 111, 113
 Schwerpunktsystem, 77
 Schwimmen, 150
 Seifenblase, 152
 SI-System, 15
 Snellius'sche Brechungsgesetz, 216
 spezifische Wärme, 234
 spezifische Wärmekapazität, 238
 Stöchiometrie, 309
 Standardabweichung, 16
 Stauchung, 136
 Staurohr, 164
 Stefan-Boltzmann-Gesetz, 251
 Steiner'scher Satz, 118
 Stirling-Formel, 275
 Stoß
 elastisch, 71
 inelastisch, 71
 superelastisch, 71
 Stoßparameter, 79
 Stoßprozesse, 70
 Stoke'sches Gesetz, 169
 Streuung, 77
 Superpositionsprinzip, 40

 Teilchenflußdichte, 159
 Temperatur, 227
 thermodynamische Potentiale, 282
 thermodynamisches Viereck, 287
 Trägheit, 40
 Trägheitsellipsoid, 129
 Trägheitsmoment, 116
 Trägheitstensor, 127
 Translation, 111

- Tripelpunkt, 233, 298
- unterkühlen, 301
- Urkilogramm, 14
- van-der Waals Zustandsgleichung,
291
- Vektoren
- Kreuzprodukt, 28
 - Skalarprodukt, 27
- Verteilungsfunktion, 228
- Viskosität, 167
- Wärme, 234
- Wärmeleitfähigkeit, 243
- Wärmestrom, 245
- Wärmewiderstand, 245
- Wasserstoff-Brückenbindung, 314
- Watt, 51
- Wechselwirkung, 42
- Wellen
- longitudinal, 196
 - transversal, 196
- Wellengleichung, 197
- Wellenvektor, 206
- Wellenzahl, 196
- Wiedemann-Franz-Gesetz, 244
- Winkelgeschwindigkeit, 35
- Wirbel, 170
- Wirkungsgrad, 267
- Wirkungsquerschnitt, 175
- Wurfparabel, 32
- Zeit-Dilatation, 95
- Zentrifugalbeschleunigung, 37
- Zentrifugalkraft, 90
- Zentripetalbeschleunigung, 34
- Zentripetalkraft, 120
- Zugspannung, 138
- Zwillingsparadoxon, 96