

Vorlesungsskript

**Physik II**

**Elektrizitätslehre und Optik**

Ruhr-Universität Bochum

**Prof. A. von Keudell**

11. Oktober 2021

---

## Vorwort

Diese Notizen sind aus der Vorlesung "Physik II für Physiker, Elektrizitätslehre und Optik" im Sommersemester 2007, 2010, 2015 entstanden. Als Grundlage wurden die Bücher Halliday, Resnick, Walker *Physik*, Tipler, Mosca *Physik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, Demtröder *Experimentalphysik II*, Dransfeld, Kienle *Physik II*, Hecht *Optik* und Jackson *Klassische Elektrodynamik* verwendet. Diese Notizen sollen und können natürlich diese Bücher nicht ersetzen und verstehen sich als Ergänzung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elektrizitätslehre</b>	<b>5</b>
1.1	Elektrostatik . . . . .	5
1.1.1	Elektrische Ladung . . . . .	5
1.1.2	Elektrisches Feld und Potential . . . . .	11
1.1.3	Leiter im elektrischen Feld, Kapazität . . . . .	29
1.1.4	Isolatoren im elektrischen Feld, Dielektrika . . . . .	40
1.1.5	Ferroelektrika . . . . .	50
1.2	Der elektrische Strom . . . . .	52
1.2.1	Strom und Widerstand . . . . .	52
1.2.2	Netzwerke . . . . .	68
1.3	Magnetostatik . . . . .	72
1.3.1	Magnetismus . . . . .	72
1.3.2	Bewegung einer Ladung im Magnetfeld . . . . .	73
1.3.3	Halleffekt . . . . .	81
1.3.4	Das magnetische Moment . . . . .	83
1.3.5	Berechnung von Magnetfeldern . . . . .	84
1.3.6	Verknüpfung von magnetischen und elektrischen Feldern (Vertiefung) . . . . .	94
1.3.7	Materie im Magnetfeld . . . . .	100
1.4	Zeitlich veränderliche Felder . . . . .	115
1.4.1	Induktion . . . . .	115
1.4.2	Verschiebungsstrom . . . . .	134
1.4.3	Maxwellgleichungen . . . . .	136
1.4.4	Schwingkreise . . . . .	137
1.5	Wechselstrom . . . . .	148
1.5.1	Erzeugung von Wechselstrom - Gleichstrom . . . . .	148
1.5.2	Drehstrom . . . . .	152
1.5.3	Wechselstromkreise . . . . .	156
1.5.4	Transformatoren . . . . .	167

<b>2</b>	<b>Optik</b>	<b>171</b>
2.1	Elektromagnetische Wellen . . . . .	172
2.1.1	Wellengleichung . . . . .	172
2.1.2	Ebene Wellen . . . . .	174
2.1.3	Energiedichte und Impuls . . . . .	177
2.1.4	Erzeugung elektromagnetischer Wellen . . . . .	181
2.1.5	Stehende Wellen . . . . .	188
2.1.6	Licht . . . . .	193
2.2	Elektromagnetische Wellen in Materie . . . . .	197
2.2.1	Der Brechungsindex . . . . .	197
2.2.2	Dispersion und Absorption . . . . .	199
2.2.3	Wellen in dichten Medien . . . . .	206
2.2.4	Metamaterialien (Vertiefung) . . . . .	212
2.2.5	Brechung und Reflexion . . . . .	216
2.2.6	Polarisation . . . . .	225
2.2.7	Lichtstreuung . . . . .	231
2.3	Geometrische Optik . . . . .	237
2.3.1	Axiome . . . . .	237
2.3.2	Optische Abbildungen, Linsen . . . . .	238
2.3.3	Optische Abbildungen, Spiegel . . . . .	254
2.3.4	Abbildungsfehler . . . . .	258
2.3.5	Prismen . . . . .	261
2.3.6	Optische Instrumente . . . . .	264
2.4	Wellenoptik . . . . .	274
2.4.1	Kohärenz . . . . .	274
2.4.2	Interferenz . . . . .	277
2.4.3	Beugung . . . . .	292
<b>A</b>	<b>Fragenkatalog</b>	<b>307</b>
A.1	Kapitel 1.1: Elektrostatik . . . . .	307
A.2	Kapitel 1.2: Strom . . . . .	308
A.3	Kapitel 1.3: Magnetfelder . . . . .	308
A.4	Kapitel 1.4: Zeitabhängige Felder . . . . .	309
A.5	Kapitel 1.5: Wechselstrom . . . . .	309
A.6	Kapitel 2.1: Elektromagnetische Wellen . . . . .	310
A.7	Kapitel 2.2: Elektromagnetische Wellen in Materie . . . . .	310
A.8	Kapitel 2.3: Geometrische Optik . . . . .	311
A.9	Kapitel 2.4: Wellenoptik . . . . .	312

# Kapitel 1

## Elektrizitätslehre

In der Natur existieren vier Arten der Wechselwirkung, die Gravitation, die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung. In diesem Kapitel wird die elektromagnetische Wechselwirkung behandelt, die an starken Kräften zwischen elektrischen Ladungen sichtbar wird.

### 1.1 Elektrostatik

In der Elektrostatik werden statischen Anordnungen von Ladungen betrachtet, die untereinander in Wechselwirkung treten.

#### 1.1.1 Elektrische Ladung

##### Die Elementarladung

Elektrische Ladungen werden über Kräfte sichtbar, die sie aufeinander ausüben. Hierbei existieren Ladungen mit zwei unterschiedlichen Vorzeichen, **positiv** und **negativ**, wobei gilt:

- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab
- Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an

Dies ist im Unterschied zur Gravitation und der starken Wechselwirkung, die in jedem Fall eine anziehende Wirkung hat. Bei allen Phänomenen und Prozessen in der Natur gilt neben der Energie- und der Impulserhaltung auch die **Ladungserhaltung**. D.h. es existieren keine Vorgänge bei der nur eine einzige Ladungsorte entsteht. Betrachtet man zum Beispiel die Ionisation eines Atoms, so entsteht dabei ein positives geladenes Ion und ein freies Elektron.

Ladungen in der Natur existieren nur Vielfachen einer Elementarladung. Diese Elementarladung beträgt in der Einheit **Coloumb**:

$$\boxed{e = 1.602177 \cdot 10^{-19} \text{C}} \quad (1.1.1)$$

Dies war zunächst ein überraschendes Ergebnis, da zum Beispiel bei der Gravitation bislang keine kleinste Elementarmasse bekannt ist. Diese *Quantisierung* der Ladung wurde 1910 im **Millikan-Versuch** nachgewiesen, wie in Abb. 1.1.1 illustriert ist. Hierbei wird ein Öltröpfchen mit der Ladung  $Q$  zwischen zwei geladenen Platten in der Schwebelage gehalten. Das Öltröpfchen erfährt eine Kraft durch die Gravitation nach unten und eine durch die geladenen Platten nach oben. Das Öltröpfchen wird dabei über ein Fernrohr beobachtet. Man führt jetzt drei Messungen durch: (i) man läßt das Öltröpfchen sinken bei *ungeladenen* Platten und bekommt ein Gleichgewicht zwischen Gravitation  $F_{Gravitation}$  und der Reibungskraft  $F_{Reibung}$ :

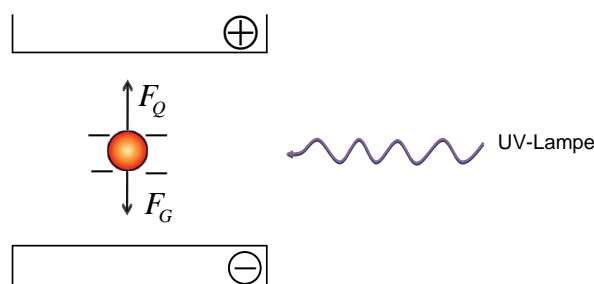
$$F_{Reibung} = 6\pi\eta Rv \quad (1.1.2)$$

$$F_{Gravitation} = \frac{4\pi}{3} R^3 (\rho_{\text{Öl}} - \rho_{\text{Luft}}) g \quad (1.1.3)$$

Man beobachtet jetzt mit dem Fernrohr die Sinkgeschwindigkeit  $v$  bei bekannter Viskosität  $\eta$  und den Dichten von Öl und Luft und bestimmt daraus den Radius  $R$  des Tröpfchens. (ii) In einem zweiten Versuch lädt man die Platten mit einer Spannungsquelle entsprechend einer Spannung  $U$ . Bei geeigneter Wahl von  $U$  bekommt man ein Gleichgewicht zwischen Schwerkraft  $F_{Gravitation}$  und elektrischer Kraft  $F_Q$  und das Tröpfchen bleibt in Ruhe.

$$F_{Ladung} = Q \frac{U}{d} \quad (1.1.4)$$

Mit  $d$  dem Abstand der beiden Platten. Aus der eingestellten Spannung  $U$  läßt sich dann die Ladung  $Q$  bestimmen. (iii) In einem dritten Schritt verwendet man eine externe UV-Lampe, um über den Photoeffekt den Ladungszustand des Tröpfchens zu ändern. Ein Tröpfchen, das sich im Gleichgewicht befand, beginnt jetzt wieder nach oben zu steigen oder nach unten zu sinken. Korrigiert man die elektrische Spannung  $U$  an den Platten, kann man dieses Tröpfchen wieder zur Ruhe bringen. Man beobachtet dabei, daß die Spannungen, die man dazu einstellen muß, nur *diskrete* Werte annehmen. Das heißt die Änderung des Ladungszustandes erfolgt in festen Einheiten. Aus der quantitativen Analyse dieses Experimentes kann man die kleinste mögliche Ladungsmenge ableiten, die **Elementarladung**  $e$ .



**Abbildung 1.1.1:** Bestimmung der Elementarladung im Millikan-Versuch. In einem elektrischen Feld wird ein geladenes Öltröpfchen in der Schwebe gehalten. Über das Einstrahlen einer Lampe wird der Ladungszustand geändert und das Tröpfchen beginnt sich zu bewegen. Diese Änderung der Ladung erfolgt in diskreten Schritten.

## Das Auftreten von Elektrizität

Phänomene der Elektrizität lassen sich an vielen Beispielen aus dem täglichen Leben illustrieren.

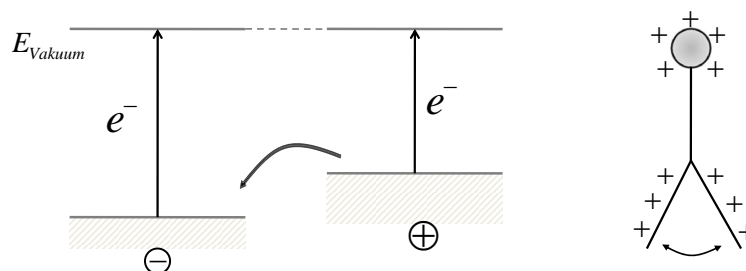
- **Reibungselektrizität**

Bei der sogenannten **Reibungselektrizität** bringt man zwei Körper in engen Kontakt. Nachdem die Bindungsenergie von Elektronen in den einzelnen Materialien unterschiedlich sind, treten Elektronen von dem einen Material in das mit der größeren Bindungsenergie über. Dabei lädt sich ein Körper negativ, der andere positiv auf. Dieser Vorgang findet solange statt, bis die Anziehungskräfte der neuen Ladungen an der Grenzfläche so groß werden, daß sie dem Übertritt entgegenstehen. Dies ist in Abb. 1.1.2 illustriert.

Die Reibung als solche ist hier nicht wesentlich, sondern ermöglicht nur den guten Kontakt zwischen zwei Materialien. Hält man zum Beispiel Paraffin in Wasser, so findet auch dort eine Ladungstrennung statt, obgleich keine Reibung auftritt.

Ladungen lassen sich mit einem **Elektrometer** sichtbar machen. Hierzu wird ein Band aufgeladen, an dessen Enden sich gleichnamigen Ladungen abstoßen können. Der Winkel ist dabei ein Maß für die Größe der Ladung.

- **Spannungsreihe der Metalle**



**Abbildung 1.1.2:** Bringt man zwei Körper zusammen, so können Elektronen von einem zum anderen übertreten, falls die Bindungsenergien sich unterscheiden. Die Körper laden sich damit auf. Ladungsmengen lassen sich mit einem Elektrometer sichtbar machen, das auf der Abstoßung gleichnamiger Ladungen beruht.

Man kann Metalle gemäß der Bindungsenergie ihrer Elektronen anordnen. Bringt man zum Beispiel zwei Metalle zusammen, so findet wieder ein Austausch von Elektronen statt und eine Ladungsverschiebung tritt auf. Man kann die Metalle in folgender Reihenfolge anordnen mit steigender Bindungsenergie der Elektronen:

K, Na, Al, Zn, Pb, Sn, Sb, Bi, Fe, Cu, W

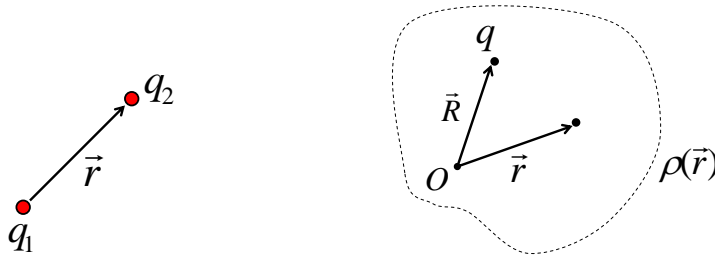
- **Erde als geladener Körper**

Die Erde bewegt sich durch das inter-stellare Medium, das aus einem dünnen Plasma, einer Ansammlung von Elektronen und Ionen besteht. Elektronen und Ionen treffen auf die Erde und laden diese auf. Nachdem Elektronen sehr viel leichter sind, ist ihre mittlere Geschwindigkeit sehr viel größer als die der Ionen. Damit ist die Auftreffrate der Elektronen größer als die der Ionen und die Erde lädt sich negativ auf. Dies geschieht solange bis die abstoßende Wirkung der negativen Ladung auf der Erde die Auftreffrate der Elektronen so weit reduziert, daß sie der der Ionen gleicht. D.h. im Mittel treffen dann die gleiche Anzahl an positiven und negativen Ladungen auf die Erde. Im Gleichgewicht stellt sich eine Ladung von  $-6 \cdot 10^5$  C ein. Dies entspricht einer Anzahl von  $4 \cdot 10^{24}$  Elektronen. Diese geringe Anzahl genügt um ein gut messbares elektrisches Feld von  $130 \text{ Vm}^{-1}$  auf der Erdoberfläche zu erzeugen.



## Das Coloumbgesetz

Elektrische Ladungen werden über ihre Kraftwirkung untereinander sichtbar. Betrachten wir zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  mit einem Verbindungsvektor  $\vec{r}$ , so ist die Kraft zwischen ihnen durch die sog. **Coloumbkraft** gegeben (siehe Abb. 1.1.3):



**Abbildung 1.1.3:** Das Coloumb-Gesetz beschreibt die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen bzw. einer Testladung  $q$  und einer Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ .

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.1.5)$$

Die Proportionalitätskonstante ist die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \quad (1.1.6)$$

Die Richtung der Kraft ist durch den Verbindungsvektor  $\vec{r}$  vorgegeben. Bei gleichnamigen Ladungen zeigt die Kraft in Richtung  $\vec{r}$ , d.h. wir beobachten eine *abstoßende* Kraft. Bei ungleichnamigen Ladungen zeigt die Kraft entgegen der Richtung von  $\vec{r}$ , d.h. wir beobachten eine *anziehende* Kraft.

Die Coulombkraft ist um ein Vielfaches größer als die Gravitationskraft. Vergleicht man zum Beispiel zwei Elektronen im Abstand von einem Meter, so bekommt man für beide Kräfte:

$$|\vec{F}_{\text{Gravitation}}| = G \frac{m_e m_e}{r^2} = 5.537 \cdot 10^{-71} \text{N} \quad (1.1.7)$$

$$|\vec{F}_{\text{Ladung}}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 2.307 \cdot 10^{-28} \text{N} \quad (1.1.8)$$

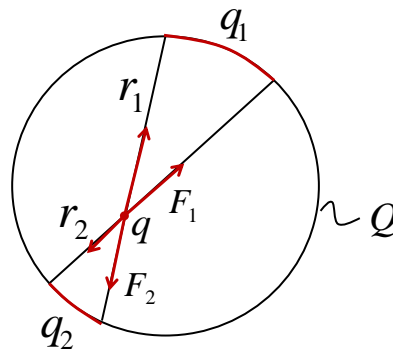
Setzt man diese ins Verhältnis, so ergibt sich ein Faktor von

$$\frac{|\vec{F}_{\text{Gravitation}}|}{|\vec{F}_{\text{Ladung}}|} = 2.4 \cdot 10^{-43} \quad (1.1.9)$$

um den die Gravitationskraft geringer als die elektrostatische Kraft ist. Elektrische Kräfte kann man leicht im Labor sichtbar machen, während Gravitationskräfte sehr empfindliche Messaufbauten verlangte bzw. für große Körper wie bei der Planetenbewegung zum tragen kommt.

Die Coulombkraft behält ihre Gültigkeit bis hinunter zu nuklearen Abständen im Bereich  $10^{-14}\text{m}$ . Erst bei kleineren Abständen wird die starke Wechselwirkung sichtbar und dominant. Die Coulombkraft hat eine  $1/r^2$  Abhängigkeit wie die Gravitation. Dies wurde von Coulomb 1785 mit einer Torsionswaage nachgewiesen. Hierbei wird eine Kugel an einem Torsionsfaden aufgehängt und eine zweite gleiche Kugel wird aufgeladen. Bringt man beide Kugeln in Kontakt zueinander, so verteilt sich die Ladung zu gleichen Teilen auf beide Kugeln und sie stoßen sich ab. Es entsteht ein Gleichgewicht aus Verdrillung der Torsionswaage und elektrostatischer Abstoßung.

Die Gültigkeit der  $1/r^2$ -Abhängigkeit hat Cavendish in einem Experiment nachgewiesen bei dem er zeigte, daß ein geladener Körper innerhalb eines geladenen Zylinders oder Kugel kräftefrei ist. Wie in Abb. 1.1.4 illustriert betrachten wir einen Körper mit Ladung  $q$  im Innern einer Kugel, die mit der Ladung  $Q$  belegt ist. Betrachten wir zwei entgegengesetzte Richtungen  $r_1$  und  $r_2$ , so "sieht" die Ladung  $q$  eine Teilladung  $q_1$  und eine Teilladung  $q_2$ . Aus der Geometrie der Anordnung können wir ablesen, daß



**Abbildung 1.1.4:** Die  $1/r^2$ -Abhängigkeit der Coulombkraft läßt sich an der Kräftefreiheit einer Ladung innerhalb einer geladenen Kugel ablesen.

$$q_1 r_2^2 = q_2 r_1^2 \quad (1.1.10)$$

Vergleichen wir die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  in beide Richtungen, so bekommen wir:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{qq_1}{r_1^2}}{\frac{qq_2}{r_2^2}} = 1 \quad (1.1.11)$$

D.h. in der Tat ist ein Teilchen kräftefrei, wenn das Coloumbgesetz eine  $1/r^2$ -Abhängigkeit befolgt.

## 1.1.2 Elektrisches Feld und Potential

Die Coloumbkraft läßt sich etwas formaler definieren, wenn wir das elektrische Feld einführen: jedes geladenen Teilchen erzeugt ein elektrisches Feld in dem ein anderes Teilchen eine Kraft gemäß dem Coulomb-Gesetz erfährt. Dies erscheint auf den ersten Blick etwas künstlich. Allerdings bekommt das **elektrische Feld** eine eigenständige Bedeutung, wenn wir später die Ausbreitung von **elektromagnetischen Wellen**, dem Licht, beschreiben.

### Das elektrische Feld

Die Kraft zwischen Ladungen wird vom Coloumbgesetz definiert:

$$\vec{F}_{Ladung} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.1.12)$$

Das elektrische Feld  $\vec{E}$  der Ladung  $q_1$  ist definiert als:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r} \quad (1.1.13)$$

Damit wird die Kraft auf die Ladung  $q_2$  in diesem elektrischen Feld zu:

$$\vec{F}_{Ladung} = q_2 \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.1.14)$$

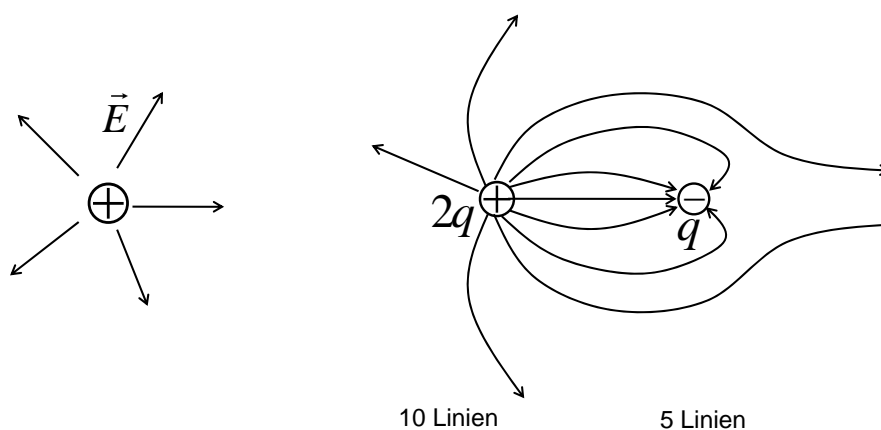
Die Einheit des elektrischen Feldes ist  $[\text{NC}^{-1}=\text{Vm}^{-1}]^1$ . Das elektrische Feld wird durch **elektrische Feldlinien** symbolisiert. Für die Konstruktion dieser Feldlinien lassen sich mehrere Forderungen aufstellen:

- Elektrische Feldlinien beginnen immer bei der positiven Ladung und enden bei der negativen Ladung bzw. im Unendlichen.
- Die elektrischen Feldlinien geben die Richtung der Kraft auf einen Ladung vor.

---

<sup>1</sup>Die Einheit Volt [V] wird später beim elektrostatischen Potential eingeführt

- Die *Dichte* der Feldlinien ist ein Maß für die Größe der Kraft. Bei einer einfachen Punktladung fällt die Dichte der Linien quadratisch mit dem Abstand. Dies entspricht genau der  $1/r^2$ -Abhängigkeit des Coloumb-Gesetzes.
- Feldlinien schneiden sich nie. Ansonsten wäre die Richtung der Kraft nicht eindeutig definiert.
- Die Zahl der Feldlinien ist proportional zur Größe der Ladung von der sie ausgehen. Dies ist an einem System illustriert aus zwei unterschiedlichen Ladungen  $+2e$  und  $-e$  (siehe Abb. 1.1.5). An der positiven Ladung beginnen 10 Feldlinien während an der negativen nur 5 von Ihnen enden. In geringer Entfernung von den beiden Ladungen gleicht das elektrische Feld dem eines Dipols (siehe unten), während in großer Entfernung das elektrische Feld dem einer Punktladung ähnelt ( $+2e - e = e$ ).

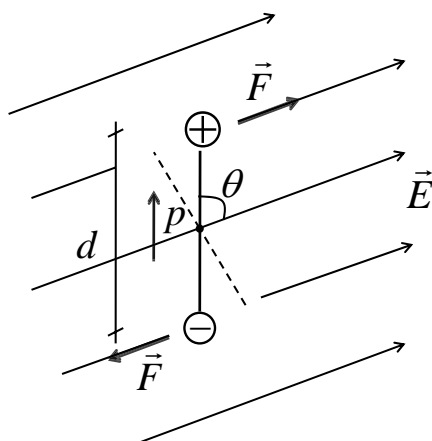


**Abbildung 1.1.5:** Die elektrischen Feldlinien beginnen immer an der positiven Ladung und enden an der negativen bzw. im Unendlichen. Die Anzahl der Feldlinien die von einer Ladung ausgehen oder an einer Ladung enden ist proportional zu deren Betrag.

Die Kraftwirkung eines elektrischen Feldes auf eine Ladungsverteilung wollen wir am einfach Beispiel eines elektrischen Dipols illustrieren (siehe Abb. 1.1.6). Ein solch elektrischer **Dipol** besteht aus zwei gegensätzlichen aber gleichen Teilladungen, die einen Abstand  $d$  voneinander getrennt sind (Beispiel wäre ein Wassermolekül). Das sog. **Dipolmoment**  $\vec{p}$  ist definiert als

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (1.1.15)$$

Hierbei gilt zu beachten, daß der Vektor  $\vec{p}$  bei der negativen Ladung beginnt und bei der positiven endet (im Unterschied zum elektrischen Feld). Befindet sich ein solcher Dipol in einem elektrischen Feld, so erfährt die positive und die negative Teilladung eine entgegengesetzte Kraftwirkung. Es entsteht ein Drehmoment  $\vec{D}$  gemäß:



**Abbildung 1.1.6:** Drehmoment auf einen elektrischen Dipol  $\vec{P}$  im elektrischen Feld  $\vec{E}$ .

$$|\vec{D}| = dF \sin \theta = dpE \sin \theta \quad (1.1.16)$$

bzw. in vektorieller Form:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.1.17)$$

Dieses Drehmoment verschwindet erst, wenn der Vektor  $\vec{p}$  sich parallel zum Vektor  $\vec{E}$  ausgerichtet hat. Allerdings existieren dazu zwei mögliche Orientierungen parallel und anti-parallel. Betrachten wir dazu die potentielle Energie dieses Dipols. Die Arbeit  $dW$ , die geleistet werden muß, um den Dipol um einen Winkel  $d\theta$  zu verdrehen ist:

$$dW = -|\vec{D}|d\theta = -|\vec{p}||\vec{E}| \sin \theta d\theta \quad (1.1.18)$$

Das negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, daß der Dipol arbeitet leistet, wenn sich der Winkel  $\theta$  *verkleinert* ( $d\theta < 0$ ). Die Änderung der potentiellen Energie  $E_{pot}$  ist:

$$E_{pot} = - \int dW = \int |\vec{p}| |\vec{E}| \sin \theta d\theta = -|\vec{p}| |\vec{E}| \cos \theta \quad (1.1.19)$$

Damit wird die potentielle Energie in vektorieller Form:

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.1.20)$$

D.h. die potentielle Energie wird minimal, wenn sich das Dipolmoment parallel zum elektrischen Feld ausrichtet.

Für das Coloumbgesetz gilt das Superpositionsprinzip. D.h. für die Berechnung elektrischer Felder lassen sich die Beiträge einer Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  in einem Volumenelement  $d^3r$  addieren (siehe Abb. 1.1.7). Betrachten wir eine allgemeine Ladungsverteilung, so ist die Gesamtladung  $Q$  in diesem Gebiet gegeben als:

$$Q = \int_{Volumen} \rho(\vec{r}) d^3r \quad (1.1.21)$$

D.h. die Coloumbkraft auf eine Ladung  $q$  am Ort  $\vec{R}$  ist gegeben als:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{Volumen} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|} \rho(\vec{r}) d^3r \quad (1.1.22)$$

Im folgenden wollen wir das elektrische Feld für einige Geometrien berechnen.

### • Feld einer Linienladung

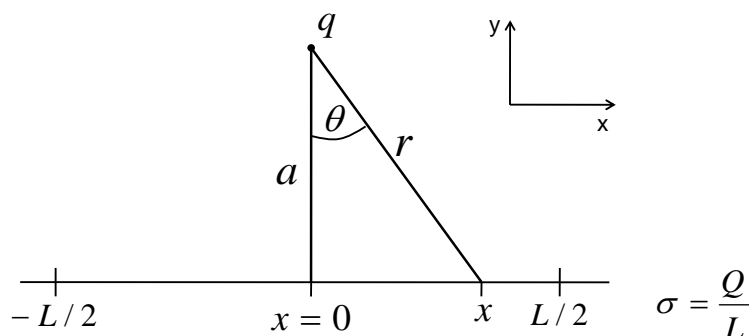
Es befinde sich eine Ladung  $q_1$  in einem Abstand  $a$  von einer geladenen Linie, wie zum Beispiel einem dünnen Draht (siehe Abb. 1.1.7). Auf dieser Linie befindet sich eine Ladung  $Q$  pro Länge  $L$ . Die Kraft auf die Ladung  $q_1$  durch eine infinitesimal kleine Menge  $dq$  auf dieser Linie im Abstand  $r$  ist

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{1}{r^2} \hat{r} dq \quad (1.1.23)$$

bzw. der Anteil am elektrische Feld

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} dq \quad (1.1.24)$$

Aus der Anordnung kann man leicht sehen, daß die Kräfte in x-Richtung parallel zum Draht aufheben. D.h. wir haben nur eine Komponente in



**Abbildung 1.1.7:** Berechnung des elektrischen Feldes einer Linienladung.

y-Richtung. Mit der Entfernung  $r$  zwischen  $q_1$  und dem Ladungselement  $dq$  bekommen wir mit  $r \cos \theta = a$ :

$$dE_y = |dE| \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \cos \theta dq \quad (1.1.25)$$

Das Ladungselement  $dq$  lässt sich umrechnen in einen Abschnitt  $dx$  entlang der Linienladung via  $dq = \frac{Q}{L} dx$ . D.h. wir bekommen:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^3 \theta}{a^2} \frac{Q}{L} dx \quad (1.1.26)$$

und  $x = a \tan \theta$  bzw.  $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$  ergibt sich:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{a} \frac{Q}{L} d\theta \quad (1.1.27)$$

Wir integrieren über alle Orte  $x$  bzw. möglichen Winkel  $\theta$  und bekommen schließlich:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{a} \frac{Q}{L} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{aL} \quad (1.1.28)$$

D.h. das elektrische Feld fällt mit  $1/a$  ab.

- **elektrisches Feld einer Fläche  $A$  mit Ladung  $Q$**

Betrachten wir jetzt das Feld im Abstand  $a$  zu einer unendlich ausgedehnten Fläche mit der Ladung  $Q$  pro Fläche  $A$ . In Analogie zur

Betrachtung der Linienladung bekommen wir keine Beiträge zum elektrischen Feld in x- und z-Richtung, sondern wieder nur in y-Richtung. Die Verbindungsgerade zwischen dem Ort an dem wir das Feld berechnen wollen und einem Kreis mit Radius  $r$  um den Fußpunkt dieses Ortes auf der Fläche sei  $b$ . Wir bekommen somit einen Beitrag von einem Kreisring der Dicke  $dr$ :

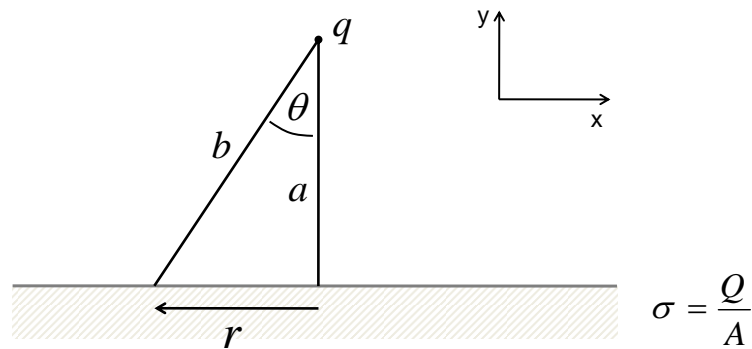


Abbildung 1.1.8: Berechnung des elektrischen Feldes einer Flächenladung.

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2} 2\pi r dr \frac{Q}{A} \cos\theta \quad (1.1.29)$$

mit  $r = a \tan\theta$ ,  $b \cos\theta = a$  und  $dr = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$  ergibt sich:

$$dE_y = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\cos^2\theta}{a^2} a \tan\theta \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \frac{Q}{A} \cos\theta = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \sin\theta d\theta \quad (1.1.30)$$

Wir integrieren wieder über die möglichen Winkel  $\theta$  und erhalten schließlich das elektrische Feld im Abstand  $a$  von:

$$E_y = \int_0^{\pi/2} dE_y = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q}{A} \quad (1.1.31)$$

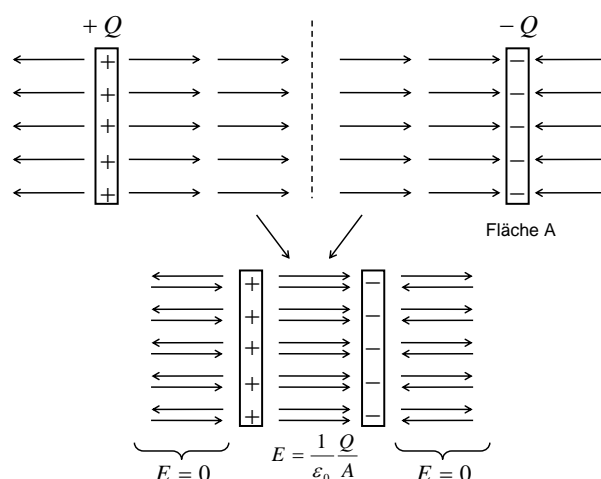
Man erkennt, daß das elektrische Feld *unabhängig* vom Abstand  $a$  ist. d.h. es ist räumlich konstant.

Wir können dieses Bild leicht erweitern zu dem elektrischen Feld in einem sog. **Plattenkondensator** als zwei gegensätzlich geladenen Platten. Wie Abb. 1.1.9 illustriert überlagern sich die beiden elektrischen



Felder der Platten im Innern eines Plattenkondensators und wir erhalten:

$$E_{\text{Plattenkondensator}} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \quad (1.1.32)$$



**Abbildung 1.1.9:** Das elektrische Feld im Innern eines Plattenkondensators erhält man durch Überlagerung der Lösungen der einzelnen Platten.

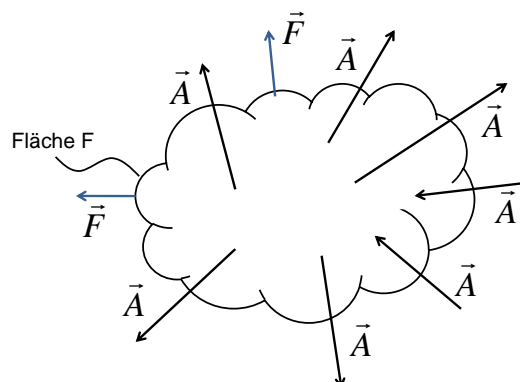
Im Außenraum dieses Plattenkondensators kompensieren sich die Felder und wir erhalten genau  $E = 0$ .

### Der Gauß'sche Satz

Die obigen Beispiele haben gezeigt, daß es sehr umständlich sein kann das elektrische Feld einer Ladungsverteilung genau zu berechnen. Für einfache Geometrien existiert allerdings eine sehr elegante Methode unter Verwendung des **Gauß'schen Satzes**:

$$\boxed{\int_{\text{Fläche}} \vec{A} d\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} \text{div} \vec{A} dV} \quad (1.1.33)$$

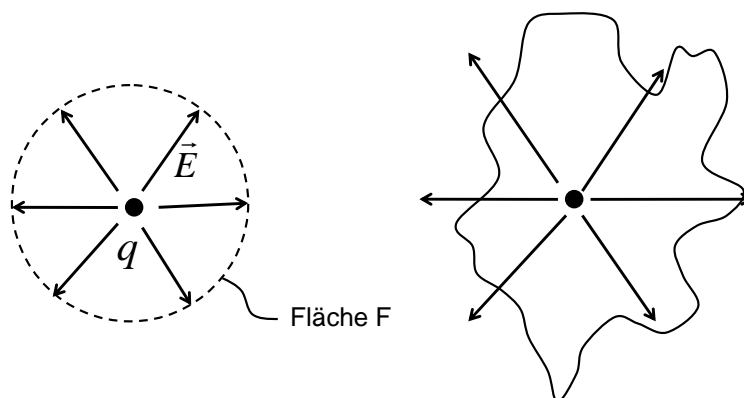
Der Gauß'sche Satz betrachtet ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}$  (Beispiel elektrisches Feld  $\vec{E}$ ) und verknüpft ein Integral über eine beliebige Oberfläche mit dem Integral über die **Divergenz** dieses Feldes über das eingeschlossene Volumen (siehe Abb. 1.1.10). Diese Divergenz entspricht der räumlichen



**Abbildung 1.1.10:** Nach dem Gauss'schen Satz läßt sich das Oberflächenintegral über ein Vektorfeld  $\vec{A}$  mit einem Volumenintegral über  $\text{div}\vec{A}$  über das von der Fläche eingeschlossene Volumen verknüpfen.

Ableitung eines Vektorfeldes und liefert ein Skalar<sup>2</sup>.

$$\boxed{\text{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}} \quad (1.1.34)$$



**Abbildung 1.1.11:** Die Berechnung des elektrischen Feldes einer Punktladung ist unabhängig von der Form des eingeschlossenen Volumens.

Betrachten wir jetzt noch einmal eine Punktladung  $q$  und berechnen den sog. **elektrischen Fluß**, der definiert ist als:

<sup>2</sup>Im Unterschied zum Gradienten **grad**, der der räumlichen Ableitung eines skalaren Feldes entspricht und einen Vektor zum Ergebnis hat

$$\Phi_{el} = \int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} \quad (1.1.35)$$

Man kann sich das Oberflächenintegral des Gauß'schen Satzes einfach als das Abzählen von Feldlinien vorstellen, die eine Fläche in eine Richtung durchtreten.

Für eine Punktladung berechnen wir den Fluß auf einer Kugelfläche, die die Ladung im Abstand  $R$  umgibt. Setzen wir das elektrische Feld ein so erhalten wir:

$$\Phi_{el} = \int_{\text{Fläche}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} d\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.1.36)$$

Nachdem das elektrische Feld immer normal durch die Oberfläche dieser Kugel tritt, können wir das Skalarprodukt aus Feld  $\vec{E}$  und einem Flächenelement  $d\vec{F}$  auf der Kugeloberfläche durch ein einfaches Produkt ersetzen. Zusätzlich ist die Fläche so angeordnet, daß das elektrische Feld aus Symmetriegründen auf dieser Fläche konstant ist. Man erkennt, daß der elektrische Fluß *unabhängig* von der Größe dieser Kugel ist und nur durch die eingeschlossene Ladung  $q$  gegeben ist!

Dieser Zusammenhang gilt auch für beliebige Formen der Fläche, die die Ladung umgeben, da die Fläche zwar mit  $R^2$  zunimmt, das elektrische Feld aber mit  $R^2$  abnimmt. Nach dem Superpositionsprinzip kann man diesen Zusammenhang auch auf beliebig viele Ladungen erweitern. D.h. wir können für eine beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  in einem Volumen  $V$  das von einer Fläche  $F$  umschlossen wird schreiben:

$$\boxed{\int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) dV} \quad (1.1.37)$$

Der Vergleich mit dem Gauß'schen Satz liefert den Zusammenhang:

$$\int_{\text{Volumen}} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) dV = \int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} \mathbf{div} \vec{E} dV \quad (1.1.38)$$

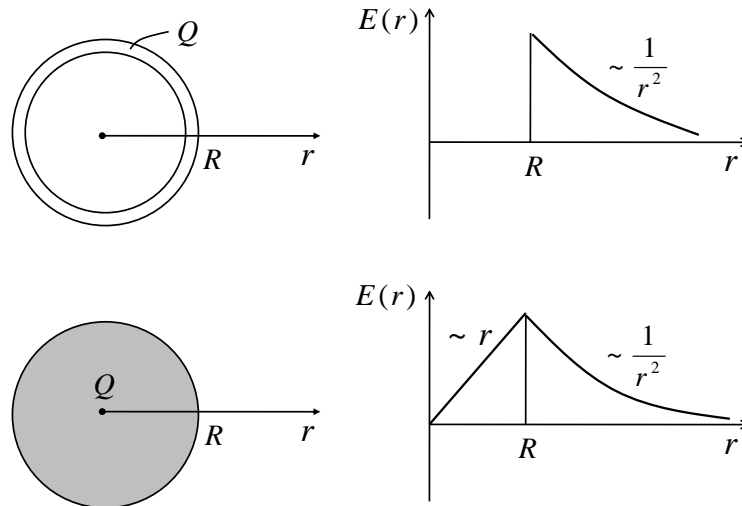
Daraus läßt sich die sogenannte **erste Maxwellgleichung** ableiten, die besagt:

$$\boxed{\mathbf{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (1.1.39)$$

Die Leistungsfähigkeit des Gauß'schen Satzes wird an einigen Beispielen illustriert:

- **Hohlkugel**

Betrachten wir eine Hohlkugel mit Radius  $R$ , die eine Ladung  $Q$  trägt. Der elektrische Fluß durch eine Fläche im Abstand  $r$  ist gegeben als:



**Abbildung 1.1.12:** Das elektrische Feld einer Hohlkugel und einer Vollkugel mit Ladung  $Q$  und Radius  $R$ .

$$\Phi_{el} = \int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = E 4\pi r^2 \quad (1.1.40)$$

Dieser Fluß ist gleich der eingeschlossenen Ladung

$$\Phi_{el} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (1.1.41)$$

und wir bekommen für das elektrische Feld:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (1.1.42)$$

Man erkennt, daß sich die gesamte Ladung auf einen Punkt im Zentrum der Hohlkugel konzentrieren läßt. Dieser Zusammenhang ist identisch zu dem **Kugelschalentheorem** der Mechanik (siehe Skript Physik I). In beiden Fällen ist dies eine Folge der  $1/r^2$ -Abhängigkeit der Coulombkraft als auch der Gravitationskraft. Bei der Anwendung des Gauß'schen Satzes gilt allerdings zu beachten:

Mit Hilfe des Gauß'schen Satz gelangt man nur dann schnell zu einer Lösung, wenn man diejenige Fläche wählt auf der das elektrische Feld konstant ist.

Alternativ hätte man direkt das Coulombgesetz benutzen können, hätte dann aber über die Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten integrieren müssen, was sehr aufwändig ist.

Dieselbe Vorgehensweise können wir für das elektrische Feld im Innern der Kugel ableiten und erhalten sofort:

$$\Phi_{el} = \int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} (Q = 0) = 0 \quad (1.1.43)$$

D.h. das Innern einer geladenen Hohlkugel ist *feldfrei*, wie schon experimentell oben eingeführt wurde.

### • Vollkugel

Beachten wir im folgenden eine homogen geladene Vollkugel mit Radius  $R$ . Für eine Entfernung  $r$  vom Kugelzentrum (mit  $r < R$ ) bekommen wir:

$$\Phi_{el} = \int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = E 4\pi r^2 \quad (1.1.44)$$

und einer eingeschlossenen Ladung von:

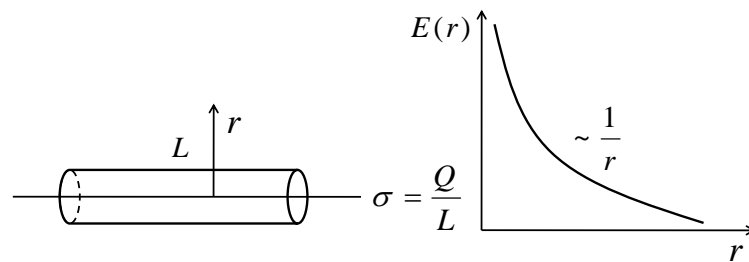
$$\Phi_{el} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} Q \quad (1.1.45)$$

ein elektrisches Feld von:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \quad (1.1.46)$$

D.h. das elektrische Feld steigt linear mit dem Abstand zum Kugelzentrum hin an, wie in Abb. 1.1.12 gezeigt ist. Die Richtung des elektrischen Feldes ist aus Symmetriegründen radial.

### • Linienladung



**Abbildung 1.1.13:** Das elektrische Feld einer Linienladung.

Auf einem Kabel befindet sich eine Linienladung  $\sigma = Q/L$ . Als Fläche für den Gauß'schen Satz verwenden wir die Mantelfläche eines Zylinders, der der Geometrie angepasst ist. Der Radius des Zylinders sei  $r$ . Wir bekommen mit

$$\int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Volumen}} \rho(\vec{r}) dV \quad (1.1.47)$$

den Ausdruck für das elektrische Feld  $E$ :

$$E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{L} L \quad (1.1.48)$$

Auch hier ergibt sich wieder die  $1/r$ -Abhängigkeit für eine zylindersymmetrische Ladungsverteilungen (vgl.  $1/a$ -Abhängigkeit in obigem Beispiel)

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi r} \frac{Q}{L} \quad (1.1.49)$$

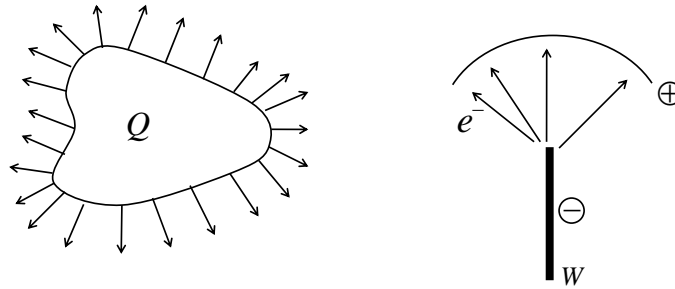
Aus Symmetriegründen ist das elektrische Feld radial um den Leiter angeordnet.

- **Koaxialkabel**

In einem Koaxialkabel befindet sich ein Leiter mit der Ladung  $\sigma = Q/L$  im Innern eines Zylinders, der die Ladung  $\sigma = -Q/L$  trägt und den Radius  $R$  besitzt. Nach dem Gauß'schen Satz ist das elektrische Feld im Inneren für  $r < R$  identisch zu dem einer einfachen Linienladung. Für  $r > R$  ist allerdings die Gesamtladung Null, so daß das elektrische Feld im Außenraum verschwindet.



diese Elektronen auf einen Leuchtschirm abbildet entsteht eine starke Vergrößerung der mikroskopischen Variation der Emissionswahrscheinlichkeit auf der Oberfläche dieser Spitze. Mit dieser Methode ist es zum ersten Mal gelungen ein *atomares* Abbild von Oberflächen zu erzeugen.



**Abbildung 1.1.15:** Das elektrische Feld hängt von dem Krümmungsradius der Oberfläche ab. Bei sehr starker Krümmung ergibt sich eine hohe elektrische Feldstärke, die die Elektronen aus dem Material heraus reißen kann. Dies wird im Feld-Elektronen-Mikroskop genutzt um Oberflächen atomar abzubilden.

## Das elektrische Potential

Bewegen wir eine Ladung in einem elektrischen Feld so müssen wir je nach Richtung Arbeit leisten, bzw. an der Ladung wird Arbeit verrichtet (siehe Abb. 1.1.10). Die Arbeit auf dem Weg zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  ist definiert als

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{s} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \quad (1.1.53)$$

Nachdem das elektrische Feld ein *konservatives* Feld ist, d.h. die Arbeit ist *unabhängig* von der Wahl des Weges, können wir eine Beschreibung mittels der potentiellen Energie verwenden: bewegen wir eine positive Ladung entlang der Richtung des elektrischen Feldes wird die Arbeit  $W$  positiv, d.h. die Ladung leistet Arbeit, seine potentielle Energie verringert sich und seine Bewegungsenergie erhöht sich. Wenn das Vorzeichen von  $W$  negativ wird, wird Arbeit der Ladung zugeführt, d.h. seine potentielle Energie erhöht sich und seine Bewegungsenergie verringert sich. Falls wir einen geschlossenen Weg betrachten, muß bei einem konservativen Feld gelten:

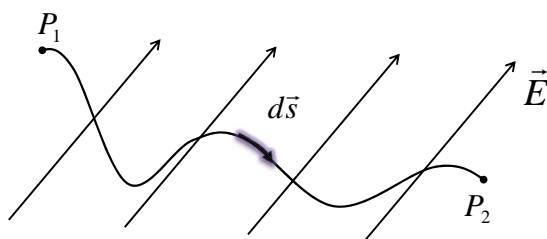


$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (1.1.54)$$

Dieser Zusammenhang gilt allerdings nur für zeitlich konstante Probleme<sup>3</sup>!

Die Änderung der potentiellen Energie  $E_{pot}$  bei dem Weg von Punkt  $P_1$  zu Punkt  $P_2$  ist definiert als:

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_2) - E_{pot}(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} dW \quad (1.1.55)$$



**Abbildung 1.1.16:** Das Potential entspricht der Arbeit, die benötigt wird, um eine Elementarladung in einem elektrischen Feld  $\vec{E}$  von einem Punkt  $P_1$  zu einem Punkt  $P_2$  zu bewegen.

Neben der potentiellen Energie ist es üblich in der Elektrizitätslehre das sog. **elektrische Potential** zu definieren als:

$$\phi = \int_P^\infty \vec{E} d\vec{s} \quad (1.1.56)$$

Der Ausdruck  $q\Phi(P)$  gibt die Arbeit an, die aufgewendet oder gewonnen wird, wenn man ein Teilchen von dem Punkt  $P$  an einen Ort im Unendlichen bewegt.

Vergleicht man das elektrische Potential an zwei Punkten, so läßt sich die **Spannung**  $U$  definieren:

$$U = \phi(P_1) - \phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \quad (1.1.57)$$

<sup>3</sup>Bei dem Induktionsgesetz wird die rechte Seite ungleich Null und entspricht der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die umschlossenen Fläche.

wie man aus der Definition des elektrischen Potentials leicht ableiten kann<sup>4</sup>:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} = \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} - \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} = \phi(P_1) - \phi(P_2) \quad (1.1.58)$$

Die Änderung der potentiellen Energie war per Definition:

$$\Delta E_{pot} = - \int_{P_1}^{P_2} dW = - \int_{P_1}^{P_2} q \vec{E} d\vec{s} = -q \underbrace{\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}}_{=U} = -qU \quad (1.1.59)$$

Nachdem wie in der Mechanik Erhaltung der Gesamtenergie gilt, d.h.  $\Delta E = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0$ , bekommen wir:

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot} = qU \quad (1.1.60)$$

D.h. durchläuft eine positive Ladung eine Spannung von +10 V nach 0 V, so bekommt eine kinetische Energie von 10eV. Die Einheit **Elektronenvolt** ist gebräuchlich um Energien von atomaren Teilchen zu beschreiben:

$$\boxed{1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J} \quad (1.1.61)$$

Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potential  $\phi$  und  $\vec{E}$ :

$$\phi = \int_P^{\infty} \vec{E} d\vec{s} \quad (1.1.62)$$

Dies läßt sich auch in differentieller Form schreiben via:

$$\boxed{\vec{E} = -\mathbf{grad}\phi = -\vec{\nabla}\phi} \quad (1.1.63)$$

D.h. das elektrische Feld ist der negative Gradient des elektrischen Potentials. Dieser Gradient wird kurz durch das *Nabla*-Zeichen  $\vec{\nabla}$  ausgedrückt. Wenn wir die erste Maxwell-Gleichung einsetzen, bekommen wir den Zusammenhang:

$$\mathbf{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = -\mathbf{div}\mathbf{grad}\phi = -\Delta\phi \quad (1.1.64)$$

Mit dem Ausdruck für die zweite Ableitung, dem Laplace-Zeichen  $\Delta$  gemäß

<sup>4</sup>Eine Ladung wird von  $P_1$  ins Unendliche gebracht und von dort wieder zurück zu  $P_2$ .

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2}{\partial^2 x}\phi + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\phi + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}\phi \quad (1.1.65)$$

läßt sich dies darstellen als **Poisson-Gleichung**.

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho} \quad (1.1.66)$$

D.h. die erste Maxwell-Gleichung ist eine Bestimmungsgleichung für das elektrische Feld und die Poissongleichung eine Bestimmungsgleichung für das elektrische Potential.

Die einfachste Anwendung des elektrischen Potentials ist eine einfache Punktladung für die wir aus dem Coloumbgesetz ableiten:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1.1.67)$$

Der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potential  $\phi$ , der Spannung  $U$  und der potentiellen Energie  $E_{pot}$  ist in Abb. 1.1.17 illustriert. Bei diesem Beispiel ist die Spannung als auch die potentielle so gewählt, daß jeweils im Unendlichen beide Größen zu Null werden. Bei der Elektrostatik ist es wichtig zu bemerken, daß sich das *elektrische Potential* und die *potentielle Energie* im Vorzeichen unterscheiden können, da es sowohl abstoßende als auch anziehende Kräfte gibt<sup>5</sup>.

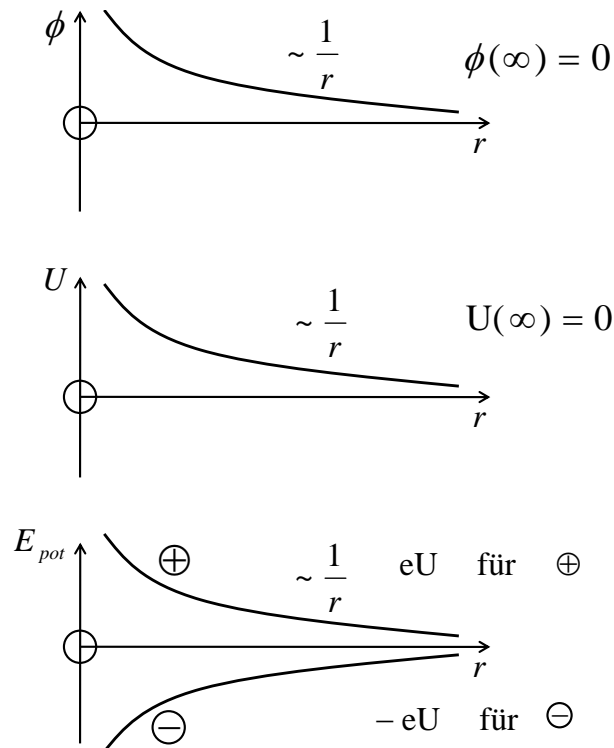
Der Verlauf des elektrischen Potentials im Raum kann durch Flächen gleichen Potentials illustriert werden, den **Äquipotentialflächen**. Für das Verschieben einer Ladung auf diesen Flächen muß keine Arbeit aufgewendet werden. Ein Querschnitt durch diese Flächen erzeugt ein Abbild in Form von **Äquipotentiallinien**. Dies ist equivalent zu den Höhenlinien bei der Gravitation. Nachdem das elektrische Feld den Gradienten des Potentials darstellt, ist der Abstand dieser Äquipotentiallinien ein Maß für die Stärke des elektrischen Feldes.

Im folgenden betrachten wir einen elektrischen Dipol  $\vec{p} = q\vec{d}$ , gemäß Abb. 1.1.18. Das Potential am Ort  $\vec{r}$  ist gegeben als:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2}} \right] \quad (1.1.68)$$

---

<sup>5</sup>So wird bei der Betrachtung von Plasmen (Gemisch aus positiven Ionen und Elektronen), der Einschluß von Elektronen in Form eines elektrischen Potentials ausgedrückt, während in der Festkörperphysik der Einschluß von Elektronen in einem Material durch einen Potentialtopf der potentiellen Energie verdeutlicht wird.



**Abbildung 1.1.17:** Potential  $\phi$  einer positiven Punktladung; Spannung  $U$  für den Fall daß  $P_2$  im unendlichen liegt mit  $U(\infty) = 0$ ; Potentielle Energie  $E_{pot}$  einer positiven und einer negativen Punktladung im Potential einer positiven Punktladung. Auch hier wird per Definition  $E_{pot}(\infty) = 0$  gesetzt.

Für  $r \gg d$  läßt sich die Wurzel ausdrücken als:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm d/2)^2}} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 \mp \frac{zd}{2r^2} \right) \quad (1.1.69)$$

Damit bekommen wir als Näherungsformel für das Potential:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdz}{r^3} \quad (1.1.70)$$

mit  $q\vec{d} = \vec{p}$  und  $z = r \cos \theta$  erhalten wir schließlich:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}} \quad (1.1.71)$$

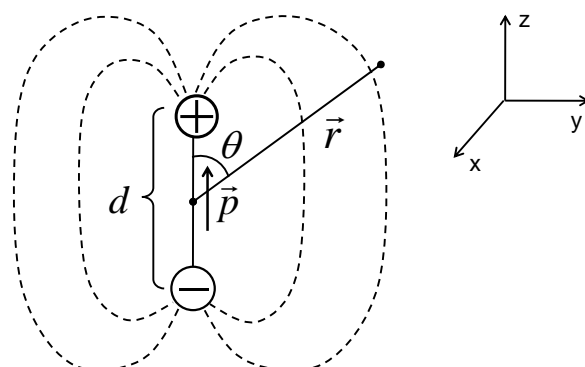


Abbildung 1.1.18: Elektrisches Feld eines Dipols.

D.h. das elektrische Potential eines Dipols nimmt quadratisch mit dem Abstand ab.

### 1.1.3 Leiter im elektrischen Feld, Kapazität

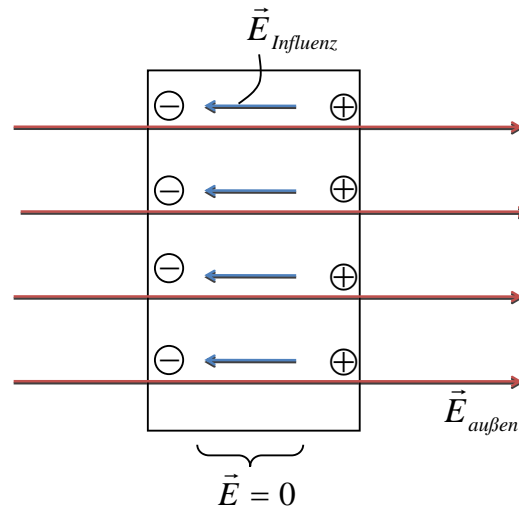
Im folgenden betrachten wir leitfähige Materialien wie Metalle in einem elektrischen Feld.

#### Influenzladungen

Die Elektronen in einem Leiter können sich in einem äußeren elektrischen Feld entgegen der Feldrichtung ( $\vec{F} = -e\vec{E}$ ) bewegen. An einer Oberfläche entsteht ein *Überschuss* an Elektronen, während an der gegenüber liegenden Oberfläche eine *Elektronenverarmung* auftritt. Auf der Seite des Überschusses existieren mehr Elektronen als positive Atomrümpfe der Metallatome, eine negative Oberflächenladung baut sich auf; auf der Seite der Verarmung existieren weniger Elektronen als positive Atomrümpfe der Metallatome, eine positive Oberflächenladung baut sich auf (siehe Abb. 1.1.19). Diese Aufladung der Oberflächen geht solange vonstatten bis das Innere des metallischen Körper frei von einem elektrischen Feld ist! Diese Oberflächenladungen bezeichnet man als **Influenzladungen**.

Hält man zwei Platten in ein elektrisches Feld und verbindet diese elektrisch, so lädt sich eine Platte negativ und die andere positiv auf. Trennt man jetzt die elektrische Verbindung, hat man diese Ladungsmengen auf den Platten gespeichert.

Die freie Beweglichkeit der Ladungsträger auf einem leitenden Körper führt zudem dazu, daß sich die Ladungen an der Oberfläche ansammeln. Be-



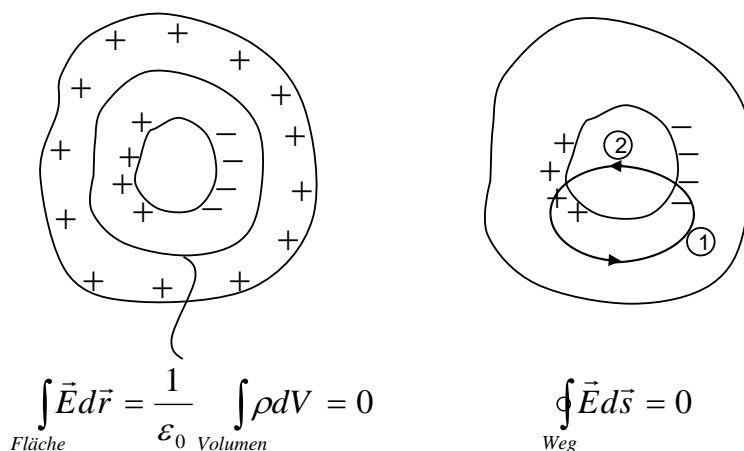
**Abbildung 1.1.19:** Die freien Ladungen in einem elektrischen Leiter in einem elektrischen Feld bewegen sich an die Oberflächen und schirmen so das elektrische Feld im Innern ab.

trachten wir dazu eine geladene Metallkugel. Wenn sich die Ladungsträger gleicher Polarität auf der Oberfläche befinden, ist ihr mittlerer Abstand maximal und es entspricht dem energetisch günstigsten Zustand. Nach dem Gauß'schen Satz wird der Innenraum eines derartig geladenen Körpers damit automatisch feldfrei!

Dieser Zusammenhang wird an dem **Faraday'schen Käfig** sichtbar. Das Innere eines metallischen Käfigs bleibt feldfrei unabhängig von der Ladungsmenge, die von außen aufgebracht wird. Dieser Umstand schützt zum Beispiel den Autofahrer vor hohen Feldstärken bei einem Blitzeinschlag.

Die Feldfreiheit im Innern eines Leiters läßt sich auch formaler beweisen, wie in Abb. 1.1.20 illustriert ist. Betrachten wir zunächst eine geladenen Kugel, bei der sich positive Ladungen auf der Oberfläche ansammeln. Im Innern sei ein Hohlraum auf dessen Innenseite sich Ladungen befinden sollen, die im Innenraum ein elektrisches Feld erzeugen<sup>6</sup>. Ist das ein Widerspruch? Konstruieren wir zunächst eine Fläche die den Hohlraum umschließt, so kann das elektrische Feld im Innern des Leiters gleich Null werden, da die umschlossenen negativen und positiven Ladungen sich gegenseitig aufheben. D.h. so löst sich der Widerspruch noch nicht auf. Alternativ dazu können wir aber einen geschlossenen Weg konstruieren, der zum Teil durch den Hohlraum geht als

<sup>6</sup>Diese Annahme ist sehr künstlich, da die unterschiedlichen Ladungen in einem Metall zum Beispiel, sich natürlich finden und gegenseitig neutralisieren



**Abbildung 1.1.20:** Das elektrische Feld in einem Hohlraum im Innern eines Leiters ist exakt Null.

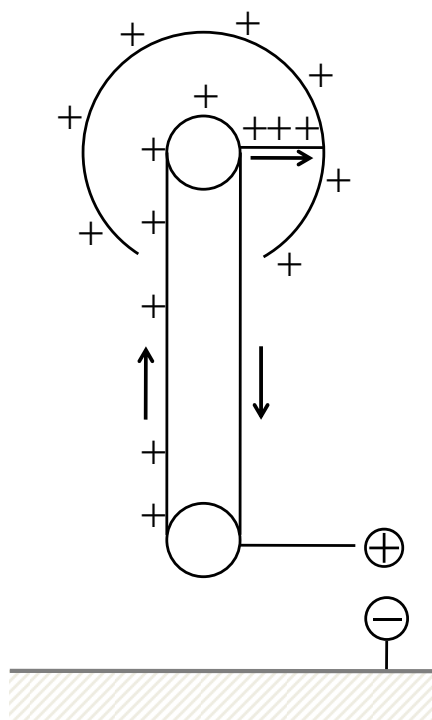
auch zum Teil durch den Leiter läuft. Nachdem statische elektrische Felder konservativ sind, muß gelten:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (1.1.72)$$

Auf dem Teil 1 (siehe Abb. 1.1.20) des geschlossenen Weges muß das Integral Null ergeben, da das Feld im Innern des Leiters ja verschwindet. Auf Teil 2 (siehe Abb. 1.1.20) des geschlossenen Weges ist nach unserer Annahme von Oberflächenladungen, das elektrische Feld ungleich Null. D.h. die Summe über beide Teilstrecken 1 und 2 ist von Null verschieden und im Widerspruch zu Gl. 1.1.72. Es dürfen sich also *keine* Oberflächenladungen auf der Innenseite des Hohlraums befinden!

Eine weitere Anwendung dieses Verhalten ist die Realisierung eines Hochspannungsgenerators, des sog. **van-de-Graaff-Bandgenerators**, wie in Abb. 1.1.21 illustriert. Hierbei wird über Reibungselektrizität ein Band mit Ladungen beaufschlagt. Diese Ladungen werden kontinuierlich von einer Spannungsquelle nachgeliefert. Das Band bewegt die aufgebrachte Ladungen in das *Innere* einer Hohlkugel wo sie von einem zweiten Kamm wieder abgestreift werden. Dieses Abstreifen passiert unabhängig von der zuvor gesammelten Ladungsmenge auf der Hohlkugel, da die Ladungen immer von dem Band auf die *äußere* Oberfläche der Kugel wandern. D.h. das Abstreifen im *Innern* der Hohlkugel ist ganz wesentlich für das Funktionsprinzip eines van-der-Graaff-Generators.

Bei beliebig geformten Leitern ist die Berechnung von Ober-



**Abbildung 1.1.21:** Bei einem van-de-Graaff Generator werden über Reibungselektrizität hohe Spannungen erzeugt. Durch das Abstreifen der Ladungen im *Innern* einer Hohlkugel fließen diese nach außen hin ab.

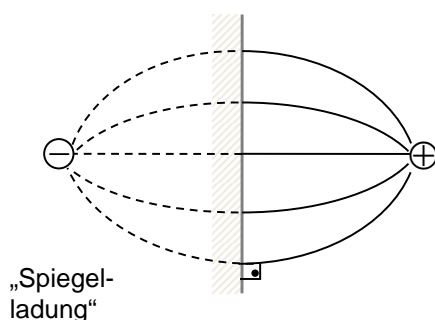
flächenladungen und den elektrischen Feldern hinreichend kompliziert. Für Leiter läßt sich allerdings eine sehr einfache Randbedingung angeben: das elektrische Feld muß immer *senkrecht* zur Metalloberfläche sein! Wäre dies nicht der Fall, so könnte es die Oberflächenladungen *verschieben*. Diese Verschiebung findet so lange statt, bis das resultierende elektrische Feld wieder senkrecht zur Oberfläche zeigt. D.h. es muß gelten:

Elektrische Feldlinien stehen **immer senkrecht** auf leitenden Metalloberflächen.

Dies sei am Beispiel einer Ladung vor einer metallischen Oberfläche in Abb. 1.1.22 illustriert. Orte direkt an der Metalloberfläche, die sich gegenüber der einzelnen Punktladung befinden, spüren ein stärkeres elektrisches Feld, als Orte, die weiter entfernt liegen. Deshalb ist die Dichte an Influenzladungen im Zentrum größer als die in großer Entfernung. Eine inhomogene Verteilung an Influenzladungen stellt sich so ein, daß die elektrischen Feldlinien, die



von der Punktladung ausgehen senkrecht auf die Metalloberfläche auftreffen. Man kann allerdings das richtige elektrische Feldlinienbild elegant erzeugen, in dem man sich eine **Spiegelladung** im Innern des Metalls vorstellt. Es entsteht ein Dipolfeld, das genau den geforderten Randbedingungen genügt, wie Abb. 1.1.22 illustriert. Dies ist allerdings nur eine konstruierte *Scheinladung*, deren elektrisches Feld allerdings genau demjenigen entspricht, daß die reale inhomogene Verteilung von Influenzladungen erzeugt.



**Abbildung 1.1.22:** Das elektrische Feld einer Punktladung vor einer Metalloberfläche läßt sich leicht mit dem Konzept einer Spiegelladung ermitteln.

## Die Kapazität

Das Beispiel der Influenzladung hat gezeigt, daß ein elektrisches Feld zu einer Ladungstrennung in einem elektrischen Leiter führt. Trennt man diese beiden Seiten, so hat man dauerhaft Ladung gespeichert. Anordnungen, die sich dafür eignen bezeichnet man als **Kondensator**. Die Fähigkeit bei einer vorgegebenen Spannung  $U$  eine Ladungsmenge  $Q$  zu speichern, wird durch die **Kapazität**  $C$  ausgedrückt.

$$Q = CU \quad (1.1.73)$$

Das einfachste Beispiel ist ein Plattenkondensator. Eine Spannungsquelle erzeugt eine positive Ladung auf einer Seite von zwei gegenüber liegenden Platten. Das elektrische Feld zieht Elektronen auf der anderen Platte an. Dies geschieht so lange bis die Ladung auf beiden Platten identisch ist. Der Kondensator ist *aufgeladen*. Jetzt könnte man die Spannungsquelle abtrennen und der Zustand bleibt erhalten, da die elektrischen Felder der positiven und negativen Ladungen die Ladungstrennung auf der jeweils anderen Platte aufrecht erhalten.

Die Fähigkeit einer Anordnung Ladung zu speichern wird als Kapazität  $C$  in der Einheit **Farad** gemessen,  $1 \text{ F} = 1 \text{ CV}^{-1}$ . Im folgenden wollen wir die Kapazitäten einiger Anordnungen berechnen.

- **Plattenkondensator**

Betrachten wir zunächst einen Plattenkondensator mit der Fläche  $A$  und dem Plattenabstand  $d$  an den eine Spannung  $U$  angelegt wird (siehe Abb. 1.1.23). Nachdem das elektrische Feld in einem Plattenkondensator konstant ist, kann man einfach setzen:

$$E = \frac{U}{d} \quad (1.1.74)$$

Das elektrische Feld bei gegebener Ladung  $Q$  eines Plattenkondensators ist:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (1.1.75)$$

Daraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen Spannung und Ladung von:

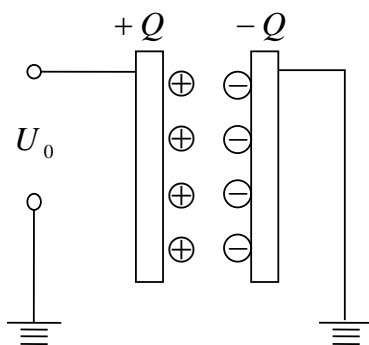
$$U \underbrace{\epsilon_0 \frac{A}{d}}_{=C} = Q \quad (1.1.76)$$

bzw. die Kapazität

$$\boxed{C_{\text{Plattenkondensator}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}} \quad (1.1.77)$$

D.h. die Kapazität steigt mit der Fläche  $A$  an, nimmt aber mit dem Abstand der Platten  $d$  ab. Mit steigendem Abstand muß auch die Spannung steigen um dieselbe Ladungsmenge zu speichern.

In der Mikroelektronik ist die Erzeugung von kleinsten Kondensatoren zur Informationsspeicherung (1 Bit) ein drängendes Problem, da bei fortschreitender Miniaturisierung die Fläche schneller sinkt als der Abstand und damit nur noch die Speicherung von immer weniger Elektronen möglich bleibt.



**Abbildung 1.1.23:** In einem Kondensator wird eine Geometrie mit einer Spannungsquelle  $U_0$  aufgeladen.

- **Kugelkondensator**

Bei einem Kugelkondensator betrachten wir zwei konzentrische Kugeln (Radien  $a$  und  $b$ , siehe Abb. 1.1.24), die jeweils die Ladung  $+Q$  und  $-Q$  tragen. Das elektrische Feld im Zwischenraum beider Kugeln ist

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} Q \quad (1.1.78)$$

Die Spannung erhält man, wenn man über den Weg von der positiven zur negativen Ladung integriert,

$$U = \int_a^b \vec{E} d\vec{r} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} Q dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (1.1.79)$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$Q = \underbrace{4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}}_{=C} U \quad (1.1.80)$$

Mit der Kapazität eines Kugelkondensators von:

$$C_{\text{Kugelkondensator}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (1.1.81)$$

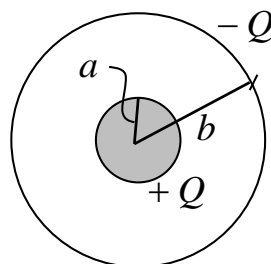


Abbildung 1.1.24: Kugelkondensator.

- **Kugel**

Aus der Betrachtung des Kugelkondensators läßt sich auch einfach die Kapazität einer einzelnen Kugel ableiten, wenn wir  $b \rightarrow \infty$  setzen:

$$C_{Kugel} = \lim_{b \rightarrow \infty} 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (1.1.82)$$

- **Zylinder**

Eine weitere mögliche Anordnung ist die Speicherung der Ladung  $\pm Q$  auf zwei koaxialen Zylindern mit Radien  $r_1$  und  $r_2$  und Länge  $L$ . Das elektrische Feld am Ort mit Radius  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) um einen inneren Leiter der Ladung  $+Q$  ist

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \quad (1.1.83)$$

Über Integration bekommt man die Spannung:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1.1.84)$$

D.h. die Kapazität eines Zylinderkondensators wird zu

$$C_{Zylinder} = 2\pi\epsilon_0 L \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (1.1.85)$$

## Serien- und Parallelschaltung von Kapazitäten

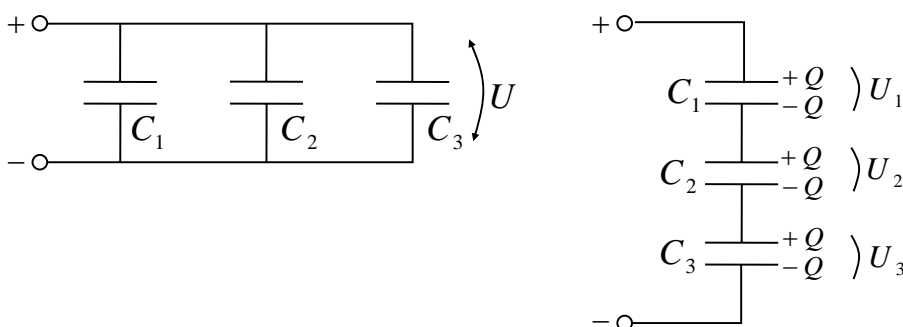
Die Kapazität einer Anordnung von mehreren Kondensatoren läßt sich durch die Regeln für Serien- und Parallelschaltung ableiten.

Bei der Parallelschaltung, wie in Abb.1.1.25 illustriert, ist die Spannung, die an jedem Kondensator abfällt, gleich. D.h. die gesamte Ladungsmenge auf der einen Seite wie auf der anderen Seite der Kondensatoren muß gleich sein:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U \quad (1.1.86)$$

Für eine Parallelschaltung bekommen wir als Gesamtkapazität  $C_{ges}$ :

$$C_{ges} = \sum_i C_i \quad (1.1.87)$$



**Abbildung 1.1.25:** Parallel- und Serienschaltung von Kondensatoren.

Bei der Serienschaltung wie in Abb. 1.1.25 illustriert, muß die Ladungsmenge die jeder Kondensator speichert gleich sein. Da der Abschnitt zwischen zwei Kondensatoren in der Serie elektrisch neutral ist, muß die negative Ladung des einen Kondensators gleichzeitig betragsmäßig identisch zur positiven Ladung des nächsten Kondensators sein und sofort. D.h. es muß gelten  $Q = C_1U_1$ ,  $Q = C_2U_2$ ,  $Q = C_3U_3$  usw. Dies läßt sich auf die gesamte Spannung  $U$  beziehen wie:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \dots \right) \quad (1.1.88)$$

Damit ergibt sich für die gesamte Kapazität  $C_{ges}$ :

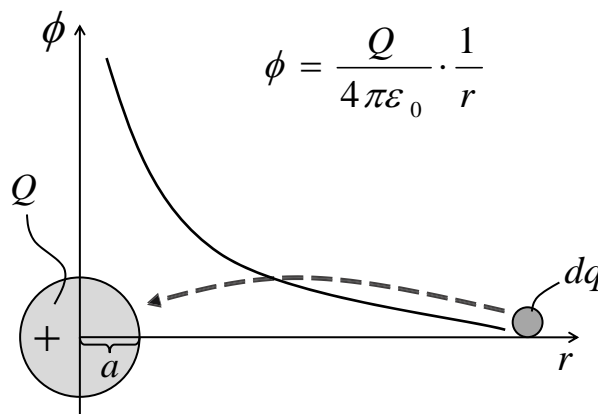
$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (1.1.89)$$

Betrachten wir als Beispiel zwei gleiche Kondensatoren  $C_0$ , die parallel geschaltet werden. Man erhält  $C_{ges} = 2C_0$ , da mit der gleichen Spannung die doppelte Ladungsmenge gespeichert werden kann. Bei der Serienschaltung teilt sich die Spannung durch zwei und eine Ladungsmenge  $Q$  wird pro Kondensator mit der halben Spannung gespeichert, daraus ergibt sich  $C_{ges} = (1/2)C_0$ .

### Die Energie des elektrischen Feldes

Das Speichern von Ladung in der Anordnung eines Kondensators ist gleichbedeutend mit dem Speichern von Energie. Verbindet man die beiden Seiten eines Kondensators, so findet ein Ladungsausgleich statt. Die dabei erfolgende Bewegung der Ladungsträger kann als Energiequelle genutzt werden (Stromquelle). Um die gespeicherte Energie eines Kondensators zu berechnen, betrachten wir eine Kugel mit Radius  $a$  und einer positiven Ladung  $Q$ , auf die wir aus dem Unendlichen weiter positive Ladungen  $dq$  hinzufügen (siehe Abb. 1.1.26).

$$dW = dq \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{s} \quad (1.1.90)$$



**Abbildung 1.1.26:** Elektrisches Potential einer Kugel mit Radius  $a$ . Durch Aufbringen von Ladungen  $dq$  auf eine Kugel der Ladung  $Q$  erzeugen wir gespeicherte potentielle Energie.

Nachdem der Integrationsweg entgegen der Richtung von  $\vec{E}$  erfolgt wird  $dW$  negativ, d.h. Arbeit muß in die Bewegung der Ladung hinein gesteckt werden. Damit erhöht sich die potentielle Energie wegen  $\Delta E_{pot} = -dW$ . Falls wir mit einer ungeladenen Kugel beginnen und sie langsam auf die Ladung  $Q$  aufladen entspricht dies einer Änderung der potentiellen Energie von:

$$E_{pot} = - \int_{q=0}^Q \int_{\infty}^P dq \vec{E}(q) d\vec{r} \quad (1.1.91)$$

Mit dem elektrischen Potential  $\Phi$  einer Kugel der Ladung  $q$  können wir schreiben:

$$\phi = \int_P^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (1.1.92)$$

Damit wird die potentielle Energie zu:

$$E_{pot} = \int_{q=0}^Q \phi dq = \int_{q=0}^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.1.93)$$

D.h. die gespeicherte potentielle Energie eines Kondensators ist mit  $Q = CU$ <sup>7</sup>:

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2} CU^2} \quad (1.1.94)$$

Dieser Zusammenhang läßt sich auch verallgemeinern, wenn wir die Kapazität eines Plattenkondensators ansetzen mit  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$  und die Spannung die an diesem Kondensator anliegt mit  $U = Ed$ . Damit bekommen wir:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{=V} \quad (1.1.95)$$

Damit wird die Energiedichte  $w$  des elektrischen Feldes zu:

$$\boxed{w = \frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (1.1.96)$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein unabhängig von der Annahme eines bestimmten Kondensatortyps.

<sup>7</sup>Wir hatten oben die potentielle Energie einer einzelnen Ladung im Feld einer anderen Ladung abgeleitet mit  $E_{pot} = eU$ . Mit  $Q/U$  ergibt sich hier allerdings eine Formel  $E_{pot} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$ , d.h. woher kommt der Faktor 1/2 ? Dies löst sich auf, wenn man berücksichtigt, daß man zur Berechnung der Energie des ersten Beispiels mittels  $E_{pot} = \frac{1}{2} QU$ , beide Ladungen berücksichtigen muß. D.h. mit  $Q=2e$  ergibt sich konsistent wieder  $E_{pot} = \frac{1}{2} (2e)U = eU$ .

### 1.1.4 Isolatoren im elektrischen Feld, Dielektrika

Das Speichern von Ladungen in einem Kondensator kann signifikant verbessert werden, wenn ein Isolator in diesen Kondensator eingefügt wird. Das elektrische Feld in dem Kondensator *induziert* elektrische Dipolmomente in dem Isolator, die das angelegte elektrische Feld abschirmen. Deshalb spricht man auch von **Dielektrika**<sup>8</sup>. Damit entstehen **Polarisationsladungen** an den Oberflächen des Isolators, die *zusätzlich* die Ladungen auf den Kondensatorplatten "festhalten" können.

#### Polarisation, Suszeptibilität

Die mikroskopische Ursache für die **Polarisation** ist ein Dipolmoment, das durch das Anlegen eines äußeren Feldes induziert wird. Bei dieser Erzeugung der Polarisation unterscheidet man zwischen der **Verschiebungspolarisation** und der **Orientierungspolarisation**:

- **Verschiebungspolarisation**

Ein *induziertes* Dipolmoment entsteht durch ein lokales elektrisches Feld  $E_{\text{lokal}}$  am Ort des einzelnen Isolatoratoms oder Moleküls. Dieses lokale elektrische Feld verschiebt den Ladungsschwerpunkt in einem ansonsten *unpolaren* Atom oder Molekül. Die Fähigkeit ein Dipolmoment zu induzieren wird durch die sogenannte **Polarisierbarkeit**  $\alpha$  ausgedrückt:

$$\vec{p}_{\text{Molekül}} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_{\text{lokal}} \quad (1.1.97)$$

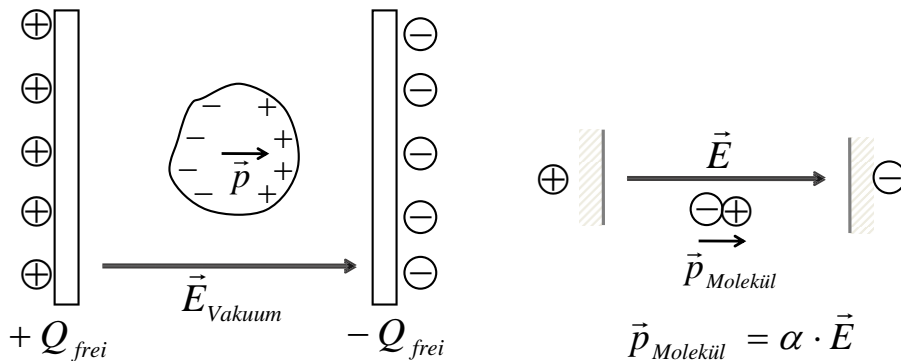
Nach dieser Konvention zeigt der Vektor des elektrischen Dipolmoments immer von der *negativen zur positiven* Ladung, während der Vektor des elektrischen Feldes immer von der *positiven zur negativen* Ladung zeigt (siehe Abb. 1.1.27).

Die Polarisierbarkeit  $\alpha$  hängt stark von dem betrachteten Atom oder Molekül ab. Je stärker die Bindungsenergien der Elektronen an den Atomkern sind, desto schlechter lassen sich diese Atome polarisieren. Im gleichen Maße kann man die abgeschlossenen bzw. halbgefüllten Atomshalen als Maß für die Polarisierbarkeit verwenden. Beispiel sind

---

<sup>8</sup>Bei Paraelektrika existieren schon Dipolmomente im Material, die allerdings ungeordnet vorliegen. Bei Ferroelektrika existiert ein geordnetes Gitter von Dipolmomenten, die schon ein elektrisches Feld erzeugen. Dies ist analog zu diamagnetisch, paramagnetisch und ferromagnetisch.





**Abbildung 1.1.27:** Ein äußeres elektrisches Feld polarisiert ein Dielektrikum, das das äußere Feld damit *teilweise* abschirmt.

Edelgase mit ihren abgeschlossenen Schalen, die nur eine kleine Polarisierbarkeit im Vergleich zu Alkalimetallen haben.

- **Orientierungspolarisation**

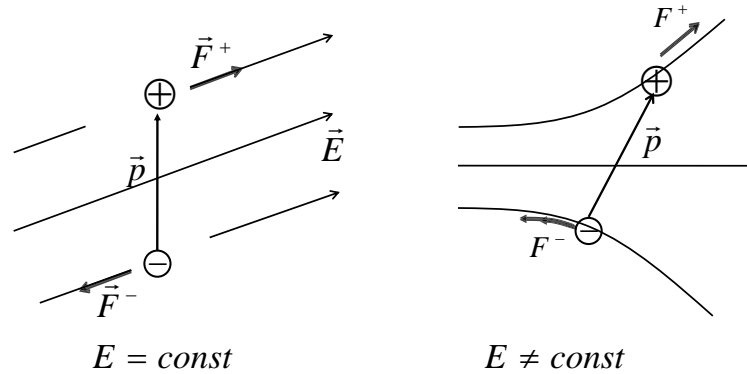
Bei der Orientierungspolarisation richtet sich ein vorhandener elektrischer Dipol in einem von außen angelegten Feld aus. Ein solcher elektrischer Dipol existiert oft in Ionenkristallen in denen eine Ladungstrennung durch die chemische Identität der Elemente gegeben ist (Bsp.  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$ ). Je nach Kristallstruktur können sich die einzelnen elektrischen Dipolmomente in der Summe heraus mitteln oder eine permanente Polarisation ergeben. Die Richtung der einzelnen elektrischen Dipole ist durch das Kristallgitter zunächst vorgegeben. Ein äußeres elektrisches Feld kann diese Dipole jetzt teilweise neu ausrichten und die Polarisation ändert sich. Diese Orientierungspolarisation hatten wir im Prinzip schon bei der Diskussion eines isolierten Dipols im elektrischen Feld behandelt. Wir hatten abgeleitet, daß auf ein Dipol  $\vec{p}$  ein Drehmoment  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.1.98)$$

wirkt, und die potentielle Energie durch

$$E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.1.99)$$

gegeben ist. Als Erweiterung betrachten wir jetzt ein inhomogenes elektrisches Feld, wie es in Abb. 1.1.28 illustriert ist. Auf die beiden La-



**Abbildung 1.1.28:** Orientierungspolarisation in einem homogenen und einem inhomogenen elektrischen Feld.

dungen wirkt jetzt eine Kraft die unterschiedliche groß ist und in unterschiedliche Richtung zeigt. D.h. in der Summe entsteht nicht nur ein *Drehmoment* sondern auch eine *Translation* des Dipols. Diese Kraft können wir ableiten aus den Komponenten des elektrischen Feldes  $E_{x,y,z}^+$  und  $E_{x,y,z}^-$ , die am Ort der positiven bzw. der negativen Ladung herrschen. Die Kraft in x-Richtung für ein Feld, das nur in x-Richtung variiert wie in Abb. 1.1.28 ist:

$$F_x = q (E_x^+ - E_x^-) = q \frac{\Delta E_x}{\Delta x} \Delta x \quad (1.1.100)$$

Mit  $q\Delta x$  dem x-Anteil des Dipolmoments. Der Vektor dieser Kraft läßt sich daraus leicht ableiten zu:

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \text{grad} \vec{E} \quad (1.1.101)$$

Es gilt zu beachten, daß in dieser Formulierung der Gradient  $\text{grad} \vec{E}$  ein *Tensor* ist, der in Komponenten ausgedrückt ergibt:

$$F_x = \vec{p} \cdot \text{grad} E_x \quad (1.1.102)$$

$$F_y = \vec{p} \cdot \text{grad} E_y \quad (1.1.103)$$

$$F_z = \vec{p} \cdot \text{grad} E_z \quad (1.1.104)$$

Zunächst wirkt das Drehmoment so, daß  $\vec{p}$  sich parallel zu  $\vec{E}$  orientiert und dann in Richtung des Gradienten von  $\vec{E}$  gezogen wird.

Diese mikroskopische Polarisation der einzelnen Bestandteile eines Isolators überlagert sich und es entsteht eine makroskopische Polarisation  $\vec{P}$ , die sich aus der Dichte  $n$  an Molekülen ergibt zu:

$$\boxed{\vec{P} = n\vec{p}} \quad (1.1.105)$$

Dies gilt für den Fall, daß alle Dipolmomente  $\vec{p}$  in dieselbe Richtung zeigen. Allgemein muß die Vektorsumme gebildet werden über  $N$  Dipole in einem Volumen  $V$ :

$$\boxed{\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i} \quad (1.1.106)$$

Diese Polarisation pro Volumen hat die Dimension einer Oberflächenladung. Das elektrische Feld, das im Innern des Dielektrikums  $\vec{E}_{\text{Dielektrikum}}$  herrscht, setzt sich jetzt zusammen aus dem Feld, das durch die freien Ladungen auf den Kondensatorplatten  $\vec{E}_{\text{Vakuum}}$  und dem entgegen gerichteten elektrischen Feld, das durch die Polarisationsladungen erzeugt wird. Man bekommt<sup>9</sup>:

$$\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} = \vec{E}_{\text{Vakuum}} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \quad (1.1.107)$$

Man erkennt, daß die Feldstärke im Dielektrikum geringer als die im Vakuum ist<sup>10</sup>. Diese Reduktion läßt sich durch eine **relative Dielektrizitätskonstante**  $\epsilon$  ausdrücken gemäß:

$$\boxed{\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_{\text{Vakuum}}} \quad (1.1.108)$$

Neben der *mikroskopischen* Größe Polarisierbarkeit kann man auch einen makroskopischen Zusammenhang definieren der die Polarisation  $\vec{P}$  mit dem elektrischen Feld im Dielektrikum  $\vec{E}_{\text{Dielektrikum}}$  in Beziehung setzt. Die Proportionalitätskonstante ist die **dielektrische Suszeptibilität**  $\chi$ :

$$\boxed{\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Dielektrikum}}} \quad (1.1.109)$$

Die Beziehung zwischen relativer Dielektrizitätskonstante und Suszeptibilität läßt sich aus den Gl. 1.1.107, 1.1.108 und 1.1.109 ableiten zu:

<sup>9</sup>Nach der eingangs erwähnten Konvention zeigen die Vektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{P}$  in dieselbe Richtung.

<sup>10</sup>Bei Metallen wird diese Feldstärke im Innern auf Null reduziert. Eine solche vollständige Abschirmung ist bei Isolatoren nicht möglich, da die Ladungsträger nicht beliebig frei beweglich sind.

Material	$\epsilon$
SiO <sub>2</sub>	3.75
TiO <sub>2</sub>	80
SrBiTiO <sub>3</sub>	1000
H <sub>2</sub> O	81
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	2.3
Luft	1.000578

**Tabelle 1.1:** Relative Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  einiger Materialien

$$\boxed{\epsilon = 1 + \chi} \quad (1.1.110)$$

Im allgemeinen lassen sich die Gleichungen der Elektrodynamik im Vakuum in diejenigen umwandeln in Materie indem man formal immer  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon\epsilon_0$  ersetzt. D.h. die Kapazität eines Plattenkondensators wird zu

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow \epsilon_0 \epsilon \frac{A}{d} \quad (1.1.111)$$

D.h. die Kapazität wird durch das Einbringen von einem Dielektrikum mit einer hohen relativen Dielektrizitätskonstante stark erhöht.

### Polarisierbarkeit, Clausius-Mosotti-Gesetz

Im folgenden wollen wir die Polarisierbarkeit etwas genauer betrachten. Wir hatten zunächst zwei Gleichungen die einerseits das Dipolmoment eines einzelnen Moleküls und andererseits die makroskopische Polarisation mit den elektrischen Feldern verknüpfen.

$$\vec{p} = \alpha\epsilon_0\vec{E}_{\text{lokal}} \quad \vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} \quad (1.1.112)$$

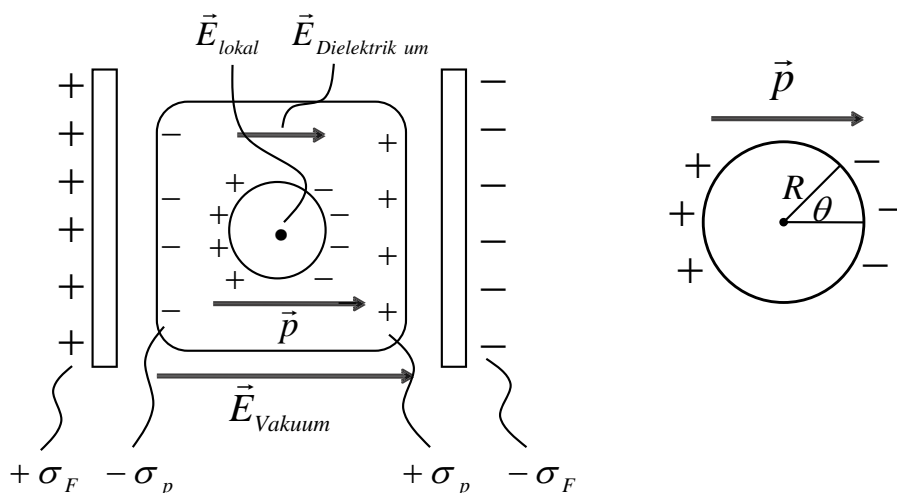
Die folgende Analyse soll zeigen, daß das gemittelte Feld  $E_{\text{Dielektrikum}}$  *nicht* identisch zu dem lokalen elektrischen Feld  $E_{\text{lokal}}$  sein muß.

Wie wollen jetzt zwei Fälle diskutieren:

- **Medien geringer Dichte (z.B. Gase)**

Bei dünnen Medien wie Gasen ist der Einfluss der Polarisation auf das lokale elektrische Feld gering und es ist nahezu identisch mit dem gemittelten elektrischen Feld im Dielektrikum:  $E_{\text{Dielektrikum}} \simeq E_{\text{lokal}}$ . Mit der allgemeinen Beziehung  $\vec{P} = n\vec{p}$  ergibt sich so:

$$\vec{P} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} = \chi\epsilon_0\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} \quad (1.1.113)$$



**Abbildung 1.1.29:** Bei Medien hoher Dichte ist das lokale elektrische Feld am Ort eines atomaren Dipols  $\vec{E}_{\text{lokal}}$  höher als das elektrische Feld im Vakuum  $\vec{E}_{\text{Vakuum}}$ . Um den Ort des Dipol wird eine Kugel, die Lorentzkugel ausgeschnitten. Die Oberflächenladungen auf dieser Kugel durch die Polarisation tragen zum lokalen Feld bei.

Daraus ergibt sich als Verknüpfung zwischen der mikroskopischen Größe  $\alpha$  und der makroskopischen Größe  $\chi$  wie:

$$\chi = n\alpha \quad (1.1.114)$$

- **Medien hoher Dichte (z.B. Festkörper)**  $E_{\text{Polarisation}} > 0$

Bei dichten Medien haben die Polarisationsladungen einen merklichen Einfluss auf die Größe des elektrischen Feldes am Ort des einzelnen Moleküls oder Festkörperatoms. Betrachten wir zunächst eine regelmäßige Anordnung von einzelnen Dipolen in einem kubischen Kristall. Wenn man die Anteile am elektrischen Feld *aller* Dipolmomente im kubischen Kristall am Ort eines einzelnen ausgewählten Dipols aufaddiert, so erhält man als Lösung ein elektrisches Feld gleich Null! D.h. ein einzelnes Dipolmoment nimmt gar nicht das elektrische Feld seiner benachbarten Dipolmomente wahr. Diese Beschreibung ist allerdings nur gut für die Beziehung eines einzelnen Dipolmoments zu seinen nächsten Nachbarn. Bei größeren Abständen führen Fehlstellen, Verunreinigungen, Verspannungen in einem Kristall dazu, daß die Orte der entfernten Dipolmomente nicht mehr exakt auf dem Raster eines regelmäßigen Kristalls liegen. Deshalb mitteln sich dann auch alle elektrischen Felder

nicht mehr exakt heraus. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, unterteilt man die Umgebung eines einzelnen Dipols in einen *Nahbereich* im Innern der sog. *Lorentzkugel* und in einen *Fernbereich* außerhalb (siehe Abb. 1.1.29). Am Ort des einzelnen Moleküls ergibt sich ein lokales elektrisches Feld aus der Summe von drei Beiträgen: (i) das mittlere elektrische Feld des Dielektrikums  $E_{\text{Dielektrikum}}$ , das sich aus der Bilanz der freien Ladungen auf den Kondensatorplatten und den Oberflächenladungen des Isolators ergibt; (ii) das elektrische Feld  $\vec{E}_{\text{Nachbarn}}$  von diskreten Dipolen der nächsten Nachbarn im Innern der Lorentzkugel. Bei kubischen Kristallen ist dieses exakt Null. Es gibt aber auch Materialien, bei denen das nicht gelten muß; (iii) ein elektrische Feld  $E_{\text{Polarisation}}$ , das durch die gemittelte Polarisation der entfernten Nachbarn erzeugt wird. Dieses Feld wird durch Oberflächenladungen  $\vec{P}$  am Innern der Lorentzkugel erzeugt.

$$\vec{E}_{\text{lokal}} = \vec{E}_{\text{Dielektrikum}} + \vec{E}_{\text{Polarisation}} + \vec{E}_{\text{Nachbarn}} \quad (1.1.115)$$

Für den Fall einer kubischen Anordnung von Dipolen galt, daß das erzeugte Feld  $\vec{E}_{\text{Nachbarn}}$  zu Null wird. Es verbleibt das Feld, das durch die Polarisationsladungen  $\sigma$  an der Innenseite der Kugeloberfläche erzeugt wird<sup>11</sup> (siehe Abb. 1.1.29).

$$\sigma = P \cos \theta \quad (1.1.116)$$

Der Winkel  $\cos \theta$  bringt zum Ausdruck, daß sich das Vorzeichen der Polarisationsladung auf der Kugeloberfläche ändert. Das elektrische Feld, das durch solche Oberflächenladungen erzeugt wird, ist gemäß dem Coulombgesetz:

$$\vec{E}_{\text{Polarisation}} = \int_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} d\vec{F} \quad (1.1.117)$$

Aus Symmetriegründen entsteht nur ein Feld in x-Richtung, was wir durch einen weiteren Faktor  $\cos \theta$  ausdrücken können:

$$E_{\text{Polarisation},x} = \int_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dF \quad (1.1.118)$$

<sup>11</sup>Laut Konvention in Abb. 1.1.29 befinden sich negative Ladungen für  $\theta = 0$ . Nachdem im folgenden alles immer auf  $\vec{P}$  bezogen wird, wird das negative Vorzeichen der Ladung durch die Konvention der Richtung von  $\vec{P}$  schon berücksichtigt.

mit dem Flächenelement in Kugelkoordinaten  $dF = \sin\theta d\theta d\phi R^2$  ergibt sich schließlich

$$E_{Polarisation,x} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{R^2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi R^2 = \frac{1}{3\epsilon_0} P \quad (1.1.119)$$

D.h. wir bekommen ein elektrisches Feld am Ort des Moleküls von:

$$\vec{E}_{\text{lokal}} = \vec{E}_{\text{Dielektrikum}} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (1.1.120)$$

Man erkennt, daß das lokale elektrische Feld *größer* als das gemittelte Feld im Dielektrikum ist. Das lokale elektrische Feld läßt sich durch die Polarisierbarkeit  $\alpha$  und die Dichte an Molekülen  $\vec{P} = n\epsilon_0\alpha\vec{E}_{\text{lokal}}$  ausdrücken und man bekommt:

$$\vec{P} = \underbrace{\frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}}_{=\chi} \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Dielektrikum}} \quad (1.1.121)$$

Dies läßt sich umstellen zu:

$$\chi = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}} \quad (1.1.122)$$

Verwenden wir  $\epsilon = 1 + \chi$ , so bekommen wir schließlich die **Clausius-Mosotti** Gleichung als Verknüpfung zwischen der mikroskopischen Größe  $\alpha$  und der makroskopischen Größe  $\epsilon$ :

$$\boxed{\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3}} \quad (1.1.123)$$

Der Faktor 3 in Gl. 1.1.120 ist eine direkte Folge der Annahme eines kugelförmigen Hohlraums. Abhängig von der Mikrostruktur des Dielektrikums können auch andere Hohlräume angesetzt werden, die entsprechend andere Faktoren ergeben.

## D-Feld und E-Feld

Abschließend wollen wir eine allgemeine Formulierung der elektrischen Felder in Materie ableiten. Betrachten wir wieder einen Isolator in einem äußeren elektrischen Feld. Nach dem Gauß'schen Satz wird die Polarisation  $\vec{P}$  durch Polarisationsladungen  $Q_p$  erzeugt, gemäß:

$$-\int_{\text{Fläche}} \vec{P} d\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} Q_p dV \quad (1.1.124)$$

Das negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, daß die Polarisation im Unterschied zum elektrischen Feld immer von der negativen zur positiven Ladung orientiert ist. Das elektrische Feld im Dielektrikum wird durch die freien Ladungen  $Q_f$  auf den Kondensatorplatten und durch die Polarisationsladungen  $Q_p$  bestimmt.

$$\int_{\text{Fläche}} \vec{E} d\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Volumen}} (Q_p + Q_f) dV = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Fläche}} \vec{P} d\vec{F} + \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Volumen}} Q_f dV \quad (1.1.125)$$

Dies läßt sich formal umformen in

$$\int_{\text{Fläche}} \vec{D} d\vec{F} = \int_{\text{Volumen}} Q_f dV \quad (1.1.126)$$

mit einem neuen Feld  $\vec{D}$ , der **elektrischen Verschiebungsdichte**, das sich aus den elektrischen Feld  $\vec{E}$  berechnet wie:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Dielektrikum}} + \vec{P} \quad (1.1.127)$$

Nachdem dieses D-Feld nur von freien Ladungen abhängt, muß es identisch zu  $\vec{E}_{\text{Vakuum}}$  sein (bis auf den Faktor  $\epsilon_0$  zur Korrektur der unterschiedlichen Einheiten):

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{Vakuum}}} \quad (1.1.128)$$

Mit der Beziehung  $\vec{E}_{\text{Dielektrikum}} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_{\text{Vakuum}}$  können wir schließlich folgern:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_{\text{Dielektrikum}}} \quad (1.1.129)$$

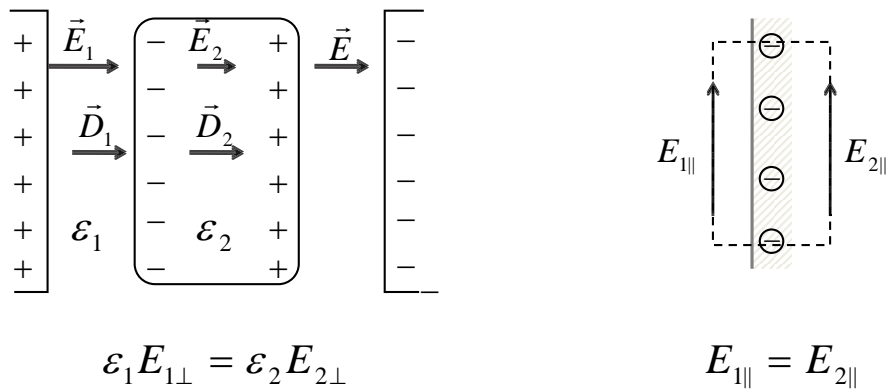
Gemäß dem Gauß'schen Satz kann man folgende Unterscheidung machen:

- D-Felder werden durch freie Ladungen erzeugt



- E-Felder werden durch alle Ladungen erzeugt (freie und Polarisationsladungen)

Mit der Unterscheidung zwischen D-Feldern und E-Feldern läßt sich auf elegante Weise die Bedingungen für elektrische Felder an einer Grenzfläche Vakuum-Isolator ableiten. Bei einem Metall war diese Bedingungen recht einfach, da wir abgeleitet hatten, daß die elektrischen Feldlinien immer senkrecht zur Oberfläche orientiert sein müssen. Dies muß bei einem Isolator nicht der Fall sein. Betrachten wir dazu einen Isolator in einem elektrischen Feld an dessen Oberfläche sich Polarisationsladungen befinden, wie in Abb. 1.1.30 illustriert. Das Medium außerhalb bezeichnen wir als 1 mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  und den Isolator als Medium 2 mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$ . Wir unterscheiden zunächst zwei Richtungen:



**Abbildung 1.1.30:** An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  ist die Normalkomponente des  $\vec{D}$ -Feldes und die tangential-Komponente des  $\vec{E}$ -Feldes konstant.

- **normal zur Oberfläche**

Nachdem das D-Feld nur von den *freien* Ladungen abhängt, haben die Polarisationsladungen keinen Einfluss. D.h. es muß gelten:

$$D_{1,\perp} = D_{2,\perp} \tag{1.1.130}$$

bzw. nach Gl. 1.1.129 bekommen wir:

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{1,\perp} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2,\perp} \tag{1.1.131}$$

- **parallel zur Oberfläche**

Die Randbedingungen für die Feldkomponenten parallel zur Oberfläche leiten wir aus der Bedingung ab, daß das elektrische Feld ein *konser-*  
*vatives* Feld ist, d.h. es muß für eine geschlossene Kurve immer gelten:

$$\oint_{\text{Kurve}} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (1.1.132)$$

Aus dem Weg, der in Abb. 1.1.30 gewählt wurde, ist sofort ersichtlich, daß gelten muß:

$$E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel} \quad (1.1.133)$$

Jetzt betrachten wir den allgemeinen Fall eines beliebigen Einfallswinkels der Feldlinien an die Grenzfläche. Wir bekommen aus den Randbedingungen für die parallele und die senkrechte Komponente in beiden Medien zunächst

$$\tan \alpha = \frac{E_{1,\parallel}}{E_{1,\perp}} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{E_{2,\parallel}}{E_{2,\perp}} \quad (1.1.134)$$

Wenn man beide Gleichungen durcheinander teilt, so bekommt man:

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{E_{1,\parallel}}{E_{1,\perp}} \frac{E_{2,\perp}}{E_{2,\parallel}} \quad (1.1.135)$$

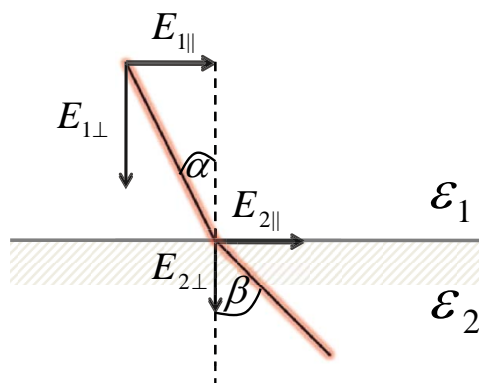
Daraus ergibt sich das sogenannte **Brechungsgesetz**, gemäß den Winkeln, wie in Abb. 1.1.31 eingezeichnet.

$$\epsilon_2 \tan \alpha = \epsilon_1 \tan \beta \quad (1.1.136)$$

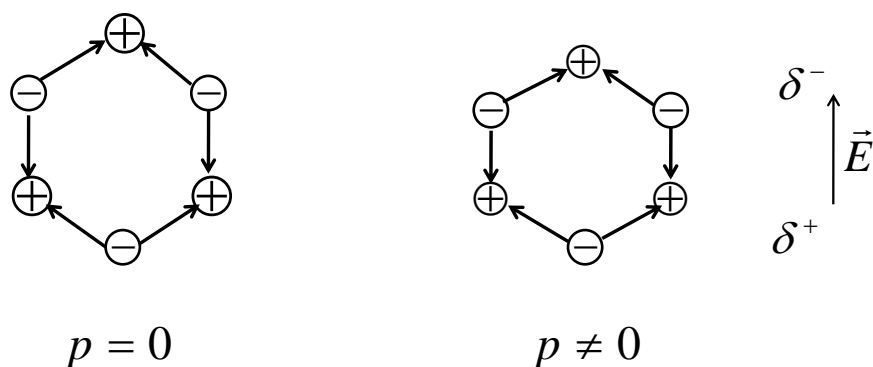
### 1.1.5 Ferroelektrika

Ferroelektrika sind Materialien, deren Bestandteile ein permanentes elektrisches Dipolmoment tragen, die sich aber zusätzlich untereinander regelmäßig anordnen. D.h. die Wechselwirkung der Dipole untereinander führt zu einer Ausrichtung. Diese Ferroelektrika erzeugen auch ohne die Einwirkung eines externen Feldes ein eigenes äußeres elektrisches Feld.

Ein Beispiel ist Quarz ( $\text{SiO}_2$ ). Im Gleichgewicht heben sich die elektrischen Dipolmomente untereinander auf. Komprimiert man allerdings diesen



**Abbildung 1.1.31:** Brechungsgesetz für ein elektrisches Feld an der Grenzfläche zu einem Isolator.



**Abbildung 1.1.32:** Piezoelektrizität. Durch einseitigen Druck auf einen Ionenkristall entsteht eine Polarisation.

Kristall in eine Richtung, so entsteht eine Nettopolarisation in eine Richtung. Man spricht von druck-induzierter Polarisation oder **Piezoelektrizität**. Dies wird zum Beispiel in einer Quarzuhr genutzt bei der die mechanischen Schwingungen eines Quarzkristalls, automatisch auch Schwingungen der Polarisationsladung erzeugen, die elektronisch aufgenommen als Frequenzstandard für eine Uhr verwendet werden können.

## 1.2 Der elektrische Strom

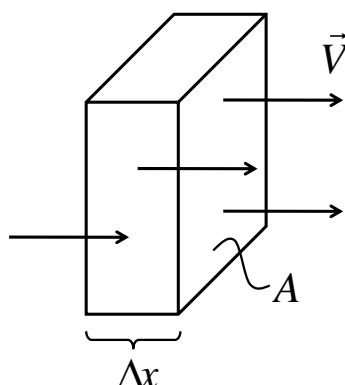
Die Ladungsmenge, die pro Zeit durch eine gegebene Fläche tritt bezeichnet man als elektrischen Strom. Mit diesem Transport von Ladungsträgern lässt sich Energie von einem Ort zum nächsten nahezu verlustfrei transportieren bzw. in vielfältiger Art und Weise zur Verrichtung von Arbeit nutzen.

### 1.2.1 Strom und Widerstand

#### Strom und Stromdichte

Der elektrische **Strom**  $I$  ist definiert als eine Ladungsmenge, die pro Zeit durch den Querschnitt in einem leitenden Objekt tritt. Es gilt die Definition:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1.2.1)$$



**Abbildung 1.2.1:** Elektrischer Strom entspricht dem Transport von Ladungsträgern.

Ströme werden in der Einheit **Ampere** gemessen wobei 1 A, einer Ladungsmenge von 1 Coloumb entspricht, die pro Sekunde durch einen gegebenen Querschnitt transportiert wird. Der Strom lässt sich auch über die **Stromdichte**  $\vec{j}$  definieren, die den Strom pro Fläche  $\vec{A}$  angibt. Aus der Stromdichte lässt sich der Gesamtstrom immer über Integration gewinnen:

$$I = \int \vec{j} d\vec{A} \quad (1.2.2)$$

Wie ist die Stromdichte definiert? Betrachten wir dazu zunächst in einer Dimension eine Fläche  $A$ , durch die Ladungsträger mit einer Geschwindigkeit

$v = \Delta x / \Delta t$  hindurch treten (siehe Abb. 1.2.1). D.h. Teilchen in einem Volumen der Ausdehnung  $\Delta x \cdot A$  erreichen in einem Zeitraum  $\Delta t$  diese Fläche und tragen zum Strom bei. Daraus ergibt sich der Strom bei einer Teilchendichte  $n$  zu:

$$I = nqA\Delta x \frac{1}{\Delta t} = nqAv \quad (1.2.3)$$

bzw. durch die Division durch  $A$  die Stromdichte als:

$$\boxed{\vec{j} = nq\vec{v}} \quad (1.2.4)$$

Die Ladung  $q$  bezieht sich auf die Ladung der Teilchen, die positiv oder negativ sein kann. Für Elektronen bzw. einfach geladenen Ionen gilt  $q = \pm e$ .

Wenn wir den Transport von Elektronen in einem elektrischen Feld betrachten, das in positive x-Richtung zeigt, so bewegen sich diese entgegen der Feldrichtung, d.h.  $v_x$  ist negativ. Mit  $q = -e$  wird allerdings auch:

$$j = n(-e)v_x \quad (1.2.5)$$

eine positive Zahl. D.h. der Elektronentransport führt zu einer Stromdichte *in Richtung* des elektrischen Feldes. Analog kann man einen Ausdruck für den Ionentransport im elektrischen Feld ableiten. Auch hier zeigt die Stromdichte *in Richtung* des elektrischen Feldes. Der Strom läuft also immer in Richtung des elektrischen Feldes, bzw. von Plus nach Minus in einem Stromkreis. Diese Richtung bezeichnet man als **technische Stromrichtung**. Dabei gilt es zu beachten, daß in den meisten Leitern, Elektronen die Ladung transportieren und somit die Teilchenbewegung des Elektronen entgegen der technischen Stromrichtung erfolgt.

Stromtransport kann über mehrere Mechanismen stattfinden:

- **Elektronenleitung**

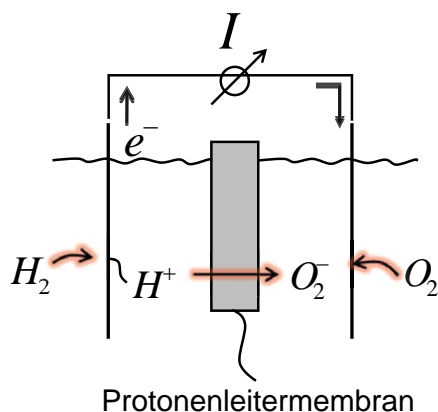
In Metallen findet Stromtransport durch die Bewegung der Elektronen statt. Man spricht von Elektronenleitern.

- **Ionenleitung**

Der Stromtransport in Form von Ionen findet in Elektrolyten statt in denen sich positive und negative Ionen bilden (NaCl, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>...). In einem elektrischen Feld wandern diese Ionen zu den entsprechenden Elektroden.

Eine wichtige Anwendung eines Ionenleiter ist eine **Brennstoffzelle**. In einer solchen Zelle werden zwei Reaktanden z.B. H<sub>2</sub> und O<sub>2</sub> *still*

verbrannt. Dazu bildet sich an einer Metallelektrode zunächst ein Proton, wobei das Elektron in der Metallelektrode abfließt. Das Proton kann als *Ion* durch eine Membran zu einer Gegenelektrode *diffundieren* an der  $O^{2-}$  Ionen gebildet werden. Verbindet man die beiden Elektroden, so laufen die Elektronen über die elektrische Verbindung von einer Elektrode zur anderen, während die Ionen direkt durch die Membran (PEMFC Proton Exchange Membrane Fuel Cell, siehe Abb. 1.2.2) diffundieren. Damit ist der Stromkreis geschlossen.



**Abbildung 1.2.2:** In einer Brennstoffzelle findet Ladungstransport über den Transport von Protonen durch eine Ionen-leitende Membran statt.

Brennstoffzellen können sehr effizient chemische Energie ( $H_2 + 1/2O_2 \rightarrow H_2O$ ) in elektrische Energie umwandeln.

- **Elektronen- und Ionenleitung**

Bei Gasentladungen entsteht ein Plasma als Gemisch aus positiven und negativen Ladungsträgern. In solchen Plasmen findet Stromtransport über die Bewegung *beider* Ladungsträgersorten statt. Nachdem Quasineutralität herrscht (d.h. die Dichte an positiver und negativer Ladung muß gleich sein) können wir bei einfach geladenen Ionen ( $q = +e$ ) die Stromdichte einfach angeben als:

$$\vec{j} = en (\vec{v}_+ - \vec{v}_-) \quad (1.2.6)$$

Mit  $\vec{v}_+$  der Geschwindigkeit der Ionen und  $\vec{v}_-$  der Geschwindigkeit der Elektronen.

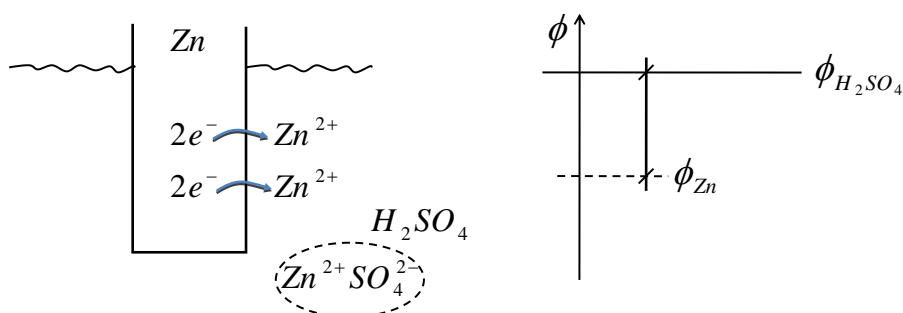
Quellen für elektrischen Strom lassen sich auf vielfältige Weise realisieren. Im folgenden seien einzelne Beispiele genannt:

- **Generator**

Die wichtigste Stromquelle ist ein **Generator**, der aus mechanischer Energie elektrische Energie erzeugt. Primär produziert dieser Wechselstrom, wie weiter unten noch genau diskutiert wird.

- **Galvanisches Element**

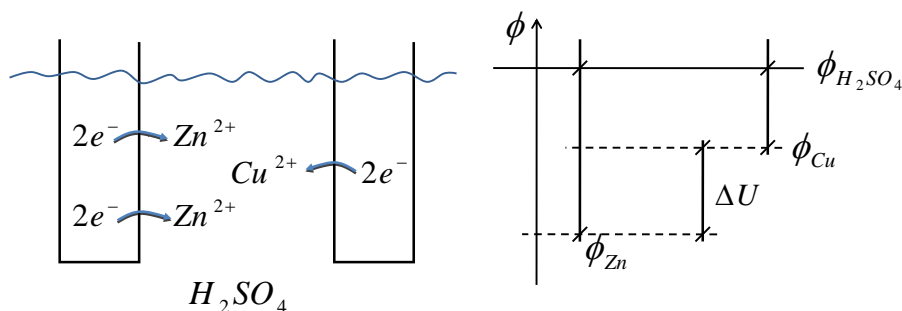
Die früheste Beobachtung von Strom gelang mit Hilfe eines sogenannten Galvanischen Elementes. Hierzu verwendet man zwei Metallelektroden, die über einen Elektrolyten miteinander verbunden sind. Durch die chemische Reaktion des Elektrodenmaterials mit dem Elektrolyten entsteht eine Ladungstrennung. So treten z.B. bei einer Zinkelektrode  $Zn^{2+}$ -Ionen in Lösung über. Es verbleibt ein Überschuss an Elektronen und die Elektrode lädt sich negativ gegenüber dem Elektrolyten auf (siehe Abb. 1.2.3). Der Übergang von Zink in Lösung findet solange statt, bis das elektrische Feld durch den Elektronenüberschuß im Material, dem Abtransport von positiven Zinkionen entgegenwirkt. Man erhält im Gleichgewicht einen definierten konstanten Spannungsunterschied zwischen Elektrode und Elektrolyt.



**Abbildung 1.2.3:** Durch die Reaktion eines Metalls (Bsp Zink) mit einem Elektrolyten (Bsp.  $H_2SO_4$ ) erhält man einen Spannungsunterschied.

Vergleicht man jetzt zwei unterschiedliche Elektrodenmaterialien, zum Beispiel Zink und Kupfer, so beobachtet man unterschiedliche Spannungsunterschiede, da die Reaktion der Metallionen mit dem Elektrolyten jeweils unterschiedlich ist (Zink-Ionen treten leichter in Lösung über als Kupfer-Ionen). Mit einem Spannungsmeßgerät, das man an

beide Elektroden hält, läßt sich jetzt allerdings von außen nur der *Unterschied* der beiden Potentialdifferenzen messen (siehe Abb. 1.2.4)<sup>12</sup>



**Abbildung 1.2.4:** Der Potentialunterschied von zwei Metallen gegenüber einem Elektrolyten läßt sich extern als Spannungsunterschied  $\Delta U$  zwischen den Metallen beobachten.

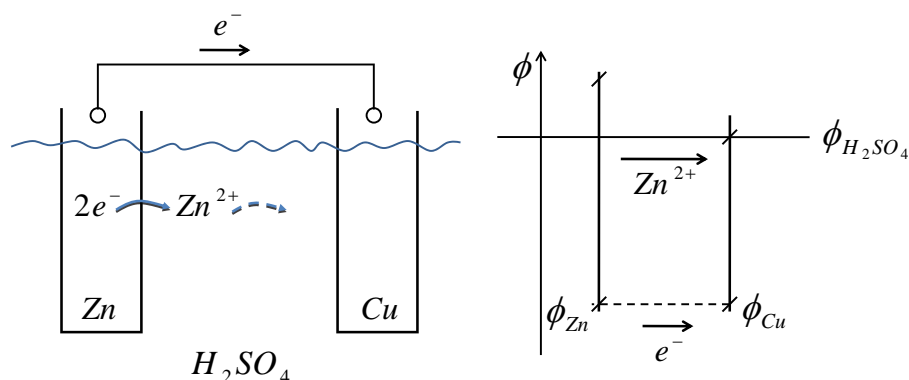
Zunächst befindet sich die Galvanische Zelle in einem stationären Gleichgewicht, bei denen an beiden Elektroden sich an der Oberfläche jeweils Zink bzw. Kupfer-Ionen in Lösung gebildet haben. Verbindet man allerdings jetzt beide Elektroden durch ein Kabel miteinander, so findet Stromfluß statt, da die Elektronen von der stark negativ aufgeladenen Zinkelektrode abfließen können (siehe Abb. 1.2.5). Diese Elektronen werden durch die Bildung neuer Zink-Ionen nachgeliefert. D.h. die Zinkelektrode *löst sich auf*, und die Ionen wandern zur Kupferelektrode und schließen damit den Stromkreis.

Genau diese Beobachtung machte Galvani (1737-1798), der zwei Elektroden in Kontakt mit einem Froschbein brachte. Der elektrische Strom induzierte Nervenreizungen, die als Bewegung des Froschbeins sichtbar wurden. Alexander von Humboldt hat im 19ten Jahrhundert in Eigenversuchen die Wirkung unterschiedlicher Galvanischer Elemente untersucht, wie sehr anschaulich mit folgendem Zitat dokumentiert ist:

*Zufällig stieß er auf Galvanis Buch über den Strom und die Frösche. Galvani hatte abgetrennte Froschschenkel mit zwei unterschiedlichen Metallen verbunden, und sie hatten gezuckt wie lebendig. Lag das nun an den Schenkeln, in denen noch Lebenskraft war, oder war die Bewegung von außen gekommen, aus dem*

<sup>12</sup>Würde man einen Messfühler in den Elektrolyten halten, so erzeugt man ein neues Galvanisches Element, das diesmal aus einer der ursprünglichen Elektroden und dem Material des Messfühlers selbst gebildet wird.





**Abbildung 1.2.5:** Bei einem Galvanischen Element wird aus einer chemischen Reaktion (hier das Auflösen einer Zinkelektrode) Strom gewonnen.

*Unterschied der Metalle, und von den Froschteilen bloß sichtbar gemacht? Humboldt beschloss es herauszufinden.*

*Er zog sein Hemd aus, legte sich aufs Bett und wies einen Diener an, zwei Aderlaßpflaster auf seinen Rücken zu kleben. Der Diener gehorchte, Humboldts Haut warf zwei große Blasen. Und jetzt solle er die Blasen aufschneiden! Der Diener zögerte, Humboldt mußte laut werden, der Diener nahm ein Skalpell. Es war so scharf, daß der Schnitt kaum schmerzte. Blut tropfte auf den Boden. Humboldt befahl, ein Stück Zink auf eine der Wunden zu legen.*

*Der Diener fragte, ob er Pause machen dürfe, ihm sei nicht wohl. Humboldt bat ihn, sich nicht dumm anzustellen. Als ein Silberstück die zweite Wunde berührte, ging ein schmerzhaftes Pochen durch seine Rückenmuskeln, bis hinauf in den Kopf. Mit zitternder Hand notierte er: Muscularis cucularis, Hinterhauptbein, Stachelfortsätze des Rückenwirbelbeins. Kein Zweifel, hier wirkte Elektrizität. Noch einmal das Silber! Er zählte vier Schläge, in regelmäßigem Abstand, dann wichen die Farben aus den Gegenständen”<sup>13</sup>*

Die Spannung zwischen Metall und Elektrolyt kann nur relativ zueinander gemessen werden. Mit einer wasserstoff-umspülten Platinelektrode als Referenz (d.h. die Bildung von Protonen an der Platinoberfläche wird auf Spannung 0 Volt normiert  $H_2=0$ ) ergeben sich die Spannungsunterschiede von:

<sup>13</sup>aus: Daniel Kehlmann :”Die Vermessung der Welt”, ein Vergleich der Lebensgeschichten von Carl Friedrich Gauß und Alexander von Humboldt.

Li: -3.02 V, Zn: -0.76 eV, Cu: +0.35 V, Au: +1.5 eV

D.h. je *edler* das Metall wird, desto weniger hat es die Tendenz mit einem Elektrolyten zu reagieren.

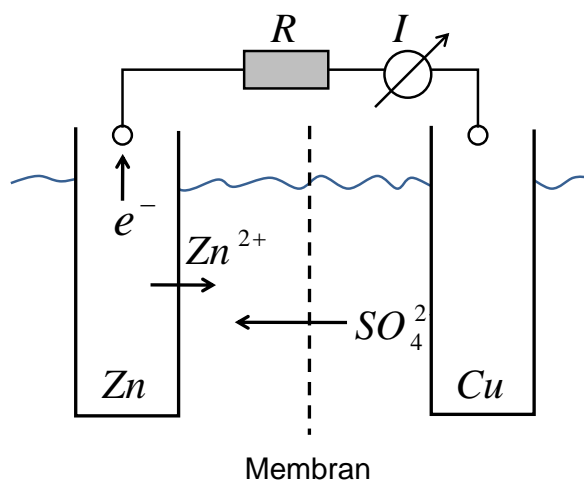
- **Anodisieren, Elektropolieren**

Betrachtet wir ein Galvanisches Element bestehend aus einer Zink und einer Kupferelektrode, so läßt sich das Gleichgewicht zwischen den beiden Elektroden durch das Anlegen einer Spannungsquelle verschieben. Vergrößert man die negative Spannung an der Zinkelektrode, so verbleiben die Zinkionen an der Elektrode und die Kupferionen werden zur Zinkelektrode getrieben. Dabei wird die Zinkelektrode *verkupfert* bzw. die Kupferelektrode *elektropoliert*. Falls man umgekehrt eine stark positive Spannung an die Zinkelektrode anlegt, werden dort Elektronen entnommen und die Zinkelektrode löst sich auf und die Zinkionen wandern zur Kupferelektrode, dabei wird diese *verzinkt* und die Zinkelektrode *elektropoliert*. Den positiven Pol bezeichnet man dabei immer als Anode und den negativen Pol immer als Kathode.

- **Batterie**

Bei einer Batterie entnimmt man einem Galvanischen Element Strom. Dadurch gehen im Fall des Zn-Cu-Elementes verstärkt Zink-Ionen in Lösung, d.h. die Elektrode löst sich auf. Diese Zinkionen schlagen sich auf der Oberfläche der Kupferelektrode nieder. Würde diese vollständig mit Zink bedeckt, ist die Grenzfläche beider Elektroden nur noch durch die chemische Identität von Zink bestimmt, d.h. die Spannungsdifferenz zwischen beiden Elektroden verschwindet. Dieses Versagen der Batterie läßt sich vermeiden, indem man den Ionentransport zwischen den Elektroden limitiert (siehe Abb. 1.2.6): (i) zum einen kann man als Elektrolyt Kupfersulfat ( $\text{CuSO}_4$ ) verwenden. Die Kupfer-Ionen scheiden sich zusammen mit den Zink-Ionen ab und führen zu einer Auffrischung der Kupferelektrode; (ii) alternativ dazu kann man auch Ionenleitermembranen oder Salzbrücken verwenden, die nur Ladungsträger einer bestimmten Sorte durchlassen.

Ein Galvanisches Element im Sinne einer Batterie wird zum Teil unbeabsichtigt erzeugt. Ein Beispiel ist die Verwendung von Wasserleitungen aus zwei unterschiedlichen Materialien, die leitend verbunden sind (Cu-Rohr auf Zn-Rohr). Wenn durch diese Wasserleitung salzhaltiges Wasser fließt, ist der Stromkreis über diesen Elektrolyten geschlossen und das Zinkrohr löst sich entsprechend auf. Allerdings kann dieser Zinkabtrag auch genutzt werden. Beispiel ist hier die Verzinkung von



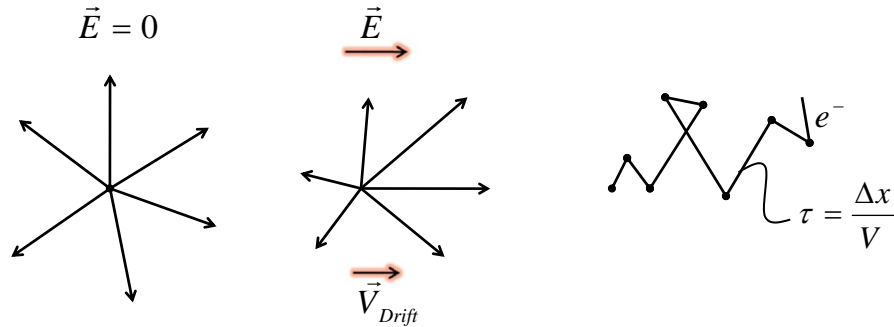
**Abbildung 1.2.6:** Bei einer Batterie wird ein Galvanisches Element zur Stromproduktion genutzt. Eine Membran schützt in diesem Beispiel die Kupferelektrode vor dem Verzinken.

Blechen. Bei einem Schaden in diesem Blech liegt das Eisen frei und bei einem salzhaltigen Elektrolyten löst sich Zink auf und wandert zu dem Eisen in der Fehlstelle. Dabei wird diese Fehlstelle allerdings wieder abgedeckt. D.h. die Verzinkung hat eine *selbst-heilende* Wirkung.

### Das Ohmsche Gesetz

Ladungsträger werden durch elektrische Felder bewegt. Allerdings ist dies zunächst eine beschleunigte Bewegung. Im Gleichgewicht stellt sich eine Bilanz aus Beschleunigung im elektrischen Feld und der Abbremsung der Ladungsträger durch Stöße mit der Umgebung ein. Man spricht von **Drift**. In einem Metall haben die Elektronen zum Beispiel sehr hohe kinetische Energien im Bereich von einigen eV. Die entsprechenden Geschwindigkeitsrichtungen sind allerdings im Raum isotrop verteilt, und die Summe aller Geschwindigkeiten ergibt Null. Überlagert man jetzt ein elektrisches Feld, so wird diese Geschwindigkeitsverteilung leicht anisotrop und es ergibt sich in der Summation genau diese Driftgeschwindigkeit! Dies ist in Abb. 1.2.3 illustriert.

Die Bewegungsgleichung eines Elektrons ergibt sich aus einer Bilanzierung der Beschleunigung in einem äußeren elektrischen Feld und den Stoßprozessen, die dieser entgegen stehen:



**Abbildung 1.2.7:** In einem Metall haben die Elektronen eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung. Legt man ein elektrisches Feld an, so wird diese Verteilung anisotrop und die Summe aller Geschwindigkeiten addiert sich zu einer Driftgeschwindigkeit  $v_{Drift}$ . Im mikroskopischen Sinne finden im Mittel alle  $\tau$  Sekunden Stöße der Elektronen mit den Festkörperatomen statt.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m\vec{v} \frac{1}{\tau} \quad (1.2.7)$$

mit  $\tau$  der Zeitspanne zwischen zwei Stößen eines Elektrons mit Atomen seiner Umgebung. Im Gleichgewicht muß die Zeitableitung auf der linken Seite verschwinden und wir können nach der Geschwindigkeit für diese Drift auflösen:

$$\vec{v}_{Drift} = \frac{q\tau}{m} \vec{E} \quad (1.2.8)$$

Die läßt sich verkürzt schreiben mit der sog. **Beweglichkeit**  $\mu$ :

$$\boxed{\vec{v}_{Drift} = \mu \vec{E}} \quad (1.2.9)$$

Für  $\mu$  gilt:

$$\boxed{\mu = \frac{q\tau}{m}} \quad (1.2.10)$$

Die Stromdichte, die durch ein elektrisches Feld jetzt getrieben wird ist die Ladungsträgerdichte mal Ladung mal der Driftgeschwindigkeit und wir bekommen:

$$\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E} \quad (1.2.11)$$

Auch dies wird kompakter geschrieben mit einer neuen Größe **Leitfähigkeit**  $\sigma$ :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad (1.2.12)$$

mit der Leitfähigkeit als:

$$\boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e}} \quad (1.2.13)$$

Dies bezeichnet man als das **Ohm'sche Gesetz**. Die Leitfähigkeit beschreibt die Fähigkeit eines Materials Strom zu transportieren. Sie besitzt die Einheit  $\text{AV}^{-1}\text{m}^{-1}$  bzw.  $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , wobei die Einheit des Widerstandes in Ohm verwendet wurde ( $\Omega = \text{VA}^{-1}$ ).

Dieser Zusammenhang gilt nur, wenn die Stromdichte und das Feld *linear* miteinander verknüpft sind. In speziellen Fällen ist aber z.B. die Stoßzeit nicht mehr eine Konstante der Bewegung, sondern hängt explizit von der Teilchengeschwindigkeit ab. In diesem Fall ergibt sich ein anderer Zusammenhang zwischen Feld und Strom.

Alternativ zur Leitfähigkeit wird oftmals auch der **spezifische Widerstand** benutzt, der nur dem Kehrwert der spezifischen Leitfähigkeit entspricht.

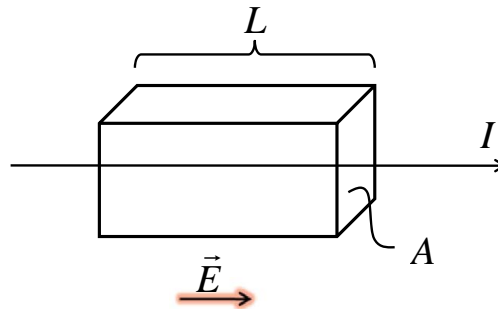
$$\boxed{\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau}} \quad (1.2.14)$$

Die Einheit des spezifischen Widerstandes ist  $\Omega \cdot \text{m}$ . Diese mikroskopische Beschreibung eines elektrischen Widerstandes läßt sich auf einen makroskopischen Zusammenhang zurückführen, wenn man einen einfachen Körper der Länge  $L$  mit einer Querschnittsfläche  $A$  betrachtet, zwischen dessen Enden eine Spannung  $U$  anliegt, wie in Abb. 1.2.8 illustriert. Für diese Geometrie erhält man  $I = jA$  und  $U = LE$  und man kann das Ohmsche Gesetz  $j = \sigma E$  umschreiben zu:

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{U}{L} \quad (1.2.15)$$

Daraus ergibt sich:

$$U = \underbrace{\frac{L}{A\sigma}}_{=R} I \quad (1.2.16)$$



**Abbildung 1.2.8:** Der Strom wird durch ein elektrisches Feld durch einen Körper der Länge  $L$  transportiert.

Mit der neuen Größe des elektrischen **Widerstandes**  $R$  kann man diesen Zusammenhang kompakt als alternative makroskopische Formulierung des Ohm'schen Gesetz bezeichnen:

$$\boxed{U = RI} \quad (1.2.17)$$

Die mittlere Bewegung der Ladungsträger erfolgt mit der Driftgeschwindigkeit. Betrachtet man zum Beispiel Kupfer, an das ein elektrisches Feld in der Größe von  $0.1 \text{ V/m}$  angelegt wird, so ergibt sich eine Driftgeschwindigkeit von  $0.4 \text{ mm s}^{-1}$ . Diese Geschwindigkeit ist viel langsamer als die *isotrope* Geschwindigkeit der Elektronen in der Größe von  $10^6 \text{ ms}^{-1}$  (Fermigeschwindigkeit). Bei dieser Abschätzung würde man eigentlich folgern, daß ein Strompuls eine *sehr lange* Zeit benötigt, um ein Kabel entlang zu laufen. Dem ist nicht so! Erhöhen wir zum Beispiel die Ladungsmenge an einem Ende des Kabels durch das Verbinden mit einer Spannungsquelle, so hat die dortige Änderung der Ladung eine Änderung des elektrischen Feldes in der ganzen Umgebung zur Folge. Diese Information der Feldänderung breitet sich mit *Lichtgeschwindigkeit* aus (virtuelle Photonen). D.h. die Elektronen am hinteren Ende des Kabels merken nahezu sofort, daß am vorderen Ende des Kabels eine Spannungsquelle zugeschaltet wurde. Dementsprechend reagieren sie und beginnen auch sofort zu driften. D.h. der Strompuls breitet sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf dem Kabel aus<sup>14</sup>.

Im folgenden wollen wir den elektrischen Widerstand in einem mikrosko-

<sup>14</sup>Als Analogon wird oftmals eine gefüllte Wasserleitung verwendet, in die man an einem Ende Wasser hinein drückt und das Wasser am anderen Ende sofort herauskommt. Dies suggeriert, daß die Elektronen sich untereinander "anschieben" und dadurch der Stromtransport so schnell stattfindet. Dies ist etwas irreführend, da die Information bei dem Strompuls über Änderung der elektrischen Felder übertragen wird

pischen Sinne betrachten. Der spezifische Widerstand war abgeleitet worden zu:

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau_e} \quad (1.2.18)$$

Man erkennt, daß dieser zum einen von den Dichten der Ladungsträger  $n$  aber auch von der Stoßzeit  $\tau$  der Ladungsträger beim Transport abhängt. Das prinzipielle Verhalten in Abhängigkeit von der Temperatur wird an mehreren Materialien illustriert (siehe Abb. 1.2.9):

- **Metalle**

Bei Metallen steigt der spezifische Widerstand linear mit der Temperatur an, da die Elektronen zunehmend mit den thermischen Schwingungen der Atome im Gitter kollidieren. Die Ladungsträgerdichte ändert sich dabei nicht. Erst bei tiefen Temperaturen wird die Bewegung der Gitteratome so klein, daß sie den Stromtransport nicht mehr beeinflussen können. Dann werden die Elektronen nur noch an Verunreinigungen in dem Material gestreut und der verbleibende Restwiderstand hängt von den Präparationsbedingungen der Probe ab.

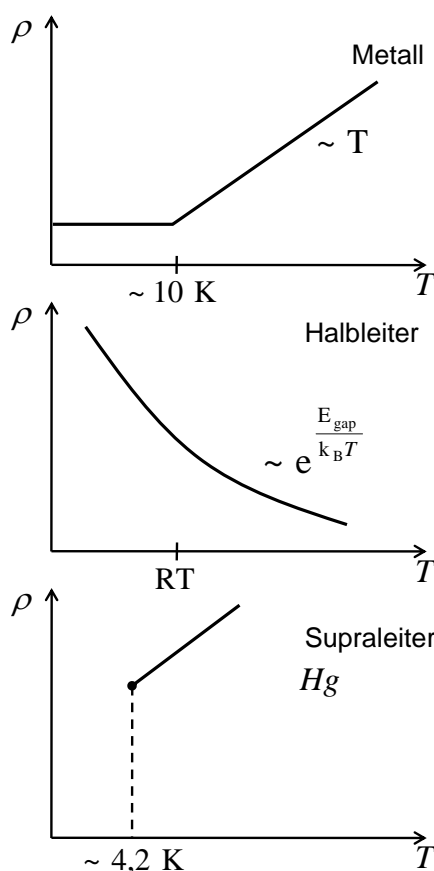
- **Halbleiter**

Halbleiter zeichnen sich dadurch aus, daß sie im Prinzip Isolatoren sind, die aber durch **Dotierung** (Einbringen von Fremdatomen) bzw. durch Erwärmung leitfähig gemacht werden können. Bei einer Temperaturerhöhung werden Elektronen in einen leitenden Zustand oberhalb einer **Bandlücke** angeregt. Die Überwindung dieser Energielücke wird durch ein exponentielles Gesetz beschrieben. Nachdem  $n$  exponentiell mit der Temperatur ansteigt, sinkt der spezifische Widerstand mit steigender Temperatur. Die Temperaturabhängigkeit der Stoßzeit ist dem gegenüber nur ein kleiner Einfluss.

Bei dotierten Halbleiter werden die Elektronen im leitenden Zustand durch die Ionisation der Dotieratome erzeugt, die nur eine kleine Anregungsenergie benötigen. Bei Raumtemperatur sind typischerweise alle Dotieratome in dem Material ionisiert und der spezifische Widerstand bleibt bei dotierten Halbleitern über einen weiten Temperaturbereich konstant.

- **Supraleiter**

Eine besondere Klasse von Materialien sind die sogenannten Supraleiter bei denen der spezifische Widerstand unterhalb einer **Sprungtemperatur** exakt verschwindet. Dieses Quantenphänomen wurde zuerst bei



**Abbildung 1.2.9:** Beispiele für die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes von Metallen, Halbleitern und Supraleitern.

Quecksilber beobachtet, das unterhalb von 4.2 K supraleitend wird. Inzwischen sind viele Materialien entdeckt worden, die supraleitend werden mit Sprungtemperaturen von bis zu 100 K. Bei der Supraleitung bilden die Elektronen sog. **Cooper-Paare**, die gemeinsam den Strom tragen. Durch diese Paarbildung ändert sich die Quantenstatistik (Fermi-Statistik für ein einzelnes Elektron, Bose-Einstein-Statistik für Elektronenpaare) und die Elektronenpaare können als Quasiteilchen einen makroskopischen Quantenzustand besetzen. Diese Paarbildung erfolgt durch eine Kopplung der Elektronen durch eine Wechselwirkung, die durch Gitterschwingungen vermittelt wird (Ein erstes Elektron verformt das Gitter, was ein zweites Elektron "sieht"). Ein großer Beitrag an Gitterschwingungen ist eigentlich charakteristisch für Substanzen, die im normal leitenden Zustand sehr schlechte Leiter



sind. D.h. bei der Suche nach neuen effizienten Supraleitern sollte man diejenigen Materialien untersuchen, die bei hohen Temperaturen gute Isolatoren sind! Diese einfache Faustregel berücksichtigt noch nicht, das einige Hochtemperatursupraleiter zusätzlich durch ihre Dotierung leitfähig sein können.

Als Beispiel für die Anwendung des Stromes als eine Änderung der Ladung mit der Zeit und dem Einfluss eines elektrischen Widerstandes wollen wir einen sehr einfachen Schaltkreis betrachten (siehe Abb. 1.2.10). Dieser besteht aus einem Kondensator, der von einer Spannungsquelle mit der Spannung  $U_0$  über einen Widerstand aufgeladen wird. Der Strom der fließt ist:

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC} \quad (1.2.19)$$

Wenn wir beide Seiten nach der Zeit ableiten, so bekommen wir:

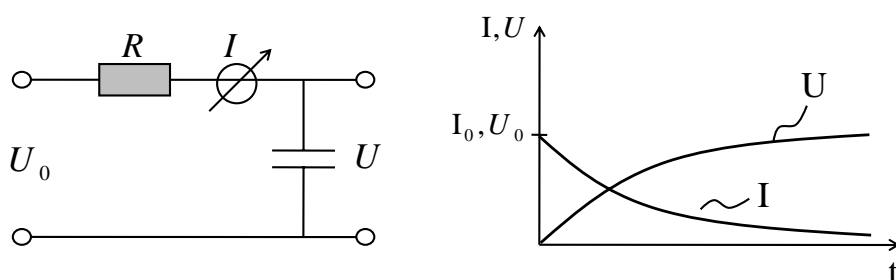
$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} I(t) \quad (1.2.20)$$

Diese Differentialgleichung läßt sich lösen zu

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.2.21)$$

Setzt man diese Lösung in Gl. 1.2.19 ein, so ergibt sich die Zeitabhängigkeit der Spannung zu:

$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (1.2.22)$$

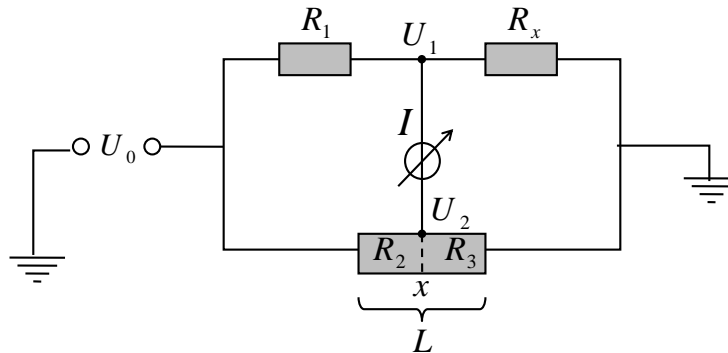


**Abbildung 1.2.10:** Die Änderung von Strom- und Spannung beim Laden eines Kondensators.

Die Verläufe von Strom und Spannung sind in Abb. 1.2.10 illustriert. Man erkennt, daß der Strom beim Laden kontinuierlich absinkt, während

die Spannung anwächst und schließlich den Wert  $U_0$  der Spannungsquelle erreicht. Die Zeitkonstante für die Strom- und Spannungsänderung ist durch den Term  $RC$  gegeben.

Widerstände lassen sich auf unterschiedliche Art und Weise vermessen. Eine sehr effiziente Methode ist die Verwendung einer **Brückenschaltung**, bei der eine empfindliche Vergleichsmessung von mehreren Widerständen durchgeführt wird. Betrachten wir den Stromkreis, der in Abb 1.2.11 illustriert ist. Der Strom kann auf zwei Zweigen über die Widerstände  $R_1$  und  $R_x$ , sowie über  $R_2$  und  $R_3$  abfließen. Der unbekannte Widerstand sei  $R_x$ . Die einzelnen Widerstände sollen so bemessen sein, daß in der Verbindung der zwei Zweige kein Strom fließt, d.h. die Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  müssen gleich sein. Der Strom  $I_{oben}$ , der über den oberen Zweig fließt, ergibt:



**Abbildung 1.2.11:** Messung von Widerständen über eine Wheatston' sche Brückenschaltung.

$$I_{oben} = \frac{U_0}{R_1 + R_x} = \frac{U_1}{R_x} \quad (1.2.23)$$

woraus man bekommt:

$$U_1 = U_0 \frac{R_x}{R_1 + R_x} \quad (1.2.24)$$

D.h. die Spannung  $U_0$  wird gemäß dem Anteil der beiden Widerstände geteilt und man bekommt in der Mitte die Spannung  $U_1$ . Ein solche Anordnung bezeichnet man als **Spannungsteiler**.

Der Strom  $I_{unten}$  im unteren Zweig ist

$$I_{unten} = \frac{U_0}{R_2 + R_3} = \frac{U_2}{R_3} \quad (1.2.25)$$

woraus man bekommt:

$$U_2 = U_0 \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (1.2.26)$$

Damit der Strom zwischen den beiden Zweigen, wie oben postuliert, verschwindet, muß  $U_1 = U_2$  gelten und es ergibt sich:

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2} \quad (1.2.27)$$

In der Praxis wird dies durch einen variablen Widerstand realisiert. Durch einen Mittelabgriff am Ort  $x$  auf einem kontinuierlich sich ändernden Widerstand der Länge  $L$ , kann das Verhältnis  $R_2$  zu  $R_3$  verändert werden kann. Mit  $R_2/R_3 = x/(L - x)$  ergibt sich somit:

$$R_x = R_1 \frac{L - x}{x} \quad (1.2.28)$$

### Die elektrische Leistung

Bei dem Transport einer Ladung  $Q$  wird Arbeit verrichtet. Setzt man diesen Transport in Relation zur benötigten Zeit, erhält man die damit verbundene Leistung. Betrachten wir eine Strecke vom Punkt  $P_1$  zu einem Punkt  $P_2$ , über die eine Spannung  $U$  abfällt und über die ein Strom  $I$  getrieben wird. Die Arbeit, die dabei geleistet wird ist:

$$W = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \quad (1.2.29)$$

$$= Q \int_{P_1}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} - Q \int_{P_2}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} \quad (1.2.30)$$

$$= Q (\phi(P_1) - \phi(P_2)) = QU \quad (1.2.31)$$

Die Zeitableitung der Arbeit liefert die Leistung gemäß:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \frac{dQ}{dt} U = UI} \quad (1.2.32)$$

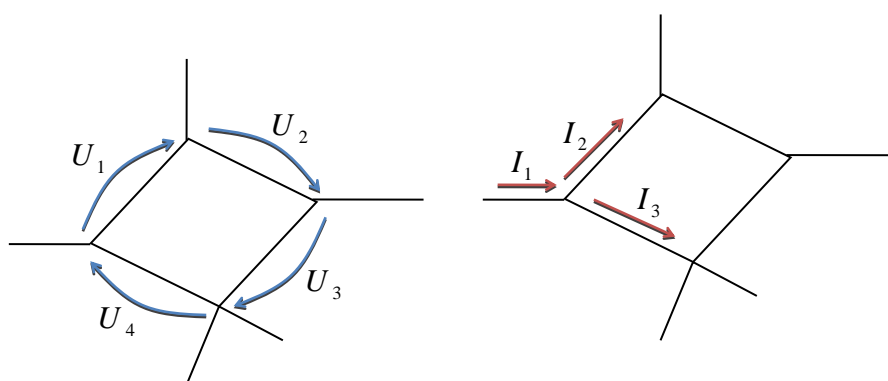
mit  $U = RI$  ergibt sich:

$$\boxed{P = I^2 R = \frac{U^2}{R}} \quad (1.2.33)$$

## 1.2.2 Netzwerke

### Kirchhoff'sche Regeln

Eine Anordnung von elektrischen Leitern mit darin befindlichen elektrischen Bauteilen (Widerstände, Kondensatoren, Induktivitäten) kann man allgemein als **Netzwerk** bezeichnen. Für die Spannungen und Ströme in einem solchen Netzwerk gelten die Kirchhoff'schen Gesetze, wie in Abb. 1.2.12 illustriert.



**Abbildung 1.2.12:** Die Summe der Spannung in einer Masche muß Null ergeben. Die Summe aller Ströme an einem Knoten muß Null ergeben.

Zunächst gilt es auf allen Verbindungslinien die jeweiligen Ströme mit ihren Richtungen einzutragen, sowie die Spannungen, die zwischen benachbarten Knoten abfallen. Auch hier gibt man eine Richtung vor. Wenn man bei der Analyse des Netzwerks für diese Unbekannten einen negativen Wert bekommt, so muß der Strom in die andere Richtung wie zunächst definiert laufen bzw. die Polarität des Spannungsabfalls dreht sich um.

- **1. Kirchhoffsche Regel - Knotenregel**

Bei einem Knoten in diesem Netzwerk laufen mehrere Leiter an einem Punkt zusammen. Wegen der Ladungserhaltung muß die Bilanz der Ströme, die zu diesem Knoten hin- bzw. von ihm abfließen ausgeglichen sein. Dies läßt sich als Gleichung formulieren gemäß

$$\boxed{\sum_i I_i = 0} \quad (1.2.34)$$

Wobei man die Ströme die zu einem Knoten hinfließen bzw. die einen Knoten verlassen mit unterschiedlichem Vorzeichen ansetzt.

- **2. Kirchhoffsche Regel - Maschenregel**

In einem Netzwerk kann man allerdings auch eine Masche verfolgen, wie in Abb. 1.2.12. Nachdem das elektrische Potential an einem Punkt eindeutig ist, muß die Summe der Spannungsdifferenzen zwischen einzelnen Knoten, die man addiert, wenn man in einer Masche einmal umläuft gleich Null sein:

$$\boxed{\sum_k U_k = 0} \quad (1.2.35)$$

Bei dieser Summation zählen wir alle Spannungen positiv bei denen wir entlang der zuerst definierten Richtung die Masche durchlaufen. wenn wir entgegen des ursprünglichen Sinnes die Spannung durchlaufen, zählen wir diese negativ.

Falls wir eine Masche mit einer Spannungsquelle betrachten, muß die Summe der Spannungen die abfallen, die von außen angelegte Spannung ergeben:

$$\sum_k U_k = U_0 \quad (1.2.36)$$

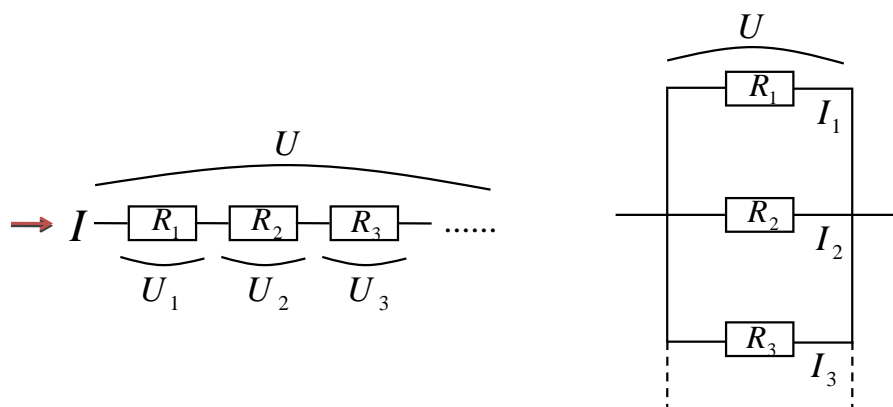
Als Beispiel für die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze wollen wir die möglichen Verschaltungen von Widerständen betrachten, wie in Abb. 1.2.13 illustriert:

- **Serienschaltung**

Bei der Serienschaltung werden Widerstände hintereinander geschaltet. Die Knoten entsprechen jetzt den Punkten zwischen den Widerständen. An jedem Knoten läuft ein Strom ein und verläßt ihn wieder. Aus der Knotenregel kann man sofort schließen, daß der Strom in der ganzen Anordnung gleich sein muß. Dieser Strom durch jeden Widerstand  $I$  ist nach dem Ohmschen Gesetz mit der Spannung verknüpft, die über ihn abfällt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} = \dots \quad (1.2.37)$$

Nach der Maschenregel bilden wir die Summe aller Spannungen die zwischen den Knoten abfallen, die zusammen die von außen angelegte Spannung  $U$  ergeben muß. D.h. man kann sofort setzen



**Abbildung 1.2.13:** Serien- und Parallelschaltung von Widerständen.

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \dots = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots) I \quad (1.2.38)$$

und erhält als Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  der Anordnung:

$$R_{ges,seriell} = \sum_i R_i \quad (1.2.39)$$

### • Parallelschaltung

Bei einer Parallelschaltung laufen die Widerstände jeweils auf beiden Seiten an einem einzigen Knoten zusammen. Dementsprechend muß der Spannungsabfall nach der Maschenregel für alle Widerstände gleich sein.

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = \dots \quad (1.2.40)$$

Der Gesamtstrom  $I$ , der in die Knoten hineinfließt verteilt sich aber jetzt auf die Parallelwiderstände:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (1.2.41)$$

Der Strom, der durch jeden einzelnen Widerstand fließt ist durch den Spannungsabfall  $U$  und den jeweiligen Widerstand gegeben:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \right) U \quad (1.2.42)$$

Daraus ergibt sich eine Gesamtwiderstand  $R_{ges}$  der Anordnung von:

$$\boxed{\frac{1}{R_{ges,parallel}} = \sum_i \frac{1}{R_i}} \quad (1.2.43)$$

Zur Berechnung der Ströme und Spannungen in einem beliebigen Netzwerk durchläuft man folgende Schritte:

- Einzeichnen der Ströme und Spannungen auf jeder Verbindungsgeraden mittels eines Pfeils. Die Richtung kann beliebig gewählt werden.
- Anwenden der Knotenregel, wobei Ströme die zu einem Knoten hin zeigen addiert und die von ihm weg zeigen subtrahiert werden.
- Anwenden der Maschenregel indem man eine Masche in einem beliebigen Sinn durchläuft. Spannungspfeile, die in dieselbe Richtung zeigen wie der Umlaufsinn werden addiert und die in die entgegengesetzte Richtung zeigen werden subtrahiert. Diese Summe ist gleich einer externe Spannungsquelle, falls vorhanden.
- Für jedes Bauteil wie Widerstand  $R$ , Kapazität  $C$  oder Induktivität  $L$  (siehe unten) auf einer Verbindungsgeraden werden die Verknüpfungen zwischen Strom und Spannung angewendet.
- Es entstehen genauso viele Gleichungen wie unbekannte Ströme und Spannungen. Wenn bei der Lösung dieses Gleichungssystems ein negativer Wert für einen Strom oder eine Spannung herauskommt, bedeutet dies nur das der Strom in umgekehrter Richtung zum eingezeichneten Pfeil fließt bzw. die Spannung in die dem Pfeil entgegen gesetzte Richtung abfällt.

## 1.3 Magnetostatik

Bislang hatten wir die Kraft betrachtet, die *ruhende* Ladungen aufeinander ausüben, die **Coloumb-Kraft**. Im folgenden wollen wir den Fall betrachten, daß sich diese Ladungen relativ zueinander *bewegen* können. Es tritt eine neue Kraft auf, die **Lorenz-Kraft**. Ursache dieser Kraft sind Magnetfelder.

### 1.3.1 Magnetismus

Magnetismus ist ein bekanntes Naturphänomen. Zunächst waren Gesteine bekannt, die je nach Orientierung untereinander eine anziehende oder abstoßende Wirkung haben. Man bezeichnet sie als **Magnete**. Die an- bzw. abstoßende Wirkung eines solchen Permanentmagneten wird durch **Pole** ausgedrückt. Wobei eine Seite des Magneten als **Nordpol** die andere als **Südpol** bezeichnet wird. Die Kraftwirkung ergibt sich gemäß der Regel:

- Gleichnamige Pole stoßen sich ab.
- Ungleichnamige Pole ziehen sich an.

Die Stärke dieser Kraftwirkung kann man wieder mit einem Feld, dem Magnetfeld ausdrücken (siehe Abb. 1.3.1). Per Konvention, treten die Linien eines Magnetfeldes am Nordpol aus dem Körper *heraus*, während sie am **Südpol** in den Körper *eintreten*. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes. Es gilt<sup>15</sup>:

*Magnetfeldlinien sind immer geschlossen*

Dies ist im Unterschied zu den Feldlinien elektrischer Felder, die von einer positiven zu einer negativen Ladung laufen und dort enden<sup>16</sup>

Wie später noch gezeigt wird, werden Magnetfelder durch bewegte Ladungen erzeugt. In einem Permanentmagneten sind dies zum Beispiel die geordneten Bewegungen der Elektronen in jedem Festkörperatom. Aber auch stromdurchflossene Leitungen üben Kräfte aufeinander aus.

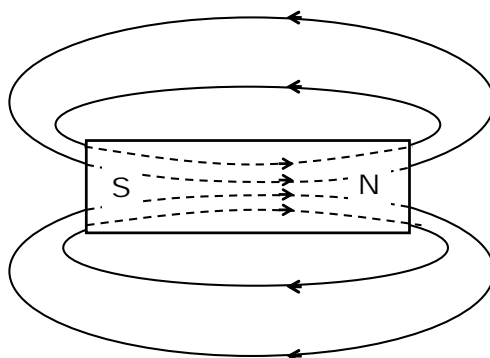
Magnetfelder werden in der Einheit **Tesla** gemessen wobei gilt:

---

<sup>15</sup>Es lassen sich mathematische Spezialfälle konstruieren in denen Feldlinien auch ins Unendliche gehen, bzw. aus diesem kommen. Beispiel wäre die Feldlinie auf der z-Achse eines stromdurchflossenen Ringes, oder eine verdrehte Feldlinie in einem Tokamak mit einer nicht rationalen Verscherung (siehe Skript Plasmaphysik). Dies sind allerdings akademische Beispiele. In einem endlichen Universum ist die Betrachtung von Feldlinien, die immer geschlossene sein müssen, ein sehr tragfähiges Bild.

<sup>16</sup>Oftmals wird gesagt, daß Magnetfeldlinien vom Nordpol zum Südpol laufen. Dies ist irreführend, da es suggeriert, daß Magnetfeldlinien einen Anfang und ein Ende besitzen. Demist nicht so. Die Magnetfeldlinien schließen sich im Innern des Magneten.





**Abbildung 1.3.1:** Magnetfeld eines Permanentmagneten. Die Feldlinien treten am Nordpol aus dem Material heraus und am Südpol wieder hinein. Im Innern sind sie geschlossen.

$$1 \text{ Tesla} = 1 \text{ NC}^{-1}\text{m}^{-1}\text{s}$$

Eine ältere Einheit ist *Gauss* mit  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ .

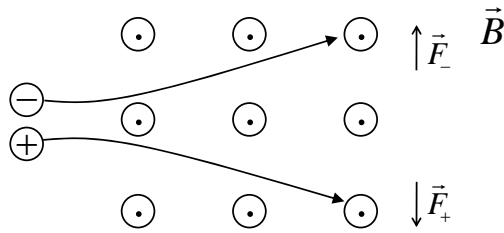
Das bekannteste Magnetfeld ist das der Erde. Im Innern des flüssigen Erdkerns bewegen sich Gesteinsmassen durch Konvektion getrieben. Diese sind teilweise geladen und entsprechen somit neben dem Material- auch einem Stromtransport; ein Magnetfeld entsteht. Die Tatsache, daß ein Planet ein Magnetfeld besitzt ist somit Ausdruck seines flüssigen Kerns! Dieses Erdmagnetfeld hat große Bedeutung. Es schirmt die Erde vor dem Einfluss der einfallenden Teilchen des Sonnenwindes ab, die im magnetischen Feld der Erde abgelenkt werden.

### 1.3.2 Bewegung einer Ladung im Magnetfeld

Das Vorhandensein von Magnetfeldern wird an der Kraftwirkung auf sich *bewegende* Ladungen sichtbar. Betrachten wir eine Ladung  $q$ , die sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}$  senkrecht zu einem Magnetfeld  $\vec{B}$  bewegt, wie in Abb. 1.3.2 illustriert. Man beobachtet eine Kraftwirkung, die senkrecht zur Geschwindigkeit als auch zum Magnetfeld orientiert ist. Die Richtung dieser Kraft hängt vom Vorzeichen der Ladung ab.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.3.1)$$

Dies bezeichnet man als **Lorentz-Kraft**. Zusammen mit der Coloumbkraft für die Ladung in einem elektrischen Feld läßt sich der allgemeine Ausdruck ableiten von:

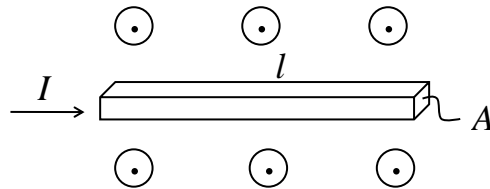


**Abbildung 1.3.2:** Bewegung einer Ladung in einem Magnetfeld  $B$ .

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.3.2)$$

Die Kraftwirkung auf eine einzelne Ladung läßt sich verallgemeinern auf einen stromdurchflossenen Leiter mit einem Querschnitt  $A$  und einer Länge  $l$ , wie in Abb. 1.3.3 illustriert. Der Strom  $I$  durch diesen Leiter ist:

$$I = nqvA \quad (1.3.3)$$



**Abbildung 1.3.3:** Lorentzkraft auf einen stromdurchflossenen Leiter.

Auf jede Ladung wirkt die Lorentzkraft. Mit einer Dichte  $n$  an Ladungsträger ergibt diese Kraft im Volumen  $A \cdot l$ :

$$\vec{F} = nq \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) Al \quad (1.3.4)$$

Dies läßt sich verkürzen zu:

$$\vec{F} = I \left( \vec{l} \times \vec{B} \right) \quad (1.3.5)$$

Wenn wir mit  $\vec{l}$  die Stromrichtung und Länge des Leiters bezeichnen.

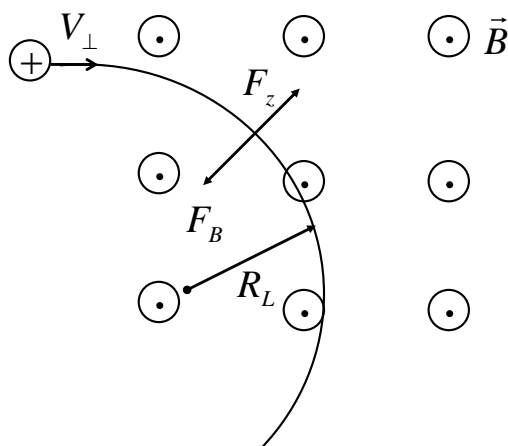
Betrachten wir im folgenden die Bewegung eines geladenen Teilchens senkrecht zum Magnetfeld, das sich mit der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  bewegt.

Durch die Kraft senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung durchläuft es eine Kreisbahn, die sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Lorentzkraft und Fliehkraft ergibt (siehe Abb. 1.3.4):

$$qv_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{R} \quad (1.3.6)$$

Den Radius dieser Kreisbahn bezeichnet man **Larmorradius**  $R_L$  mit:

$$R_L = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (1.3.7)$$



**Abbildung 1.3.4:** Gyrationbewegung eines Teilchens im Magnetfeld.

Die Zeit, die ein Teilchen für einen Umlauf benötigt ist  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}$ . Daraus ergibt sich die Umlauffrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_{\perp}}{R}$  von:

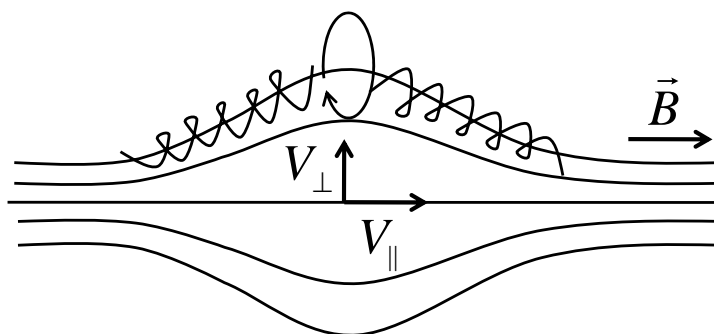
$$\omega_z = \frac{qB}{m} \quad (1.3.8)$$

Dies bezeichnet man als **Zyklotronfrequenz**. Man erkennt, daß diese Zyklotronfrequenz *unabhängig* vom Radius der Kreisbahn ist. Falls sich das Teilchen parallel zum magnetischen Feld bewegt erfährt es keine Kraft und bewegt sich demnach gleichförmig. Insgesamt ergibt sich eine Bewegung in der das Teilchen um die Magnetfeldlinien **gyriert** und sich das Zentrum der Kreisbahn entlang der Magnetfeldlinien bewegt.

Die Bewegung von geladenen Teilchen in Magnetfeldern hat zahlreiche Anwendungen:

- **Magnetische Flasche**

Eine sog. magnetische Flasche beschreibt eine Anordnung in der ein Magnetfeld zu den Enden hin jeweils stärker wird, wie durch die Magnetfeldlinien in Abb. 1.3.5 angedeutet ist.



**Abbildung 1.3.5:** In einer magnetischen Flasche bleiben Teilchen gefangen, da sich fortlaufend die Geschwindigkeitskomponenten parallel und senkrecht zum Magnetfeld austauschen.

Ein eingeschlossenes Teilchen gyriert um die Magnetfeldlinien. Die Frequenz ist durch die Zyklotronfrequenz  $\omega_z$  gegeben. In der Mitte der Flasche bei kleinem Magnetfeld ist sie klein, zu den Rändern hin ist sie groß.

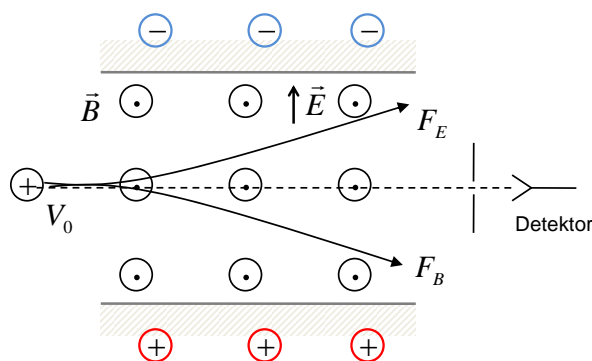
Bei der Bewegung des Teilchens durch diese Anordnung ändern sich allerdings die Anteile an der Geschwindigkeit parallel und senkrecht zum Magnetfeld. In der Mitte der Anordnung ist die Geschwindigkeit parallel  $v_{\parallel}$  maximal, während an den Enden die Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  maximal wird. Die kinetische Energie insgesamt ändert sich dabei allerdings nicht! Dies ist sofort einsichtig, wenn man bedenkt, daß die Lorentzkraft immer senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt. D.h. sie kann den Impuls ändern aber nicht den Betrag der Geschwindigkeit! Nachdem bei dieser Bewegung zu den Enden hin der parallele Anteil an der Geschwindigkeit in den senkrechten umgewandelt wird, kann das Teilchen in paralleler Richtung zum Stillstand kommen und kehrt schließlich seine Richtung um. Es *oszilliert* in dieser magnetischen Flasche zwischen den Enden hin und her und bleibt eingeschlossen. Dies wird als Teilchenfalle für Ionen bzw. Plasmen genutzt. Eine genaue Analyse der Bewegung zeigt, daß die Größe

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B} \quad (1.3.9)$$

bei dieser Bewegung eine Konstante ist<sup>17</sup>.

- **Wienfilter**

Eine Kombination aus elektrischem und magnetischen Feld läßt sich als Geschwindigkeitsfilter von Teilchen nutzen, dem **Wienfilter**. Hierzu durchläuft ein Teilchen der Ladung  $q$  einen Bereich mit gekreuztem elektrischem und magnetischem Feld, wie in Abb. 1.3.6 illustriert ist. Aus dem Kräftegleichgewicht sieht man sofort, daß das Teilchen dann *geradlinig* durch die Anordnung tritt, wenn gilt:



**Abbildung 1.3.6:** In einem Wienfilter passiert ein Teilchen ein gekreuztes elektrisches und magnetisches Feld.

$$qE = qvB \quad (1.3.10)$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeit des Teilchens zu:

$$v = \frac{E}{B} \quad (1.3.11)$$

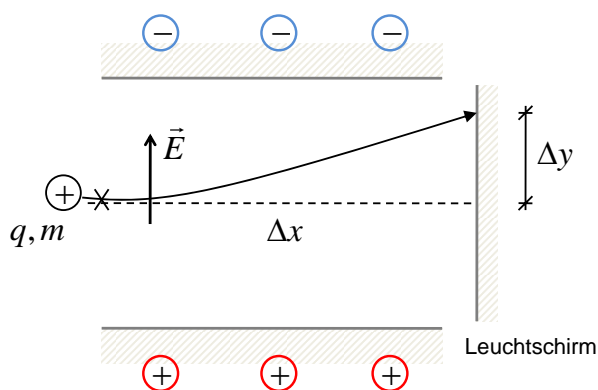
Man erkennt, daß dies unabhängig von der Ladung und der Masse des Teilchens ist. Hinter der Anordnung werden über eine Blende nur diejenigen Teilchen aufgesammelt, die geradlinig durch die Anordnung fliegen. Man variiert das elektrische Feld bei konstantem Magnetfeld

<sup>17</sup>Details hierzu im Skript "Einführung in die Plasmaphysik" unter dem Stichwort adiabatische Invarianten.

solange bis dieses Signal maximiert ist. Aus dem Wert des E-Feldes läßt sich dann die Geschwindigkeit ableiten.

- **Thomson-Experiment zur Bestimmung von  $q/m$**

Mit der Anordnung eines Wienfilter läßt sich auch elegant das Verhältnis aus Ladung zu Masse eines Teilchens bestimmen. Hierzu verwendet man einen Wienfilter und bestimmt zunächst die Geschwindigkeit des Teilchens  $v_0$ . Anschließend schaltet man das Magnetfeld aus und beobachtet die Ablenkung des Teilchens im elektrischen Feld (siehe Abb. 1.3.7). Die Beschleunigung in  $y$ -Richtung läßt sich aus der Bewegungsgleichung ableiten:



**Abbildung 1.3.7:** Thomson-Experimente zur Bestimmung von  $q/m$  eines Teilchens.

$$v_y = a_y t = \frac{qE_y}{m} t \quad (1.3.12)$$

bzw.

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{qE_y}{2m} t^2 \quad (1.3.13)$$

mit  $t = \frac{\Delta x}{v_0}$  ergibt sich schließlich:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_y \left( \frac{\Delta x}{v_0} \right)^2 \quad (1.3.14)$$

wenn wir mit  $\Delta x$  die Wegstrecke entlang der Flugbahn und mit  $\Delta y$ , die Ablenkung nach dem Durchtritt durch die Anordnung bezeichnen.

Nachdem  $v_0$ ,  $\Delta x$  und  $E_y$  bekannt sind, kann man aus einer Messung von  $\Delta y$ , das Verhältnis  $q/m$  des unbekanntes Teilchens ermitteln.

- **Aston'sches Massenspektrometer**

Ein weiteres empfindliches Verfahren zur Bestimmung von  $q/m$  ist das Massenspektrometer nach Aston. Hierzu wird ein Teilchen zunächst in eine Strecke gemäß der Spannung  $U$  auf eine Geschwindigkeit  $v_0$  beschleunigt und in ein Magnetfeld eingeschossen. Es durchläuft dort eine Kreisbahn mit dem Radius:

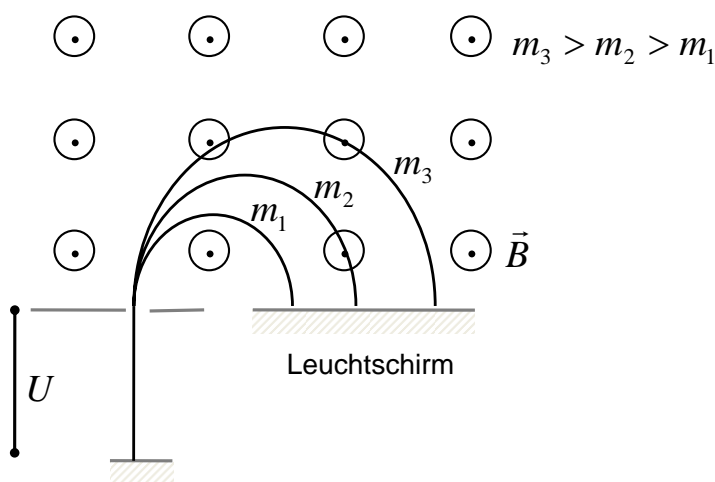


Abbildung 1.3.8: Massenspektrometer.

$$r = \frac{mv_0}{qB} \quad (1.3.15)$$

Die Geschwindigkeit  $v_0$  ergibt sich zu:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = qU \quad (1.3.16)$$

Damit ergibt sich für das Verhältnis aus Masse zu Ladung:

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2U} \quad (1.3.17)$$

Schwere Massen durchlaufen somit einen großen Radius und erzeugen auf einem Leuchtschirm einen Leuchtpunkt an einem anderen Ort als Teilchen kleinerer Masse.

- **Zyklotron-Beschleuniger**

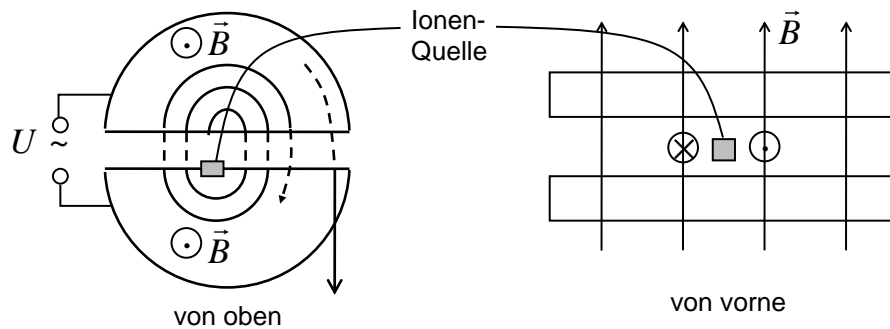
Der Umstand, daß die Zyklotronfrequenz unabhängig vom Radius der Kreisbahn ist macht man sich bei einem **Zyklotron-Beschleuniger** zunutze (siehe Abb. 1.3.9). Dieser besteht aus einem runden Plattenkondensator, der in der Mitte geteilt ist. Es entstehen zwei Hälften mit zwei jeweils gegenüberliegenden Halbkreisen. Im Zwischenraum des geteilten Plattenkondensators bewegt sich ein Teilchen senkrecht zu einem äußeren Magnetfeld. Zwischen den getrennten Hälften wird jetzt eine Wechselspannung angelegt. Die Frequenz  $\omega_U$  dieser Spannung ist genau auf die Zyklotronfrequenz  $\omega_z$  eingestellt, so daß die Teilchen jeweils beim Durchtritt durch den Spalt eine beschleunigende Spannung "sehen"<sup>18</sup>.

$$\omega_U = \omega_z = \frac{qB}{m} \quad (1.3.18)$$

mit

$$T = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} = \text{const.} \quad (1.3.19)$$

Dadurch erhöht sich zweimal pro Umlauf die Geschwindigkeit und der Radius der Kreisbahn vergrößert sich. Die Teilchen durchlaufen eine Spiralbahn nach außen.



**Abbildung 1.3.9:** In einem Zyklotron wird ein Teilchen mittels einer Wechselspannung der Frequenz  $\omega_z$  beschleunigt.

<sup>18</sup>Nachdem das elektrische Feld nur zwischen den beiden getrennten Hälften des Plattenkondensators wirkt aber nicht innerhalb, kann das Teilchen in der "falschen" Halbwelle nicht wieder abgebremst werden.



Auf dem größten Radius ist ein kleiner Ablenkkondensator, der die Teilchen aus dem Zyklotron heraus schleust.

### 1.3.3 Halleffekt

Die Ablenkung von Ladungsträgern in einem elektrischen Feld läßt sich auch einfach an einem stromdurchflossenen Festkörper beobachten. Betrachten wir einen Körper durch den Ladungsträger laufen, der sich in einem Magnetfeld befindet. Durch die Lorentzkraft werden die Ladungsträger abgelenkt und es bildet sich an der Oberfläche parallel zur Stromrichtung ein Ladungsüberschuß. Dadurch entsteht ein elektrisches Feld quer zur Richtung des Stromes. Diese Aufladung steigt solange bis ein Gleichgewicht wie in einem Wienfilter entsteht:

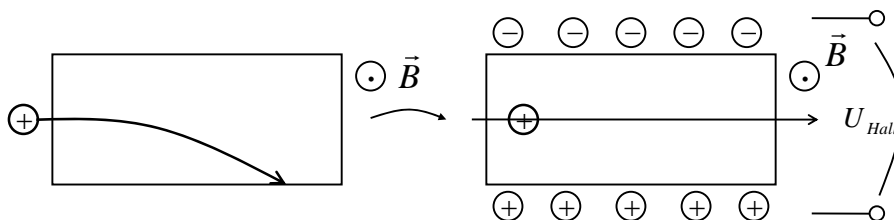


Abbildung 1.3.10: Halleffekt.

$$qvB = qE \quad (1.3.20)$$

Die Aufladung ist gleichbedeutend mit einer Spannung, die extern gemessen werden kann, der sog. **Hallspannung**. Wenn wir die Querausdehnung des Festkörpers mit  $b$  bezeichnen bekommen wir mit  $U_H = bE$ :

$$U_{Hall} = v_{Drift} B b \quad (1.3.21)$$

Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist die Driftgeschwindigkeit des Stromes  $I$ :

$$I = qv_{Drift} n A \quad (1.3.22)$$

Die Querschnittsfläche  $A$  ist gegeben als  $A = bd$  mit  $d$  der Breite des Festkörpers. Setzen wir dies ein, so bekommen wir einen Zusammenhang zwischen Hallspannung und dem Strom durch die Anordnung von:

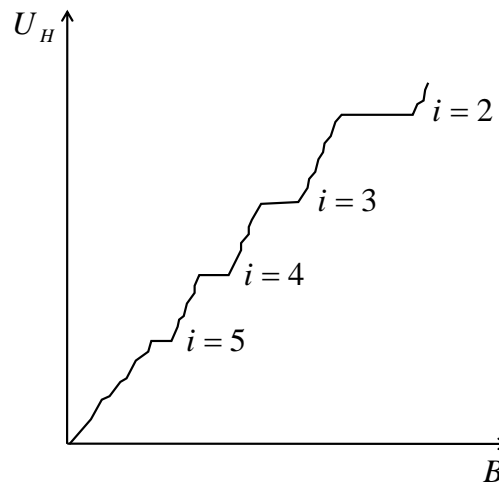
$$U_{Hall} = -\frac{B}{nde} I \quad (1.3.23)$$

Hier haben wir  $q = -e$  gesetzt, da wir den Transport von Elektronen betrachten. Dies ähnelt formal dem Ohmschen Gesetz. Man bezeichnet die Proportionalitätskonstante als **Hallwiderstand**:

$$R_{Hall} = -\frac{B}{nde} \quad (1.3.24)$$

Es gilt zu beachten, daß dieser Widerstand im Gegensatz zum Ohmschen Gesetz eine Spannungsdifferenz und einen Strom verknüpft die *senkrecht* zueinander stehen. Mit der Messung eines Hallwiderstandes läßt sich empfindlich ein Magnetfeld vermessen. Man bezeichnet ein solches Messgerät als **Hallsonde**.

Bei einer Messung des Halleffekt bei sehr tiefen Temperaturen macht man die zunächst überraschende Beobachtung, daß das Verhältnis zwischen Hallspannung und Magnetfeld keine lineare Funktion mehr ist, sondern bei diskreten Werten für  $R_{Hall}$  Stufen auftreten. Dies abzeichnet man als **Quanten-Halleffekt**.



**Abbildung 1.3.11:** Beim Quanten-Halleffekt beobachtet man keinen linearen sondern einen treppen-förmigen Anstieg der Hallspannung mit dem externen Magnetfeld.

$$R_{Hall} = -\frac{R_k}{i} \quad (1.3.25)$$

Mit  $R_k = 25812.807 \Omega = \frac{h}{e^2}$  Beim Quanten-Halleffekt wird die Quantisierung der Bewegung der Elektronen in einem Magnetfeld sichtbar. Ein Elektron auf seiner Kreisbahn wird hierbei als Welle aufgefasst, die auf einer

Kreisbahn nur bestimmte Wellenlängen annehmen kann. Dies äußert sich in einer Diskretisierung des Transports senkrecht zum Magnetfeld und damit auch als ein diskreter Hallwiderstand<sup>19</sup>. Diese Quantisierung wird als Eichstandard für die Vermessung von Widerständen verwendet.

### 1.3.4 Das magnetische Moment

Betrachten wir im folgenden einen stromdurchflossenen Rechteck in einem magnetischen Feld, wie in Abb. 1.3.12 illustriert. Betrachten wir dieses Rechteck von der Seite, so wirkt die Lorentzkraft auf die einzelnen Leiterbahnen der Länge  $l$  gemäß.

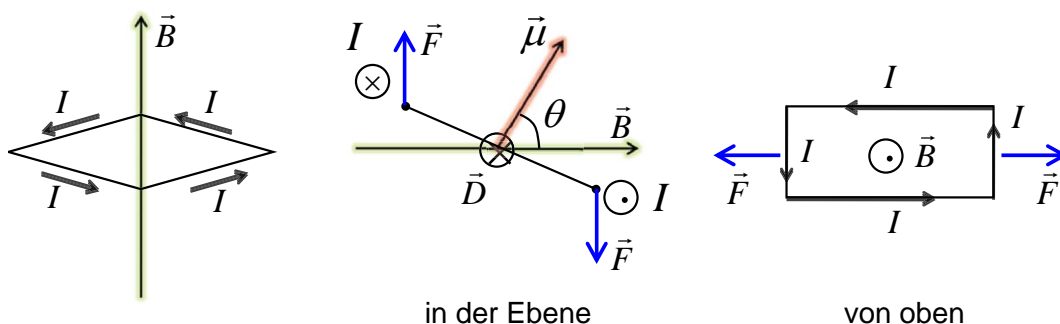


Abbildung 1.3.12: Drehmoment auf eine Leiterschleife.

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.3.26)$$

Nachdem alle Richtungen senkrecht aufeinander stehen kann man auch schreiben  $F = IlB$ . Es entsteht ein Drehmoment mit einem Hebel, der durch die Breite  $b$  gegeben ist von:

$$D = I \sin \theta b l |B| \quad (1.3.27)$$

Hierbei bezeichnet  $\theta$  den Winkel der Flächennormale des Rechtecks zum Magnetfeld. Mit der Definition des magnetischen Moment  $\mu$  als dem Strom  $I$  mal umflossener Fläche  $A = bl$ :

$$\mu = IA \quad (1.3.28)$$

bekommen wir schließlich einen allgemeinen Ausdruck von:

<sup>19</sup>Mehr hierzu im Skript Physik IV.

$$\boxed{\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}} \quad (1.3.29)$$

Die potentielle Energie des magnetischen Dipols läßt sich wieder aus der Arbeit  $dW$  bei einer Winkeländerung  $d\theta$  ableiten

$$dW = -|\vec{D}|d\theta \quad (1.3.30)$$

Wenn wir die Arbeit betrachten, die wir leisten müssen um das magnetische Moment um einen Winkel  $\theta$  zu drehen und  $dE_{pot} = -dW$  setzen, so bekommen wir:

$$E_{pot} = \int_0^\theta I \sin \theta b |l| |B| d\theta \quad (1.3.31)$$

Dies läßt sich kompakt schreiben als:

$$\boxed{E_{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}} \quad (1.3.32)$$

Die Existenz eines magnetischen Dipols für einen gegebene Körper ist immer Ausdruck der Existenz von bewegten Ladungen. Berühmtes Beispiel ist ein Neutron, das zwar elektrisch neutral ist, aber ein magnetische Moment trägt. D.h. es kann *kein* elementares Teilchen, sondern muß aus weiteren Bestandteilen zusammen gesetzt sein. Im Fall des Neutron ist dies ein Proton und ein Elektron.

### 1.3.5 Berechnung von Magnetfeldern

Bislang hatten wir die Bewegung von Ladungsträgern in einem gegebenen äußeren magnetischen Feld betrachtet. Doch wie werden diese Magnetfelder erzeugt?

#### Das Gesetz von Biot-Savart

Ströme erzeugen Magnetfelder. Auf empirische Weise haben Biot und Savart ermittelt, daß ein stromdurchflossener Draht ein Magnetfeld gemäß folgender Formel erzeugt:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}} \quad (1.3.33)$$

Hierbei bezeichnet der Vektor  $\vec{r}$  den Verbindungsvektor zwischen dem stromdurchflossenen Leiterstück  $d\vec{l}$  und dem Ort an dem das Magnetfeld bestimmt werden soll.

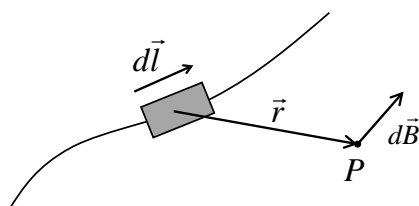


Abbildung 1.3.13: Biot-Savart Gesetz.

Das Magnetfeld das eine einzelne, sich mit  $\vec{v}$  bewegendene Punktladung, erzeugt, ergibt den analogen Ausdruck:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.3.34)$$

Die Proportionalitätskonstante ist:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{TmA}^{-1} \quad (1.3.35)$$

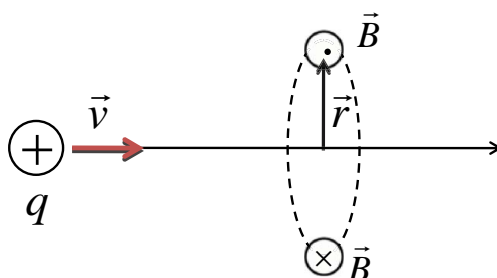


Abbildung 1.3.14: Magnetfeld einer bewegten Punktladung.

Für die Orientierung des Magnetfeldes wird die **Rechte-Hand-Regel** verwendet, wobei der Daumen die Stromrichtung und die anderen Finger die Richtung des Magnetfeldes angeben.

Im folgenden wollen wir das Biot-Savart Gesetz für die Berechnung der Magnetfelder einiger Anordnungen verwenden:

- **Magnetfeld eines geraden Leiters**

Betrachten wir einen Leiter durch den ein Strom  $I$  fließt und ermitteln wir im folgenden das Magnetfeld im Abstand  $r_0$ . Aus der rechten-Hand-Regel schließt man sofort, daß das Magnetfeld kreisförmig um

den Leiter verläuft. Ein einzelnes Leiterstück  $d\vec{l}$  erzeugt einen Beitrag am Magnetfeld  $d\vec{B}$  von:

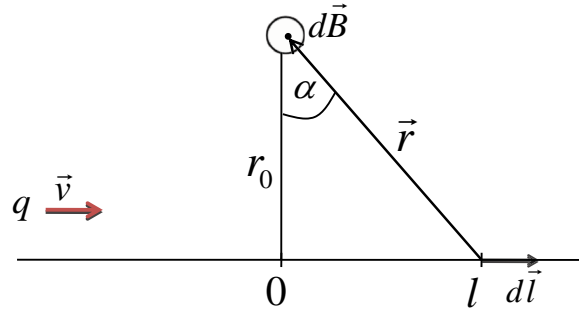


Abbildung 1.3.15: Magnetfeld eines geraden Leiters.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{|r|^3} d\vec{l} \times \vec{r} \quad (1.3.36)$$

Das Kreuzprodukt aus  $d\vec{l}$  und Verbindungsvektor  $\vec{r}$  läßt sich durch den Winkel  $\alpha$  ausdrücken von:

$$|d\vec{l} \times \vec{r}| = dl|r| \sin(\pi/2 + \alpha) = dl|r| \cos \alpha \quad (1.3.37)$$

Das gesamte Magnetfeld erhalten wir, wenn wir über den ganzen Leiter integrieren.

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{|r|^2} dl \cos \alpha \quad (1.3.38)$$

Das Integral über  $l$  wird in eines über den Winkel  $\alpha$  umgewandelt mit  $|r| = r_0 \frac{1}{\cos \alpha}$  und  $l = r_0 \tan \alpha$  bzw.  $dl = r_0 \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

und wir bekommen:

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi r_0} I \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I \quad (1.3.39)$$

D.h. das Magnetfeld fällt mit  $1/r$  gegenüber dem Leiter ab.

$$\boxed{B_{\text{Leiter}} = \frac{\mu_0}{2\pi r_0} I} \quad (1.3.40)$$

Dies ist analog zur Abhängigkeit des elektrischen Feldes eines geladenen Leiters.

Mit diesem Ausdruck können wir jetzt die Kraft zwischen zwei parallelen Leitern im Abstand  $r$  berechnen. Die Kraft auf einen Leiter 2 in dem ein Strom  $I_2$  fließt durch das Magnetfeld  $B_1$  des anderen Leiters 1 ist gegeben als:

$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1 \quad (1.3.41)$$

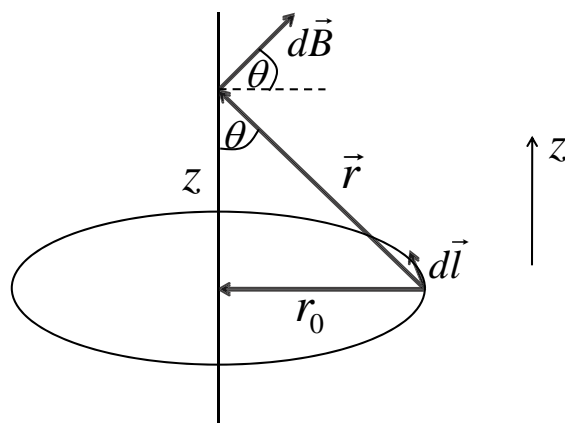
Wir setzen das Magnetfeld ein und bekommen für den Betrag der Kraft:

$$F_2 = \mu_0 I_1 I_2 \frac{l}{2\pi r} \quad (1.3.42)$$

Aus der vektoriellen Ausrichtung der Ströme und den entsprechenden Magnetfeldern können wir folgern: (i) zwei parallele Leiter in denen der Strom in die gleiche Richtung fließt ziehen sich an; (ii) zwei parallele Leiter in denen der Strom in die entgegengesetzte Richtung fließt, stoßen sich ab.

- **Magnetfeld eines stromdurchflossenen Rings**

Betrachten wir einen stromdurchflossenen Ring, wie in Abb. 1.3.16 illustriert.



**Abbildung 1.3.16:** Magnetfeld einer Ringes.

Der Anteil am Magnetfeld auf der Achse des Ringes im Abstand  $z$  ist gegeben als:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{|r|^3} d\vec{l} \times \vec{r} \quad (1.3.43)$$

In dieser Anordnung stehen  $d\vec{l}$  und  $\vec{r}$  *immer* senkrecht aufeinander. Allerdings mitteln sich die Anteile in die x- und y-Richtung zum Magnetfeld heraus, wenn wir einmal um den Ring integrieren. D.h. der Anteil in z-Richtung ergibt sich allein zu:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{|r|^2} dl \sin \theta \quad (1.3.44)$$

mit  $r^2 = r_0^2 + z^2$  und  $\sin \theta = \frac{r_0}{r}$  ergibt sich:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{r_0}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} dl \quad (1.3.45)$$

Die Integration über die Koordinate  $l$  entlang des Umfangs der Leiterschleife ergibt  $2\pi r_0$  und man bekommt:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi r_0^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.3.46)$$

mit  $z \gg l$  und dem magnetischen Moment  $\mu = I\pi r_0^2$  ergibt sich schließlich:

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{z^3}} \quad (1.3.47)$$

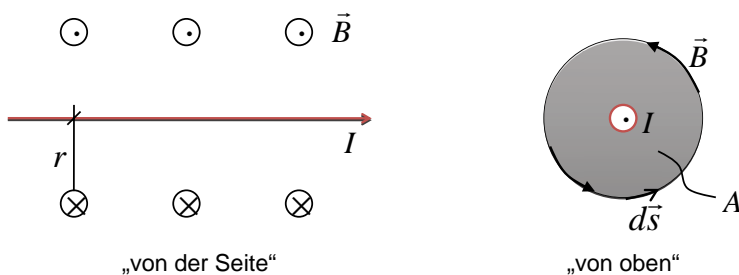
### Das Ampere'sche Gesetz

Bislang wurden magnetische Felder mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart berechnet. Allerdings existiert auch eine elegante Methode, die aus dem **Ampere'schen Gesetz** abgeleitet werden kann:

$$\boxed{\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I} \quad (1.3.48)$$

Es verknüpft ein geschlossenes Linienintegral über das Magnetfeld am Rand einer Fläche mit dem Strom, der durch diese Fläche tritt. Mit  $I = \int_{Fläche} \vec{j} d\vec{A}$  ergibt sich:





**Abbildung 1.3.17:** Das Ampere'sche Gesetz verknüpft ein Linienintegral über das Magnetfeld mit dem Strom durch die umschlossene Fläche.

$$\oint_{\text{Umfang}} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_{\text{Fläche}} \vec{j} d\vec{A} \quad (1.3.49)$$

Mi dieser Formulierung wollen wir jetzt das Magnetfeld einiger Anordnungen bestimmen.

- **Magnetfeld eines geraden Leiters**

Bei einem geraden Leiter wählen wir eine kreisförmige Fläche mit Radius  $r$ , die den Leiter umschließt durch den ein Strom  $I$  fließt.

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \quad (1.3.50)$$

Daraus ergibt sich mit

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad (1.3.51)$$

schließlich das magnetische Feld zu:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1.3.52)$$

Die Richtung von Strom und Magnetfeld sind wieder über die rechte-Hand-Regel verknüpft.

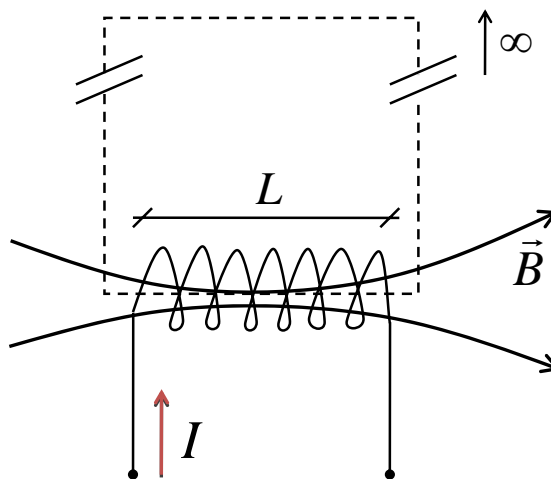
- **Magnetfeld einer langen Spule**

Betrachten wir eine Spule der Länge  $L$ , die  $N$  Windungen besitzt. Wie konstruieren einen Weg, der durch die Spule führt und im Unendlichen

wieder geschlossen wird. Dieser Weg umfasst die  $N$  Leiter, durch die jeweils ein Strom  $I$  fließt. D.h. wir bekommen:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 N I \quad (1.3.53)$$

Das Magnetfeld im Unendlichen ist Null, d.h. dieser Beitrag zu dem Wegintegral verschwindet. Betrachtet man den Grenzfall einer unendlichen langen Spule und führt den Weg zwischen den einzelnen Windungen der Spule ins Unendliche, so steht dort das Magnetfeld senkrecht zum Weg von der Spule ins Unendliche und für das Skalarprodukt auf diesem Wegstück gilt  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ . D.h. der einzige Beitrag entsteht durch das Wegstück im Innern der Spule. Damit wird das Integral zu:



**Abbildung 1.3.18:** Zur Berechnung des Magnetfeldes im Innern einer Spule wird ein Weg gewählt der im Aussen Raum im Unendlichen geschlossen wird.

$$BL = \mu_0 N I \quad (1.3.54)$$

und wir bekommen das Magnetfeld im Innern einer Spule von:

$$B_{\text{Spule}} = \mu_0 I \frac{N}{L} \quad (1.3.55)$$

Man sieht, daß man analog zum Gauß'schen Satz in der Elektrostatik, mit dem Ampere'schen Gesetz eine schnelle Rechenvorschrift erhält um Magnetfelder zu berechnen. Aber auch hier gilt, daß diese Methode nur im Fall

einer einfachen Symmetrie effizient ist. Für allgemeine Fälle wird das Gesetz von Biot-Savart verwendet.

Wir wollen jetzt noch eine differentielle Form des Ampere'sche Gesetzes entwickeln, das in seiner integralen Form lautete:

$$\oint_{Umfang} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_{Fläche} \vec{j} d\vec{A} \quad (1.3.56)$$

Mit dem **Satz von Stokes** läßt sich ganz allgemein ein Linienintegral über einen geschlossenen Weg in einem Vektorfeld mit einem Flächenintegral über die umschlossene Fläche verknüpfen gemäß:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_{Fläche} \mathbf{rot} \vec{B} d\vec{A} \quad (1.3.57)$$

Die sog. Rotation **rot** bezeichnet den Ausdruck:

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (1.3.58)$$

Sie ist ein Maß für die **Wirbeldichte** in einem Feld. Dies kann man mit einem mechanischen Analogon verstehen. Wenn man die Geschwindigkeiten von Wasserteilchen in einem Becken über einen geschlossenen Weg integriert und in der Summe nicht Null heraus bekommt, so muß sich die Wassermenge im Kreis bewegen. D.h. ein Wirbel liegt vor. Mit dem Satz von Stokes verknüpfen wir das Linienintegral über das Magnetfeld mit dem Flächenintegral über die Stromdichte und bekommen:

$$\int_{Fläche} \mathbf{rot} \vec{B} d\vec{A} = \mu_0 \int_{Fläche} \vec{j} d\vec{A} \quad (1.3.59)$$

Daraus wird:

$$\boxed{\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \quad (1.3.60)$$

D.h. die Ströme sind die Quellen der Wirbel des Magnetfeldes. Am Beispiel des Magnetfeldes eines geraden Leiters wird dies anschaulich: die Magnetfeldlinien umschließen diesen Leiter in der Form eines Wirbels!

Es läßt sich zudem noch eine weitere Eigenschaft von Magnetfeldern in differentieller Form ausdrücken: wir betrachten zunächst den **magnetischen Fluß**  $\Phi_{mag}$ , der das Integral des Magnetfeldes über eine Fläche  $A$  angibt. Ganz allgemein gilt:

$$\boxed{\Phi_{mag} = \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{A}} \quad (1.3.61)$$

Betrachten wir jetzt eine Oberfläche eines eingeschlossenen Volumens, das von einem magnetischen Feld erfüllt ist. Das Integral über diese Oberfläche entspricht dem "Zählen der Feldlinien" wie es bei der Benutzung des Gauß'schen Satzes in der Elektrostatik schon eingeführt wurde. Nachdem magnetische Feldlinien *immer geschlossen* sein, treten genauso viele Magnetfeldlinien durch die Fläche in das Volumen *hinein* wie *heraus*. D.h. der magnetische Fuß über die geschlossene Oberfläche muß Null ergeben:

$$\Phi_{mag} = \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (1.3.62)$$

Mit dem Gauß'schen Satz:

$$\int_{Fläche} \vec{B} d\vec{A} = \int_{Volumen} \operatorname{div} \vec{B} dV \quad (1.3.63)$$

läßt sich dieser integrale Zusammenhang wieder in eine differentielle Form bringen und man bekommt:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (1.3.64)$$

Als letztes Element wollen wir noch, unter Verwendung des Satz von Stokes, eine differentielle Form für Wirbel in elektrischen Feldern ableiten. In der Elektrostatik betrachten wir ein konservatives Kraftfeld für das gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (1.3.65)$$

Dieses Linienintegral läßt sich wieder in ein Flächenintegral umwandeln gemäß:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \int_{Fläche} \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{A} = 0 \quad (1.3.66)$$

D.h. es muß gelten:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0} \quad (1.3.67)$$

Man sieht, daß das elektrische Feld in der Elektrostatik keine Wirbel besitzt! Dies ist eine direkte Folge der Tatsache, daß es sich um ein konservatives Feld handelt.

Die Beziehungen zwischen Ladungen, Ströme und elektrischen und magnetischen Feldern in der Elektro- und Magnetostatik lassen sich jetzt sehr kompakt darstellen als:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.3.68)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.3.69)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.3.70)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.3.71)$$

Dies bezeichnet man als **Maxwellgleichungen** der *Elektro- und Magnetostatik*. Die ersten beiden Gleichungen bleiben auch bei zeitabhängigen Feldern gültig, während die dritte und vierte Gleichung erweitert werden müssen, wie unten noch gezeigt wird.

Man kann diese Gleichungen auch mit Worten umschreiben: die Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes, während das Magnetfeld frei von Quellen ist. Das elektrische Feld ist wirbelfrei, während Ströme, die Wirbel im magnetischen Feld erzeugen.

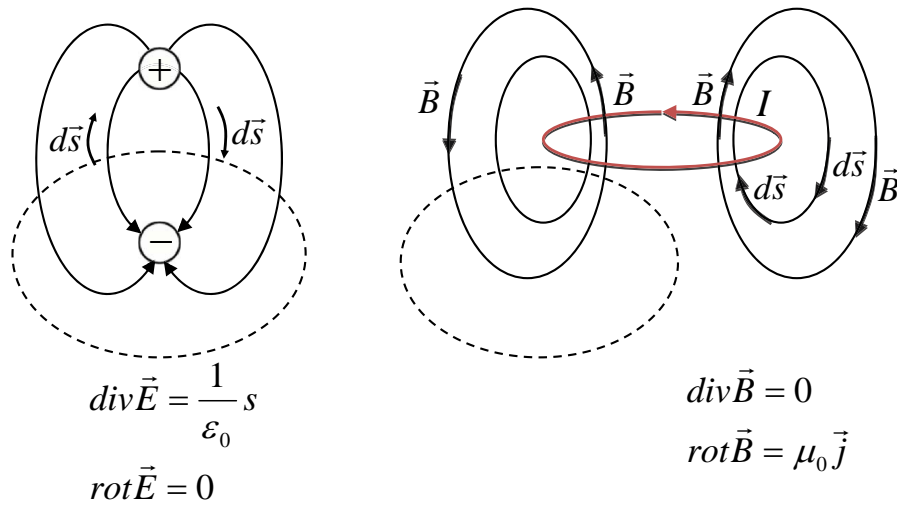
Die Maxwellgleichungen der Elektro- bzw. Magnetostatik wollen wir am Beispiel eines elektrischen und magnetischen Dipols noch einmal illustrieren (siehe Abb. 1.3.19): (i) bei einem elektrischen Dipol gilt  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ , die positive und negative Ladung sind Quellen des elektrischen Feldes und die Feldlinien beginnen bei der positiven und enden bei der negativen Ladung. Weiterhin gilt  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  bzw. in integraler Form  $\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$ . Wir integrieren von der positiven zur negativen Ladung und wieder zurück. Bei einem dieser Wegstücke integrieren wir *entgegen* der Feldlinienrichtung und das Integral wird Null. (ii) Bei einem magnetischen Dipol sind die Feldlinien geschlossen und es gilt immer  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ . D.h. wir integrieren entlang einer Feldlinie immer entlang von  $\vec{B}$  und somit muß das Integral Null ergeben. Zudem gilt  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  d.h. das Magnetfeld wird durch eine Stromdichte  $\vec{j}$  erzeugt.

### Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Dipolen

Als eine Anwendung der Berechnung von Magnetfeldern wollen wir die Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Dipolen für einen sehr einfachen Fall ableiten, wie er in Abb. 1.3.20 illustriert ist.

Das Magnetfeld eines Dipols  $\mu_1$  am Ursprung, der in z-Richtung orientiert ist, ist auf der z-Achse gegeben als:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu_1}{z^3} \quad (1.3.72)$$



**Abbildung 1.3.19:** Vergleich zwischen einem elektrischen und einem magnetischen Dipol.

Die Kraft auf einen zweiten Dipol  $\mu_2$ , der auch in z-Richtung orientiert ist und sich im Abstand  $z$  vom ersten befindet ist gegeben als.

$$F_z = \mu_2 \operatorname{grad} B_z = \mu_{2,z} \frac{\partial}{\partial z} B_z \quad (1.3.73)$$

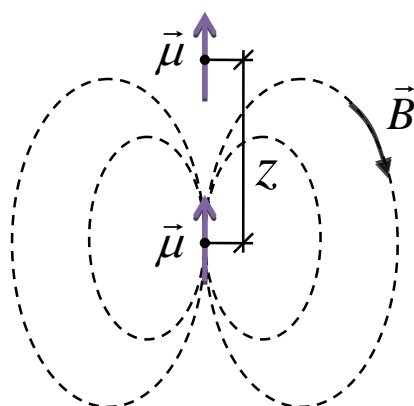
Daraus ergibt sich die Kraft zwischen den zwei Dipolen zu:

$$F_z = -\mu_1 \mu_2 \frac{6\mu_0}{4\pi} \frac{1}{z^4} \quad (1.3.74)$$

Man erkennt eine  $z^{-4}$  Abhängigkeit der Kraftwirkung. Dies ist identisch zur Kraftwirkung zwischen zwei *elektrischen* Dipolen. Die Kraftwirkung zwischen zwei *elektrischen* Monopolen, sprich unterschiedlichen Ladungen, wird durch das Coloumb-Gesetz beschrieben, das einer Abhängigkeit  $1/r^2$  folgt. Ein gleichwertiges Gesetz gibt es in der Magnetostatik nicht, da keine *magnetischen Monopole* existieren!

### 1.3.6 Verknüpfung von magnetischen und elektrischen Feldern (Vertiefung)

Bislang haben wir die Kraftwirkung von ruhenden Ladungen und von sich bewegenden Ladungen getrennt voneinander betrachtet. Für zwei ruhende Ladungen im Abstand  $r$  voneinander bekommen wir:



**Abbildung 1.3.20:** Wechselwirkung zwischen zwei magnetischen Dipolen.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.3.75)$$

Während zwei Leiter der Länge  $L$  im Abstand  $r$  zueinander folgende Kraft aufeinander ausüben.

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \frac{L}{r} \quad (1.3.76)$$

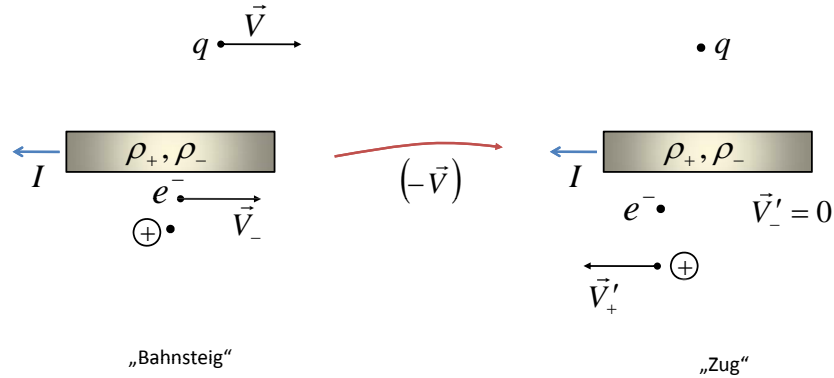
Die Tatsache, daß sich die Ladung bewegt kann doch aber nur von der Wahl des Bezugssystemes abhängen! D.h. wenn wir uns mit der Geschwindigkeit der Elektronen in zwei parallelen Leitern mit bewegen, so müssten diese doch ruhen? Entsteht dann eine elektrostatische Wirkung? Dies soll im folgenden erörtert werden in dem wir die Transformationsvorschriften der speziellen Relativitätstheorie bemühen.

Wir betrachten einen Draht durch den ein Strom  $I$  fließt, der von Elektronen getragen wird. Im Abstand  $r$  befindet sich eine Ladung  $q$ , die sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegt. Im folgenden betrachten wir zwei Bezugssysteme: "Bahnsteig" und "Zug" aus.

- **Draht in Ruhe, Bezugssystem "Bahnsteig"**

Der Draht sei in Ruhe und die Ladung  $q$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , die identisch zur Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_-$  der Elektronen in dem Draht ist. Die Ionen in dem Draht sind in Ruhe. Wir wollen dieses Bezugssystem als "Bahnsteig" bezeichnen.

Der Strom im Draht wird durch Elektronen der Dichte  $\rho_-$  getragen.



**Abbildung 1.3.21:** Ladung im Abstand von einem stromdurchflossenen Draht betrachtet in zwei Bezugssystemen. In einem wirkt nur eine magnetische Kraft während im anderen nur eine elektrische Kraft wirkt.

$$I = \rho_- A v_- \quad (1.3.77)$$

Für die Ladungsdichte in dem Draht der Länge  $L$  und Querschnittsfläche  $A$  gilt:

$$\rho = \frac{Q}{LA} \quad (1.3.78)$$

In diesem Beispiel ist die Dichte der positiven  $\rho_+$  und negativen Ladungen  $\rho_-$  in dem Draht gleich. Da er elektrisch neutral ist wirkt *nur* eine magnetische Kraft auf die bewegte Ladung  $q$ :

$$F = qBv = q\mu_0 \frac{I}{2\pi r} v \quad (1.3.79)$$

- **Ladung in Ruhe, Bezugssystem "Zug"**

Jetzt gehen wir in ein bewegtes Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  entlang des Drahtes bewegt. D.h wir beobachten den Draht auf dem Bahnsteig vom fahrenden "Zug" aus. Damit ruht jetzt die Ladung  $q$  in unserem Bezugssystem und eine magnetische Kraft kann nicht mehr auftreten! Welche Kraft wird beobachtet?

Die Dichte im System "Bahnsteig" war



$$\rho = \frac{Q}{LA} \quad (1.3.80)$$

Im System "Zug" sehen wir jetzt allerdings die positiven Ladungsträger sich mit der Geschwindigkeit  $-\vec{v}$  bewegen. D.h. wenn wir die positive Ladungsdichte berechnen wollen, die der Beobachter im Zug wahrnimmt, so muß er die Längenkontraktion für  $L$  berücksichtigen. D.h. der Beobachter im System "Zug" sieht eine Ladungsdichte  $\rho'_+$  gemäß:

$$\rho'_+ = \frac{Q}{L'A} = \frac{Q}{LA\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rho_+ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.3.81)$$

Für die Betrachtung der Ladungsträgerdichte der Elektronen im bewegten System "Zug" haben wir allerdings den umgekehrten Fall, da sich die Elektronen im System "Bahnsteig" bewegen im System Zug aber ruhen. D.h. wir müssen die Längenkontraktion umdrehen und bekommen:

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.3.82)$$

Durch die unterschiedlichen Transformationen der Längen für die positiven wie für die negativen Ladungsträger bekommen wir eine *Nettoladung* pro Länge des Drahtes, die nur der Beobachter aus dem Zug so wahrnimmt<sup>20</sup>. Diese Nettoladung pro Länge des Drahtes ist:

$$\rho' = \rho'_+ - \rho'_- = \rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.3.83)$$

Diese erzeugt im Bezugssystem "Zug" ein elektrisches Feld  $E'$  von

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (1.3.84)$$

das eine Kraft  $F'$  auf die Ladung  $q$  ausübt von:

---

<sup>20</sup>Dabei werden keine *neuen* Ladungen erzeugt, sondern die räumliche Verteilung der Ladungsträger ändert sich für den Beobachter im Zug. Dies ist analog zu einem elektrischen Dipol: bei einem Abstand der beiden Ladungen von  $d = 0$  heben sich die Ladungen exakt auf und es entsteht kein elektrisches Feld; verschiebt man allerdings die Ladungen räumlich gegeneinander, so entsteht das elektrische Dipolfeld.

$$F' = qE' = q\rho_+ \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{A}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (1.3.85)$$

mit  $I = \rho_+ Av$  ergibt sich:

$$F' = q\mu_0 \frac{Iv}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon_0} \quad (1.3.86)$$

Wir postulieren, daß der Zusammenhang

$$\boxed{\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0} \quad (1.3.87)$$

gilt. Damit erhalten wir als Verknüpfung der magnetischen Kraft  $F$  im Bezugssystem "Bahnsteig" zur elektrischen Kraft  $F'$  im Bezugssystem "Zug", den Ausdruck:

$$F' = F \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma F \quad (1.3.88)$$

Eine Forderung der speziellen Relativitätstheorie war es, daß in allen *Inertialsystemen* die Gesetze der Physik identisch sein sollen unabhängig vom Standpunkt des Beobachters. D.h. wenn wir zum Beispiel die Impulserhaltung betrachten, so soll der Beobachter im Zug, wie auf dem Bahnsteig zu demselben Ergebnis kommen. D.h. die Impulsänderung durch eine Kraft im System Zug die Beobachter wahrnimmt ist gegeben als:

$$dp' = F' dt' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt' \quad (1.3.89)$$

Für die Umrechnung der Zeitspanne  $dt$  im Bezugssystem "Bahnsteig" in  $dt'$  in dem bewegten System "Zug" müssen wir noch die Zeitdilatation benutzen und bekommen:

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.3.90)$$

Damit bekommen wir

$$dp' = F' dt' = \frac{F}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = F dt = dp \quad (1.3.91)$$

D.h. die Impulsänderung, die beide Beobachter wahrnehmen ist *identisch*. Diese Übereinstimmung war nur möglich, weil wir den Zusammenhang 1.3.87 gefordert haben.

Man erkennt, daß sich ein magnetisches in ein elektrisches Feld umwandeln läßt und umgekehrt, je nach Standpunkt des Beobachters. D.h. das elektrische und magnetische Feld sind Ausdruck derselben Wechselwirkung. Man spricht deshalb auch von **elektromagnetischer Wechselwirkung**.

Mit der Verknüpfung der Kräfte zwischen dem Bezugssystem "Bahnsteig" und "Zug" lassen sich jetzt auch Regeln ableiten, wie elektrische und magnetische Felder abhängig vom Bezugssystem ineinander überführt werden können. Für zwei Ladungen  $q$ , die sich in einem Abstand zueinander beide in x-Richtung mit der Geschwindigkeit  $v_x$  bewegen, gilt die Beziehung zwischen dem Bezugssystem "Bahnsteig" (ungestrichen) und dem Bezugssystem "Zug" (gestrichen):

$$F'_x = F_x \quad (1.3.92)$$

$$F'_y = \gamma F_y \quad (1.3.93)$$

$$F'_z = \gamma F_z \quad (1.3.94)$$

mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Die Kräfte, die jemand auf dem Bahnsteig zwischen den bewegten Ladungen beobachtet, sind:

$$F_x = qE_x \quad (1.3.95)$$

$$F_y = q(E_y - v_x B_z) \quad (1.3.96)$$

$$F_z = q(E_z + v_x B_y) \quad (1.3.97)$$

Der Beobachter im Bezugssystem "Zug" bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v = v_x$  mit den Ladungen mit und sieht daher nur ein elektrisches Feld:

$$F'_x = qE'_x \quad (1.3.98)$$

$$F'_y = qE'_y \quad (1.3.99)$$

$$F'_z = qE'_z \quad (1.3.100)$$

Mit der Umwandlungsvorschrift Gl. 1.3.92, 1.3.93 und 1.3.94 für die Kräfte, lassen sich jetzt Beziehungen zwischen den Feldern in dem gestrichenen und ungestrichenen System ableiten. Für die elektrischen Felder gilt:

$$E_x = E'_x \quad (1.3.101)$$

$$E_y = \gamma (E'_y + v_x B'_z) \quad (1.3.102)$$

$$E_z = \gamma (E'_z - v_x B'_y) \quad (1.3.103)$$

Für die magnetischen Felder gilt:

$$B_x = B'_x \quad (1.3.104)$$

$$B_y = \gamma \left( B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) \quad (1.3.105)$$

$$B_z = \gamma \left( B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y \right) \quad (1.3.106)$$

### 1.3.7 Materie im Magnetfeld

Analog zu den Dielektrika, wollen wir im folgenden Materie in einem äußeren Magnetfeld betrachten. Dieses externe Magnetfeld kann magnetische Momente in dem Material *induzieren*, oder vorhandenen magnetische Momente in dem äußeren Feld *ausrichten*.

#### Magnetische Momente, Magnetisierung, Suszeptibilität

Ein magnetisches Moment ist definiert als das Produkt aus Strom mal der umflossenen Fläche  $A$ :

$$\vec{\mu} = I \vec{A} \quad (1.3.107)$$

In einem äußeren Magnetfeld erfährt dieser magnetische Dipol ein Drehmoment der Form:

$$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I \vec{A} \times \vec{B} \quad (1.3.108)$$

Der energetische günstigste Zustand ist derjenige bei der sich ein vorhandener Dipol parallel zum Feld ausrichtet, da gilt:

$$E_{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (1.3.109)$$

In einem inhomogenen B-Feld gilt analog zur Beziehung für elektrische Dipole die Kraft:

$$\vec{F} = \vec{\mu} \cdot \mathbf{grad} \vec{B} \quad (1.3.110)$$

Dies ist eine Kurzschreibweise für den Ausdruck

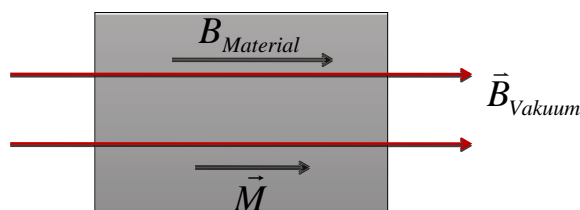
$$\begin{aligned} F_x &= \vec{\mu} \cdot \mathbf{grad} B_x \\ F_y &= \vec{\mu} \cdot \mathbf{grad} B_y \\ F_z &= \vec{\mu} \cdot \mathbf{grad} B_z \end{aligned}$$

Die Vektorsumme über  $N$  magnetische Dipole in einem Volumen  $V$  ergibt die **Magnetisierung**:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum \vec{\mu}_i \quad (1.3.111)$$

Falls alle Dipole in dieselbe Richtung zeigen, läßt sich mit  $n = N/V$  einfach schreiben:

$$\vec{M} = n\vec{\mu} \quad (1.3.112)$$



**Abbildung 1.3.22:** Ein äußeres Feld  $B_{Vakuum}$  erzeugt eine Magnetisierung  $\vec{M}$  im Material.

Die Magnetisierung des Materials wird durch ein äußeres Feld in dem Material erzeugt, sei es durch eine Induzierung von Dipolmomenten oder die Ausrichtung schon vorhandener Dipole. Die Fähigkeit ein bestimmtes Material zu magnetisieren wird durch die **magnetische Suszeptibilität**  $\chi_{mag}$  ausgedrückt<sup>21</sup>:

<sup>21</sup>Bei der äquivalenten Formulierung in der Elektrostatik zur Erzeugung der Polarisation  $\vec{P}$  wurde per Definition des Feld im Innern des Dielektrikums gewählt. Hier ist es das von aussen angelegte Feld!

$$\vec{M} = \chi_{mag} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{Vakuum} \quad (1.3.113)$$

Durch die Überlagerung des äußeren Magnetfeldes mit dem durch die Magnetisierung ergibt sich ein neues Magnetfeld.

$$\vec{B}_{inkl. \text{ Material}} = \vec{B}_{Vakuum} + \mu_0 \vec{M} \quad (1.3.114)$$

Die Reduzierung oder Verstärkung des Magnetfeldes wird durch die **Permeabilität**  $\mu_{rel}$  ausgedrückt:

$$\vec{B}_{inkl. \text{ Material}} = \mu_{rel} \vec{B}_{Vakuum} \quad (1.3.115)$$

Die Permeabilität  $\mu_{rel}$  und magnetische Suszeptibilität  $\chi_{mag}$  lassen sich verknüpfen via:

$$\mu_{rel} = 1 + \chi_{mag} \quad (1.3.116)$$

Auch in der Magnetostatik gilt, daß man Formeln für die Beschreibung von zum Beispiel Spulen mit und ohne Eisenkern durch die folgende Ersetzung anpassen kann:

$$\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_{rel} \quad (1.3.117)$$

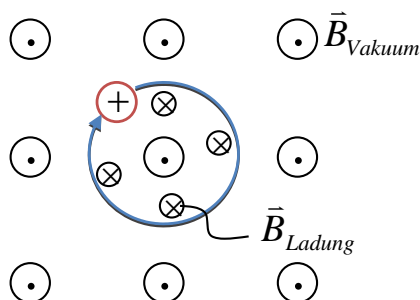
### Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Bringt man ein Material in ein äußeres Magnetfeld, so kann es in unterschiedlicher Weise reagieren. Bei einem **Diamagneten** wird das Magnetfeld abgeschwächt. Bei einem **Paramagneten** und einem **Ferromagneten** wird es verstärkt. Somit kann die Suszeptibilität  $\chi_{mag}$  negative und positive Werte annehmen.

$$\vec{M} = \chi_{mag} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad (1.3.118)$$

- **Diamagnetismus**

Bei einem Diamagneten zwingt das Anlegen eines äußeren Feldes, die Ladungsträger in dem Material auf eine Gyrationbahn. Das magnetische Moment das diese Kreisbahn erzeugt ist *immer* entgegen dem äußeren Feld gerichtet. Dies wird durch die **Lenz'sche Regel** bedingt (siehe Kapitel 4). D.h. für die Suszeptibilität gilt:



**Abbildung 1.3.23:** Diamagnetismus. Ein Magnetfeld zwingt Ladungsträger auf eine Kreisbahn um die Magnetfeldlinien. Das Feld das diese Bewegung erzeugt ist dem äußeren immer entgegen gerichtet.

$$\chi_{mag, dia} < 0 \quad (1.3.119)$$

Dieser Diamagnetismus gilt für alle Materialien, die kein eigenes magnetisches Moment besitzen. So summieren sich zum Beispiel die Kreisströme in Edelgasatomen zu Null, so daß diese kein permanentes magnetisches Dipolmoment besitzen. Legt man ein Feld an, so *induziert* man allerdings Kreisströme und bekommt ein induziertes magnetisches Moment.

Diamagneten werden von einem Gradienten im Magnetfeld abgestoßen. Die Kraft auf ein Dipolmoment in einem Gradienten in einer Richtung war:

$$F_x = \vec{\mu} \cdot \text{grad} B_x \quad (1.3.120)$$

Nachdem  $\mu$  entgegen der Richtung von  $\vec{B}$  zeigt. Können wir für die x-Richtung schreiben:

$$F_x = -\mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \quad (1.3.121)$$

D.h. die Kraft wirkt *entgegen* dem Gradienten. Alle Materialien zeigen diamagnetisches Verhalten, die kein eigenes magnetisches Moment besitzen, zum Beispiel Elemente mit abgeschlossenen Elektronenschalen in denen sie magnetischen Momente der einzelnen Elektronen sich untereinander aufheben.

- **Paramagnetismus**

Bei einem Paramagneten existiert ein permanentes magnetisches Dipolmoment, weil zum Beispiel die Kreisströme der Elektronen in den einzelnen Atomen sich nicht aufheben. Diese magnetischen Momente richten sich parallel zu einem äußeren Feld aus, da für diese Orientierung die potentielle Energie minimal wird.

$$E_{pot} = -\vec{\mu}\vec{B} \quad (1.3.122)$$

D.h. das Magnetfeld vergrößert sich gemäß:

$$\vec{B}_{inkl. \text{ Materie}} = \vec{B}_{Vakuum} + \mu_0\vec{M} \quad (1.3.123)$$

Und die Suszeptibilität ist größer Null

$$\chi_{mag,para} > 0 \quad (1.3.124)$$

Der Paramagnetismus zeigt eine einfache Temperaturabhängigkeit. Betrachten wir dazu eine Anzahl  $N_1$  an magnetischen Momenten, die parallel zum äußeren Magnetfeld orientiert ist und eine Anzahl  $N_2$ , die anti-parallel orientiert ist. Letzter Zustand ist energetisch ungünstig, und bei einer Temperatur  $T=0$  K ist  $N_2 = 0$ . Bei endlicher Temperatur hingegen ist es für einige magnetische Momente möglich gemäß ihrer kinetischen Energie, diesen Zustand einzunehmen. In Analogie zur barometrischen Höhenformel ändert sich die Zahl der magnetischen Momente in der jeweiligen Orientierung mit der Temperatur wie<sup>22</sup>:

$$N \propto \exp\left(-\frac{E_0 \pm \mu B}{k_B T}\right) \quad (1.3.125)$$

mit  $E_0$  der Energie im unmagnetisierten Fall ( $B = 0$ ) und  $\mu$  und  $B$  den Beträgen der Vektoren  $\vec{\mu}$  und  $\vec{B}$ . Man bekommt damit:

$$N_1 \propto \exp\left(-\frac{E_0 - \mu B}{k_B T}\right) \quad (1.3.126)$$

$$N_2 \propto \exp\left(-\frac{E_0 + \mu B}{k_B T}\right) \quad (1.3.127)$$

---

<sup>22</sup>Bei der barometrischen Höhenformel galt, daß die Dichte der Teilchen als  $n \propto \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right)$  gegeben ist.



Die gesamte Magnetisierung  $\vec{M}$  ist:

$$\vec{M} = (N_1 - N_2) \vec{\mu} \propto \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\right) \left[ \exp\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\mu B}{k_B T}\right) \right] \quad (1.3.128)$$

mit  $\vec{\mu} \cdot \vec{B} \ll k_B T$  kann die Exponentialfunktion entwickelt werden und man bekommt:

$$\vec{M} \propto \frac{\mu B}{2k_B T} \quad (1.3.129)$$

D.h. die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität ist:

$$\chi_{mag,para} = \frac{C}{T} \quad (1.3.130)$$

mit  $C$  einer Konstanten. Typische paramagnetische Materialien sind paramagnetische Salze, da das magnetische Moment der Elektronen sich im äußeren Feld ausrichten läßt.

Für allgemeine Temperaturen bekommt man mit  $N = N_1 + N_2$

$$\vec{M} = N \vec{\mu} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = N \mu \tanh(x) \quad (1.3.131)$$

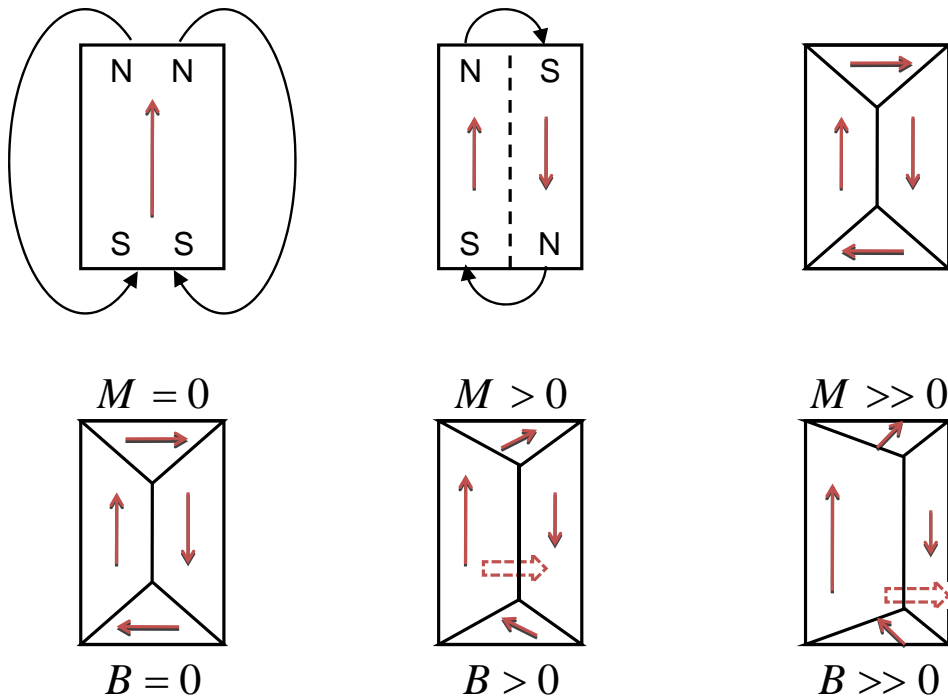
mit  $x = \frac{\mu B}{k_B T}$

### • Ferromagnetismus

Bei einem Ferromagneten existiert eine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Dipolmomenten im Material, die dazu führt daß diese sich parallel zueinander ausrichten. D.h. selbst ohne das Anlegen eines äußeren Magnetfeld erzeugen Ferromagneten schon ein eigenes Magnetfeld.

Die Magnetisierung im Innern eines Ferromagneten ist allerdings nur in einzelnen Bereichen, sog. magnetischen **Domänen** oder **Weiß'sche Bezirke**, gleich gerichtet. Die einzelnen Domänen werden von sog. **Blochwänden** getrennt, in denen sich die Richtung der Momente langsam umdreht zur Richtung der Nachbardomäne. Im Gleichgewicht stellt sich eine Struktur der Magnetisierung ein, wie sie in Abb. 1.3.24 illustriert ist: betrachten wir zunächst einen Ferromagneten, dessen Magnetisierung in eine einzige Richtung zeigt. Damit ist ein äußeres Magnetfeld verknüpft. Wenn sich jetzt im Innern des Ferromagneten, die

Richtung der Magnetisierung in einer Hälfte umdreht, wird das Volumen, das im Außenraum mit Magnetfeld erfüllt werden muß, kleiner. Dieser Gewinn an potentieller Energie ( $E_{pot} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$ ) muß bilanziert werden mit der Bildung einer Domänenwand in der die einzelnen magnetischen Momente *nicht* parallel zueinander ausgerichtet sein können (dies ist analog zu der Arbeit die nötig ist um eine Torsionsfaden zu verdrehen). Am Ende bilden sich Domänen in der die magnetischen Feldlinien durch die Magnetisierung im Innern des Ferromagneten geschlossen sind und im Außenraum der Magnetfeld-erfüllte Bereich minimal wird.



**Abbildung 1.3.24:** In einem Ferromagneten existieren einzelne Domänen in denen die Magnetisierung gleich orientiert ist. Die Domänenstruktur ergibt sich aus einer Energiebilanz zwischen Magnetfeld im Außenraum und der Verdrehung der magnetischen Momente innerhalb der Blochwände. Bei einem Ferromagneten im äußeren Magnetfeld verschieben sich die Blochwände und maximieren dies Magnetisierung in Richtung des äußeren B-Feldes.

Legt man an ein solchen Ferromagneten ein äußeres Feld an, so entsteht eine zusätzliche Kraft, die versucht die Magnetisierung der ein-

zelen Domänen gemäß dem äußeren Feld auszurichten. Dabei wachsen Domänen, die in Richtung des Magnetfeldes magnetisiert sind auf Kosten derjenigen die eine falsche Orientierung zeigen (siehe Abb. 1.3.25). Dazu ist es notwendig, daß sich die Blochwände im Material verschieben. Ist die Energie gering, die für die Verschiebung der Blochwände aufgewendet werden muß, so spricht man von einem *weichmagnetischen* Material ansonsten von einem *hartmagnetischen* Material. Verunreinigungen in einem Ferromagneten können zum Beispiel die Verschiebung dieser Blochwände behindern. Demnach muß man ein größeres Magnetfeld aufwenden, um diesen Widerstand zu überwinden. Dies wird sichtbar bei der sogenannte **Hysterese**. Erhöht man das äußere Feld um einen Ferromagneten, so erhöht sich dessen Magnetisierung bis zu einem gewissen Wert (siehe Abb. 1.3.24). Reduziert man das Magnetfeld wieder, können die Blochwände nicht komplett *reversibel* ihre ursprüngliche Anordnung annehmen, sondern es verbleibt bei  $B = 0$  eine Restmagnetisierung  $M_c$ . Polt man das äußere Magnetfeld um, so ergibt sich dasselbe Verhalten für eine Magnetisierung in die andere Richtung.

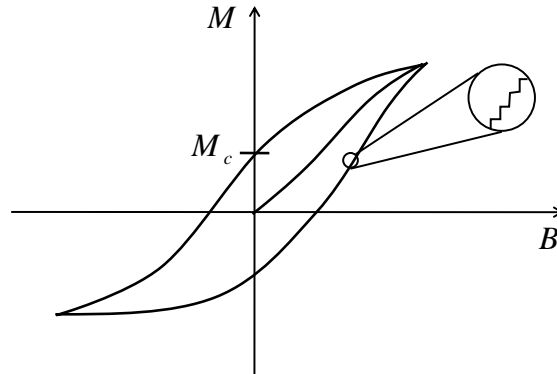
Betrachtet man die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Magnetfelderhöhung auf der mikroskopischen Skala so beobachtet, man dort sprunghafte Änderungen, die **Barkhausensprünge**. Diese entstehen, wenn einzelne Blochwände plötzlich nicht mehr von Verunreinigungen festgehalten werden können und sich eine einzelne Domäne schlagartig in die richtige Orientierung magnetisieren läßt.

Bei hohen Temperaturen ist die thermische Bewegung der magnetischen Momente stärker als ihre Wechselwirkungsenergie untereinander und sie beginnen sich regellos zu orientieren. D.h. oberhalb einer bestimmten Temperatur  $T_c$  wird aus jedem Ferromagnet ein Paramagnet. Diese Temperatur  $T_c$  bezeichnet man als **Curie-Temperatur**: Fe (1043 K), Co (1388 K), Ni (627 K). Die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung oberhalb der Curie-Temperatur ist die eines Paramagneten ( $\chi_{mag,ferro} \propto \frac{1}{T-T_c}$ ).

Die Magnetisierung, die man durch die Ausrichtung der Domänen erzeugen kann ist oft um ein Vielfaches höher als das von außen angelegte Feld selbst. D.h. es gilt:

$$\chi_{mag,ferro} \gg 0 \quad (1.3.132)$$

Der quantitative Zusammenhang läßt sich wie folgt ableiten. Zunächst entsteht ein internes effektives Magnetfeld am Ort der Atom durch die



**Abbildung 1.3.25:** Die Magnetisierung eines Ferromagneten zeigt eine Hysterese bei einer Variation des äußeren Magnetfeldes. Die Magnetisierung ändert sich dabei in kleinen Sprüngen.

Magnetisierung im Ferromagneten:

$$\vec{B}_E = \lambda \mu_0 \vec{M} \quad (1.3.133)$$

Der Koeffizient  $\lambda$  beschreibt die gesamte Nahordnung in einem Kristall und die Kopplung der einzelnen magnetischen Momente der Atome. Die Magnetisierung ihrerseits wird jetzt durch das effektive interne Magnetfeld aber auch durch das äußere beeinflusst:

$$\mu_0 \vec{M} = \chi_{para} \left( \vec{B}_{Vakuum} + \vec{B}_E \right) \quad (1.3.134)$$

Gemäß dieser Gleichung folgen die einzelnen magnetischen Momente den existierenden Feldern gemäß  $\chi_{para}$ . Die ferromagnetische Suszeptibilität ist definiert als:

$$\chi_{mag,ferro} = \frac{\mu_0 M}{B_{Vakuum}} \quad (1.3.135)$$

Diese Gleichungen lassen sich auflösen mit  $\chi_{para} = C/T$  zu:

$$\chi_{mag,ferro} = \frac{C}{T - T_c} \quad (1.3.136)$$

mit  $T_c = C\lambda$  der Curie-Temperatur. Dieses Gesetz gilt oberhalb von  $T_c$  bei dem ein Ferromagnet rein paramagnetische Verhalten zeigt. Unterhalb von  $T_c$  gehen wir wieder von der Bestimmungsgleichung für eine Paramagneten aus:

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) \quad (1.3.137)$$

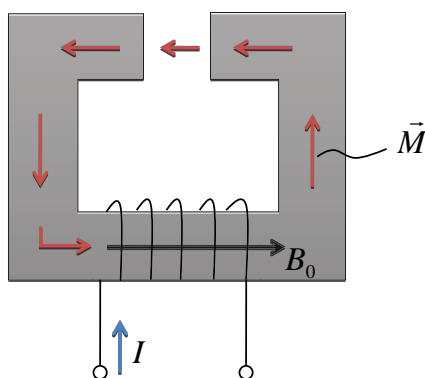
bei einem Ferromagneten ist das wirkende Magnetfeld aber seinerseits von  $M$  abhängig. D.h. wir bekommen:

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu\lambda\mu_0 M}{k_B T}\right) \quad (1.3.138)$$

eine implizite Gleichung für  $M$ .

Betrachten wir eine Spule in der ein Eisenjoch steckt. Das Magnetfeld das in dem Spalt wirkt, setzt sich zusammen aus einem Beitrag durch die Spule selbst und durch die Magnetisierung des Eisens. Nachdem die magnetischen Feldlinien immer geschlossen sind ist das Magnetfeld im Innern des Spaltes gegeben als:

$$\vec{B}_{\text{Spalt}} = \vec{B}_{\text{Spule}} + \mu_0 \vec{M}_{\text{Eisenjoch}} \simeq \mu_0 \vec{M}_{\text{Eisenjoch}} \quad (1.3.139)$$



**Abbildung 1.3.26:** Ein äußeres Magnetfeld richtet die Magnetisierung eines Eisenjoches aus. Das Magnetfeld durch diese Magnetisierung in einem Spalt kann um ein vielfaches größer sein als das angelegte Magnetfeld.

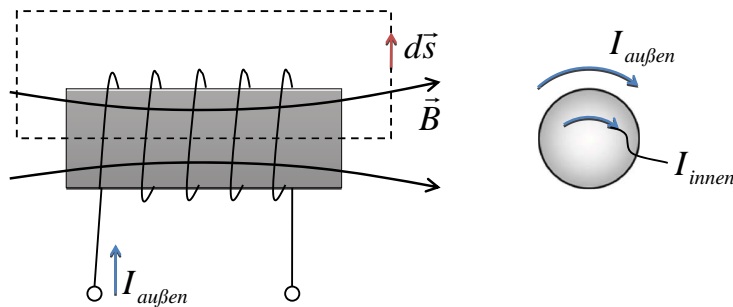
### Magnetische Feldgleichungen in Materie

Wie in der Elektrostatik lassen sich auch Feldgleichungen für Magnetfelder in Materie angeben. Dazu betrachten wir eine Spule in dessen Innerem sich ein Paramagnet befinden soll. Wenn wir den Integrationsweg für das Amperesche Gesetz durch die Spule legen und diesen im Unendlichen schließen, umfasst der Weg sowohl die Ströme in der Spule  $I_{Spule}$  als auch die magnetischen Dipolmomente im Material, die durch die Existenz von inneren Ströme  $I_{Materie}$  dargestellt werden:

$$\oint \vec{B}_{Materie} d\vec{s} = \mu_0 I_{Spule} + \mu_0 I_{Materie} \quad (1.3.140)$$

Die Magnetisierung wird dabei durch  $I_{Materie}$  erzeugt gemäß:

$$\oint \vec{M} d\vec{s} = I_{Materie} \quad (1.3.141)$$



**Abbildung 1.3.27:** Das Magnetfeld in Materie im Innern einer Spule wird durch die äußeren Ströme in der Spule aber auch durch die Magnetisierung bestimmt. Diese Magnetisierung wird durch innere Ströme erzeugt. Hier ist der Fall eines Paramagneten gezeigt.  $I_{außen} = I_{Spule}$ ,  $I_{innen} = I_{Materie}$

Diese Gleichung lässt sich umformen, und wir bekommen als Ampere'sches Gesetz, das jetzt nur die äußeren Ströme  $I_{Spule}$  umfasst:

$$\oint \left( \vec{B}_{Materie} - \mu_0 \vec{M} \right) d\vec{s} = \mu_0 I_{Spule} \quad (1.3.142)$$

Wir definieren ein **H-Feld**, für das gilt:

$$\mu_0 \vec{H} = \vec{B}_{Materie} - \mu_0 \vec{M} \quad (1.3.143)$$

D.h. das Magnetfeld in der Spule mit dem Paramagneten ist gegeben als:

$$\vec{B}_{inkl. \text{ Materie}} = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H}) \quad (1.3.144)$$

Ohne Paramagneten bekommt man:

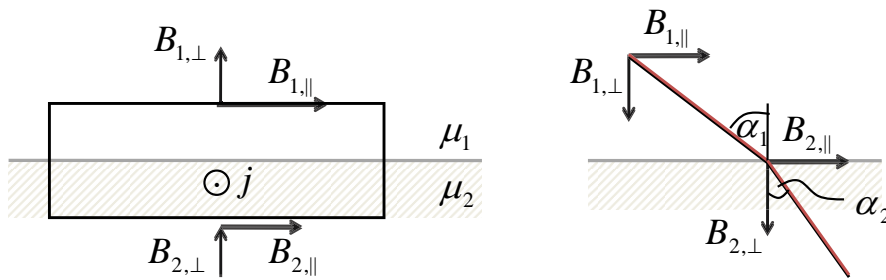
$$\boxed{\vec{B}_{Vakuum} = \mu_0 \vec{H}} \quad (1.3.145)$$

Der Änderung im Magnetfeld durch das Einfügen eines magnetischen Materials wurde durch die Permeabilität ausgedrückt:

$$\vec{B}_{Materie} = \mu_r \vec{B}_{Vakuum} \quad (1.3.146)$$

D.h. wir bekommen schließlich:

$$\boxed{\vec{B}_{Materie} = \mu_r \mu_0 \vec{H}} \quad (1.3.147)$$



**Abbildung 1.3.28:** An einer Grenzfläche kann man einen Weg definieren, der nur die inneren Ströme umschließt. Aus der Quellenfreiheit des Magnetfeldes läßt sich das Brechungsgesetz für Feldlinien ableiten.

Mit diesen Zusammenhängen wollen wir die Randbedingung ableiten für den Übergang von Magnetfeldlinien an einer Grenze zwischen zwei Materialien, die mit den Permeabilitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  charakterisiert sind (siehe Abb. 1.3.26).

- **Senkrecht zur Grenzfläche**

Betrachten wir eine rechteckiges Volumen um ein Oberflächenelement an diese Grenzfläche. Ganz allgemein gilt immer  $\text{div} \vec{B} = 0$ . Daraus folgt sofort:

$$B_{1,\perp} = B_{2,\perp} \quad (1.3.148)$$

- **Parallel zur Grenzfläche**

Betrachten wir jetzt ein Linienintegral an der Grenzlinie der beiden Materialien, wie in Abb. 1.3.29 illustriert. In dem Material fließen nur innere Ströme, die durch das äußere Magnetfeld induziert werden. Es treten keine *äußeren* Ströme durch die Fläche und es gilt:

$$\oint H d\vec{s} = \mu_0 \int_{\text{Fläche}} \vec{j}_{\text{ausseren}} d\vec{A} = 0 \quad (1.3.149)$$

Damit müssen die Parallel-Komponenten des H-Feldes gleich sein:

$$H_{1,\parallel} = H_{2,\parallel} \quad (1.3.150)$$

Dies läßt sich auf die Komponenten des B-Feldes umrechnen und wir bekommen:

$$\frac{B_{1,\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2,\parallel}}{\mu_2} \quad (1.3.151)$$

Wenn wir die Einfallswinkel der Feldlinien in den beiden Medien als  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bezeichnen bekommen wir:

$$\tan \alpha_1 = \frac{B_{1,\parallel}}{B_{1,\perp}} \quad (1.3.152)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{B_{2,\parallel}}{B_{2,\perp}} \quad (1.3.153)$$

Damit gilt für die Feldlinien beim Übergang zwischen zwei Medien, folgendes **Brechungsgesetz**:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (1.3.154)$$

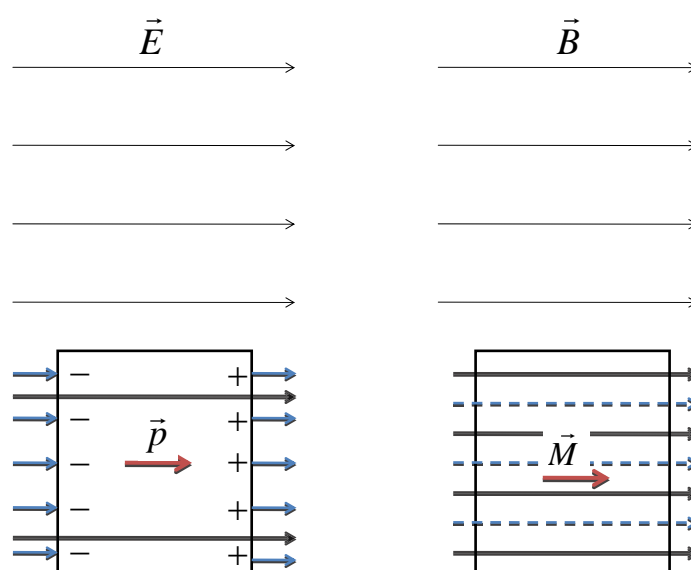
Abschließend wollen wir noch einen kurzen Vergleich der Formeln der Elektro- und der Magnetostatik anführen, wie in Tabelle 1.2 gezeigt. Die Gleichungen sind aus historischen Gründen nicht perfekt symmetrisch, da  $\vec{M}$  und  $\vec{P}$  unterschiedliche definiert sind. Die Konstanten  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$  sowie  $\mu_0$ ,  $\mu_r$  treten zudem einmal als Kehrwert auf. Zu Berechnung der Polarisation wird das elektrische Feld verwendet, das im Innern des Dielektrikums wirkt, während bei der Berechnung der Magnetisierung, das magnetische Feld verwendet wird, das ohne Materie wirken würde.



Größe	Elektrostatik	Magnetostatik
D,E,B,H-Feld	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
P,M	$\vec{P} = \chi_{el} \epsilon_0 \vec{E}_{Dielektrikum}$	$\vec{M} = \chi_{mag} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{Vakuum}$
Vakuum - Materie	$\vec{E}_{Dielektrikum} = E_{Vakuum} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}$	$\vec{B}_{Materie} = \vec{B}_{Vakuum} + \mu_0 \vec{M}$
$\epsilon_r, \mu_r$	$\vec{E}_{Dielektrikum} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_{Vakuum}$	$\vec{B}_{Materie} = \mu_r \vec{B}_{Vakuum}$
$\epsilon, \chi$	$1 + \chi_{el} = \epsilon_r$	$1 + \chi_{mag} = \mu_r$
Grenzfläche $\parallel$	$E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel}$	$\frac{B_{1,\parallel}}{\mu_1} = \frac{B_{2,\parallel}}{\mu_2}$
Grenzfläche $\perp$	$\epsilon_1 E_{1,\perp} = \epsilon_2 E_{2,\perp}$	$B_{1,\perp} = B_{2,\perp}$

**Tabelle 1.2:** Vergleich der Gesetze der Elektro- und der Magnetostatik.

Vergleicht man die Magnetisierung und die Polarisierung (siehe Abb. 1.3.29), so erkennt man, daß bei der Polarisierung ein äußeres elektrisches Feld verstärkt wird und das Feld im Innern des Dielektrikums abgeschwächt wird. Bei der Magnetisierung hingegen, wird sowohl das äußere als auch das innere magnetische Feld verstärkt. Dies ist eine Folge der Tatsache, daß magnetische Feldlinien *immer* geschlossen sind.



**Abbildung 1.3.29:** Vergleich der elektrischen und magnetischen Felder in Materie: (i) die Polarisation *verstärkt* das elektrische Feld im Außenraum und *verringert* es im Innenraum; (ii) nachdem die Magnetfeldlinien immer geschlossen sind verstärkt eine Magnetisierung das magnetische Feld sowohl im *Innen-* als auch im *Außenraum*.

## 1.4 Zeitlich veränderliche Felder

In der Elektro- und der Magnetostatik haben wir stationäre Probleme behandelt. Im folgenden wollen wir den allgemeineren Fall betrachten, bei der sich die Felder mit der Zeit ändern können.

### 1.4.1 Induktion

#### Faraday'sches Induktionsgesetz

Betrachten wir einen Magneten, der durch eine Leiterschleife bewegt wird. Man beobachtet eine Spannung an den Enden dieser Schlaufe der Größe (siehe Abb. 1.4.1):

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F} \quad (1.4.1)$$

Dies bezeichnet man als **Faraday'sches Gesetz** mit  $U_{ind}$  als der *induzierten Spannung*. Das negative Vorzeichen drückt aus, daß die Spannung immer einer Änderung des magnetischen Flußes entgegen wirkt. D.h. diese Spannung treibt einen Strom, der seinerseits ein Magnetfeld erzeugt, daß der Änderung des magnetischen Flußes entgegen wirkt.

Das Flächenintegral über das Magnetfeld bezeichnet man als **magnetischen Fluß**:

$$\Phi_{mag} = \int_{Fläche} \vec{B} \cdot d\vec{F} \quad (1.4.2)$$

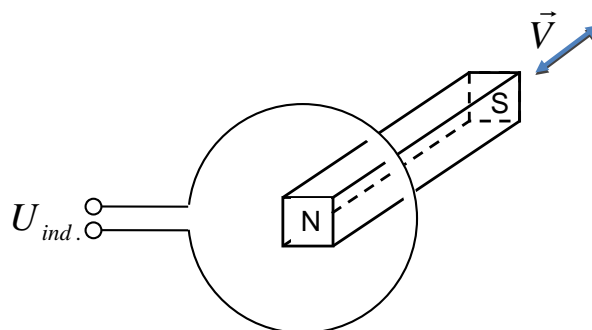
Somit läßt sich das Faraday'sche Gesetz auch einfach schreiben als:

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} \quad (1.4.3)$$

Die induzierte Spannung ist identisch mit dem Integral über das elektrische Feld entlang des Leiters.

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = U_{ind} \quad (1.4.4)$$

Nachdem wir ein *zeitabhängiges* Problem betrachten, muß das elektrische Feld nicht länger konservativ sein und das geschlossene Integral darf einen Wert verschieden von Null annehmen. Damit verliert auch das elektrostatische Potential seine Bedeutung, das ja explizit aus der Bedingung abgeleitet wurde, daß die Arbeit im elektrischen Feld unabhängig von der Wahl des Weges ist.



**Abbildung 1.4.1:** Wird eine Magnet durch einen Ring bewegt, so wird dort eine Spannung induziert.

Mit dem Stokes'schen Satz können wir das Linienintegral umwandeln in:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \int_{\text{Fläche}} \mathbf{rot} \vec{E} d\vec{F} \quad (1.4.5)$$

bzw:

$$U_{ind} = \int_{\text{Fläche}} \mathbf{rot} \vec{E} d\vec{F} \quad (1.4.6)$$

Damit ergibt sich das Faraday'sche Gesetz in seiner differentiellen Form von:

$$\mathbf{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B} \quad (1.4.7)$$

In der Elektrostatik gilt:

$$\mathbf{rot} \vec{E} = 0 \quad (1.4.8)$$

Wie läßt sich das Faraday'sche Gesetz anschaulich beschreiben? Die Änderung des magnetischen Flußes erzeugt zunächst eine Spannung. Diese Spannung treibt einen Strom, der wiederum ein Magnetfeld erzeugt, der der Flußänderung *immer entgegen* wirkt. Dies bezeichnet man als **Lenz'sche Regel**:

Ein Stromfluß wird immer in diejenige Richtung induziert, so daß das erzeugte Magnetfeld der Flußänderung in der Schleife entgegen wirkt.

Auf obiges Beispiel angewendet bedeutet dies: (i) bevor der Magnet in die Leiterschleife bewegt wurde, war der magnetische Fluß, der durch diese Schleife ging gering; (ii) bewegt man den Magneten hinein, so wird ein Stromfluß induziert dessen Magnetfeld versucht, diesen *geringen* magnetischen Fluß durch die Schleife aufrechtzuerhalten indem das erzeugte Magnetfeld dem äußeren entgegen wirkt.

Für den Fall, daß der Widerstand  $R$  der Leiterschleife Null ist (Bsp. Supraleiter) kann ein beliebig großer Strom erzeugt werden, der dafür sorgt daß der magnetische Fluß durch die Schleife sich *nicht* ändert. Man spricht in diesem Fall auch von einer perfekten Erhaltung des magnetischen Flusses.

$$\Phi_{mag} = \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F} \quad (1.4.9)$$

Dieser "Widerstand" gegen eine Flußänderung wird auch als Kraft sichtbar, wie wir an dem Beispiel einer Rechteckschleife veranschaulichen wollen, durch das teilweise ein magnetische Feld dringt (siehe Abb. 1.4.3). Wir bewegen die Schleife mit der Geschwindigkeit  $v$  aus dem Feld heraus, wobei sich der magnetische Fluß, der durch diese Schleife tritt, ändert.

Die Kraft auf ein Stück der Länge  $l$  dieses Leiters ist allgemein gegeben als:

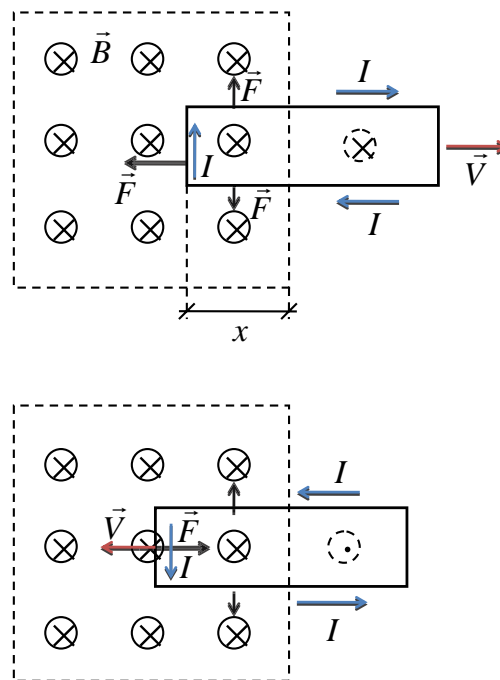
$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (1.4.10)$$

Aus der Abb. 1.4.3 ist ersichtlich, daß lediglich die Kraft auf das Stück der Breite  $b$  sich nicht heraus hebt. Die Änderung des magnetischen Flußes erzeugt eine induzierte Spannung  $U_{ind}$ , die gemäß dem Widerstand des Drahtes einen Strom treibt.

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.4.11)$$

Die Richtung des Stromes wirkt entsprechend der Lenz'schen Regel, der Änderung des magnetischen Flußes durch die Schleife entgegen: wenn die Schleife aus dem Magnetfeld heraus bewegt wird, wird ein Strom induziert, der ein Magnetfeld erzeugt, daß in dieselbe Richtung zeigt wie das äußere; wenn die Schleife in das Magnetfeld hinein bewegt wird, wird ein Strom induziert, der ein Magnetfeld erzeugt, daß in entgegengesetzte Richtung zeigt wie das äußere.

Wenn wir mit dem Ort  $x$  den Anteil der Leiterschleife beschreiben, der sich an der Grenze zum magnetfeld-freien Raum befindet, bekommen wir einen magnetischen Fluß  $\Phi = Bbx$ . Die Zeitableitung ist:



**Abbildung 1.4.2:** Kraft auf eine Leiterschleife, die aus einem Magnetfeld heraus- bzw. hinein geschoben wird: Beim Herausziehen wird in der Leiterschleife ein Strom induziert. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld das in dieselbe Richtung zeigt wie das äußere Magnetfeld. Beim Hineinschieben wird in der Leiterschleife ein Strom induziert, der ein Magnetfeld erzeugt, das dem äußeren Magnetfeld entgegen gerichtet ist. In beiden Fällen wirkt eine Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter, die entgegen der Bewegungsrichtung orientiert ist.

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bb \frac{dx}{dt} = Bbv \quad (1.4.12)$$

Das induziert eine Spannung:

$$U_{ind} = -Bbv \quad (1.4.13)$$

mit  $U_{ind} = RI$  ergibt sich

$$I = -\frac{1}{R}Bbv \quad (1.4.14)$$

D.h. insgesamt wirkt eine Kraft entgegen der x-Richtung von:

$$F = IlB = -\frac{1}{R}B^2b^2v \quad (1.4.15)$$

Diese *bremsende* Kraft ist umso größer je schneller die Schleife bewegt wird. Ist der Widerstand  $R$  groß, so ist die Kraft  $F$  hingegen klein, da kein Strom getrieben werden kann.<sup>23</sup> Das Induktionsgesetz soll jetzt an einer Reihe von Beispielen illustriert werden.

- **Mitnahme von Magnetfeld**

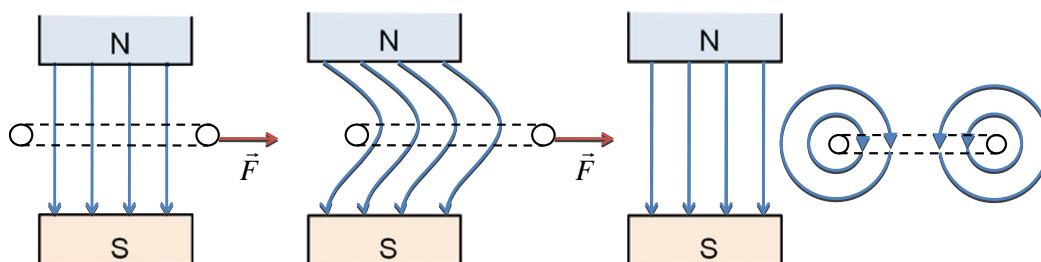
Betrachten wir eine Leiterschleife, die sich in einem Magnetfeld befindet (siehe Abb.1.4.4). Wenn wir diese Leiterschleife aus dem Feld heraus bewegen, wird ein Strom induziert, der ein zusätzliches Magnetfeld erzeugt, das versucht den magnetischen Fluß in dieser Schleife konstant zu halten. Überlagert man das externe Magnetfeld und das erzeugte Magnetfeld, so erscheint es als würde das Magnetfeld durch die Bewegung der Spule *mitgenommen*. Wenn man die Spule ganz aus dem Magnetfeld heraus bewegt hat, so wird eine freie stromdurchflossene Leiterschleife erzeugt. Dieser Strom bleibt natürlich nur bestehen, solange er nicht gemäß einem endlichen Widerstand  $R$  der Leiterschleife exponentiell abfällt. Bei perfekten Leitern ( $R = 0$  bei Supraleitern oder voll-ionisierten dünnen Plasmen im interstellaren Medium) kann sich Materie und magnetischer Fluß allerdings nicht unabhängig voneinander bewegen. Man bezeichnet dies als **eingefrorenen Fluß**. Dieser Vorgang erklärt zum Beispiel die Existenz von Magnetfeldern im Universum fernab von Sternen: abströmende Materie, die an der Oberfläche von Sternen mit dem Magnetfeld in Berührung kommt bewegt sich durch das Universum und transportiert somit auch Magnetfeld.

- **Erzeugung hoher Magnetfelder**

Für die Erzeugung sehr hoher Magnetfelder kann man die Erhaltung des magnetischen Flußes ausnutzen. Hohe *stationäre* Magnetfelder lassen sich mit supraleitenden Spulen erzeugen, wobei allerdings die Supraleitung nur bis zu Feldstärken von ca. 10..20 T aufrecht erhalten werden kann. In konventionellen Spulen können Magnetfelder bis zu 100 T erzeugt werden, bevor die magnetischen Kräfte zu einer mechanischen Zerstörung der Spule führen. Noch höhere Magnetfelder bis zu 1000 T lassen sich nur mit einer *Implosionstechnik* erzielen (siehe Abb.

---

<sup>23</sup>Bei einem Supraleiter mit  $R = 0$  wäre die Kraft unendlich groß. Allerdings ist die Anwendung des Ohmschen Gesetzes zur Beschreibung des Stromflusses in einem Supraleiter nicht möglich. Der Strom in einer supraleitenden Leiterschleife stellt sich so ein, daß der magnetische Fluß perfekt erhalten bleibt.



**Abbildung 1.4.3:** Mitnahme von Magnetfeld durch eine Spule, die aus einem Magnetfeld heraus bewegt wird.

1.4.2): hierzu betrachtet man eine Spule mit Radius  $r_0$  die einen Strom  $I$  trägt die ein Magnetfeld  $B_0$  und eine magnetischen Fluß  $\Phi_0 = B_0 r_0^2 \pi$  erzeugt<sup>24</sup>. Durch Sprengstoff läßt sich diese Spule schlagartig auf einen Radius  $r_1$  komprimieren, wobei der magnetische Fluß  $\Phi_0$  erhalten bleiben muß. D.h es werden Ströme induziert um ein Magnetfeld  $B_1$  zu erzeugen, daß der Bedingung  $\Phi_0 = B_1 r_1^2 \pi$  genügt. Wenn  $r_1$  sehr klein wird, muß  $B_1$  stark ansteigen. Diese *destruktive* Methode zur Erzeugung von hohen Magnetfeldern bedingt natürlich, daß die Phänomene, die man untersuchen möchte, schnell genug gemessen werden können. Prinzipiell würde diese Erzeugung hoher Magnetfelder auch funktionieren, wenn man die Spule langsam komprimiert. Allerdings würde der induzierte Strom entsprechend dem Widerstand  $R$  der Spule mit einer Zeitkonstante exponentiell abfallen. Diese Kompression muß also schneller ablaufen als die Dissipation des induzierten Stromes.

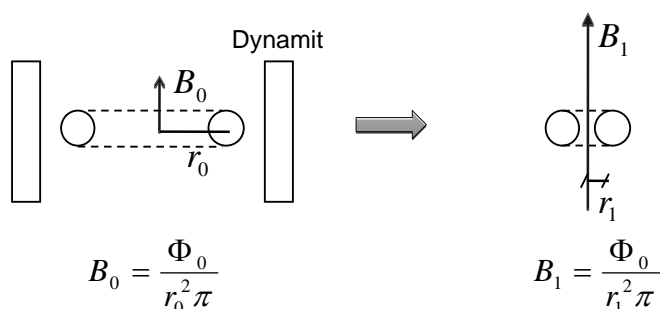
- **Magnetisches Umformen**

Gepulste Magnetfelder werden dazu genutzt um Material umzuformen. Dazu wird zum Beispiel eine Hülse in eine Spule eingebaut. Ändert man den Strom in der Spule so induziert man einen Strom in der Hülse, gemäß Abb. 1.4.5. Dieser Strom erzeugt eine Kraft, die radial nach innen gerichtet ist und diese Hülse komprimiert (gegensinnige Ströme stoßen sich ab). Durch diese Art der Umformung werden zum Beispiel Metallhülsen auf Kabel aufgespritzt.

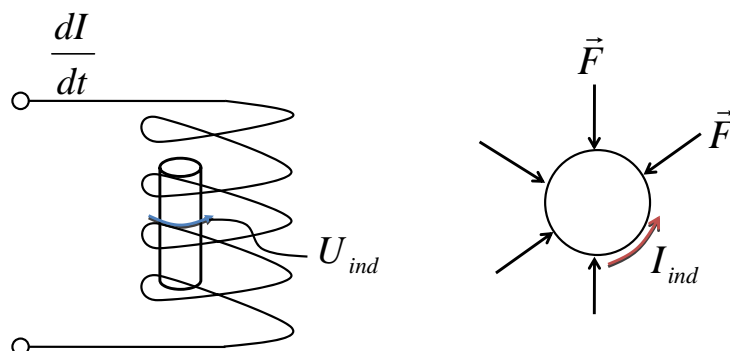
- **Wirbelstrombremse**

<sup>24</sup>Der Fluß einer Ringspule wird exakt durch das Integral  $\Phi = \int_{\text{Fläche}} \vec{B}(r) \cdot d\vec{F}$  berechnet, da  $B(r)$  sich mit  $r$  ändert. Der vereinfachte Ausdruck  $B r_0^2 \pi$  dient hier nur der Abkürzung der Argumentation.





**Abbildung 1.4.4:** Durch die Implosion einer Spule lassen sich wegen der Flussershaltung sehr hohe Magnetfelder erzeugen.

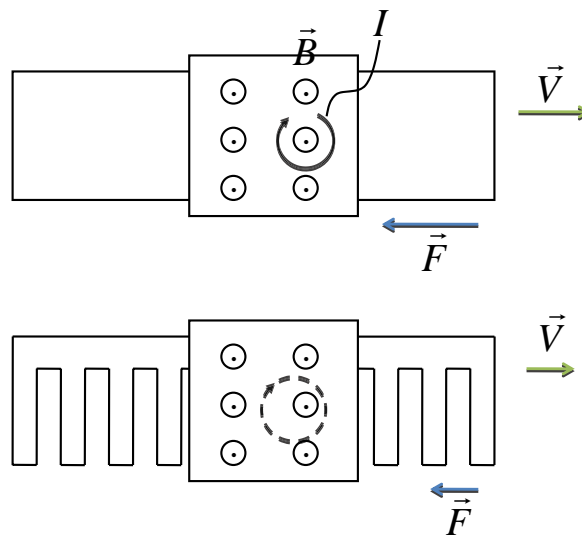


**Abbildung 1.4.5:** Durch eine gepulstes Magnetfeld läßt sich per Induktion Material verformen.

Die Lenz'sche Regel wird bei einer Wirbelstrombremse ausgenutzt. Hierbei durchläuft eine leitende Bremsscheibe einen Spalt eines Magneten. Wenn ein neuer Abschnitt dieser Schiebe in den Magneten eintritt, werden **Wirbelströme** induziert, um den magnetischen Fluß  $\Phi = 0$  möglichst aufrecht zu erhalten. Damit bewegt sich ein stromdurchflossener Leiter durch ein Magnetfeld und es wirkende eine Kraft, die die Scheibe abbremst. Durch eine Unterteilung der Scheibe können die Wirbelströme unterbrochen werden und die bremsende Wirkung fällt geringer aus.

#### • Erzeugen von Strömen in Supraleitern

Möchte man in einer supraleitenden Schleife eine Strom erzeugen, so gelingt dies am besten per Induktion: (i) Hierzu bringt man einen Spule 1 gegenüber der supraleitenden Spule 2 an, die sich zunächst al-



**Abbildung 1.4.6:** Prinzip einer Wirbelstrombremse.

lerdings im normal-leitenden Zustand befindet. (ii) Schaltet man die Spule 1 ein, so induziert man einen Strom in Spule 2, der allerdings langsam abklingt, gemäß dem endlichen Widerstand der supraleitenden Spule im *normal-leitenden* Zustand. (iii) Jetzt kühlt man die Spule unterhalb der Sprungtemperatur, so daß sie supraleitend wird, an den Strömen ändert sich dadurch nichts<sup>25</sup>. (iv) Wenn man jetzt den Strom der normal-leitenden Spule abschaltet, so induziert man einen entsprechenden Strom in der supraleitenden Spule 2. (v) Spule 1 bleibt abgeschaltet und kann entfernt werden ohne den magnetischen Fluß in Spule 2 zu ändern!

Mit dieser Methode läßt sich auch nach langer Zeit noch überprüfen ob der Strom in der supraleitenden Spule noch fließt, in dem man eine zweite Spule in dessen Nähe bringt und die induzierte Spannung beobachtet.

#### • Kraft auf eine Leiterschleife

Bewegt man einen Magneten durch eine Leiterschleife die als Pendel aufgehängt ist, so versucht sie diesem Magneten auszuweichen. Nachdem der magnetische Fluß durch die Schleife zunächst Null ist, wird ein

<sup>25</sup>Bis auf die inneren Ströme gemäß dem Meissner-Ochsenfeld-Effekt zur Verdrängung des Magnetfeldes aus dem Innern des Supraleiters. Für die induzierten Ströme ist dies unerheblich.

Strom induziert, der genau diesen Zustand aufrechterhalten will, d.h. Spule und Magnet stoßen sich ab.

- **Magnetische Levitation**

Bewegt man einen Leiter über ein Magnetfeld, so werden Wirbelströme induziert, die zu einer abstoßenden Wirkung führen. Der bewegte Leiter *schwebt*. Dies wird als **magnetische Levitation** bezeichnet, die mittels eines Kreisels über einem Permanentmagneten illustriert werden kann. Nach einem ähnlichen Prinzip könnte man auch eine Magnetschwebbahn realisieren, die durch ihre Vorwärtsbewegung Wirbelströme erzeugt, die ein Schweben der Bahn bewirken. Allerdings *hängt* bei modernen Magnetschwebbahnen (Transrapid) der Wagen in einem geregelten Magnetfeld, wobei eine anziehende Kraftwirkung eingestellt werden muß. Über Induktion wird lediglich die berührungslose Leistungsübertragung von stationären Magneten in der Fahrbahn zur Sekundärspule im Fahrzeug realisiert.

### Selbstinduktion und Gegeninduktion

Das Faraday'sche Gesetz betrachtet die Induktion einer Spannung in z.B. in einer Spule durch die Änderung des magnetischen Flußes, der diese Spule durchflutet. Wenn wir eine beliebige Geometrie betrachten ist der fließende Strom und der erzeugte magnetische Fluß verknüpft via

$$\Phi_{mag} = \int_{\text{Fläche}} \vec{B} d\vec{F} = LI \quad (1.4.16)$$

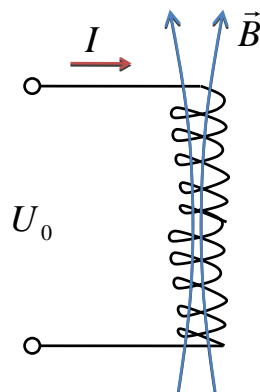
Man bezeichnet  $L$  als die **Induktivität**, die in der Einheit **Henry** gemessen wird ( $1 \text{ H} = \text{VsA}^{-1}$ ). Nach dem Faraday'schen Gesetz gilt:

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_{mag} = -L\frac{dI}{dt} \quad (1.4.17)$$

D.h. die Induktivität gibt an wie groß die induzierte Spannung wird bei einer gegebenen Änderung des Stromes als Ursache dieser Spannung. Dies ist ähnlich zur Kapazität, die angibt, wie groß die gespeicherte Ladung bei vorgegebener Spannung wird. Das negative Vorzeichen drückt aus, das die Spannung immer der Stromänderung entgegen wirkt.

Im folgenden wollen wir einige Induktivitäten berechnen.

- **Induktivität einer Spule**



**Abbildung 1.4.7:** Schaltet man den Strom in einer Spule ein, so wird eine Spannung induziert die diesem Stromfluß entgegen wirkt.

Wir betrachten eine Spule mit  $N$  Windungen der Länge  $L$ . Das Magnetfeld im Innern war gegeben als:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \quad (1.4.18)$$

Der magnetische Fluß  $\Phi_{mag}$ , der durch  $N$  Windungen der Fläche  $F_0$  dringt ist:

$$\Phi_{mag} = B F_0 N \quad (1.4.19)$$

Damit ergibt sich

$$\Phi_{mag} = \mu_0 \frac{N}{L} I F_0 N \quad (1.4.20)$$

Mit dem Volumen der Spule  $V = L F_0$  können wir schreiben:

$$\Phi_{mag} = \mu_0 V \left( \frac{N}{L} \right)^2 I \quad (1.4.21)$$

D.h. die Induktivität einer Spule ist:

$$L_{Spule} = \mu_0 V \left( \frac{N}{L} \right)^2 \quad (1.4.22)$$

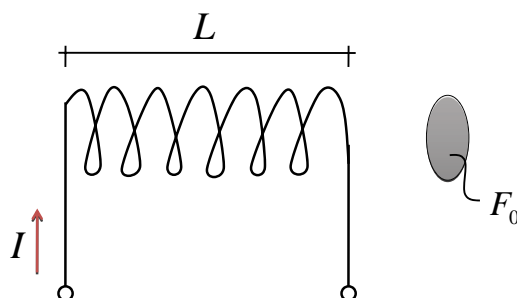


Abbildung 1.4.8: Selbstinduktivität einer Spule.

- Koaxialkabel

Betrachten wir ein Koaxialkabel in dem der Strom  $I$  auf dem Innenleiter mit Radius  $a$  in die eine und auf dem Außenleiter mit Radius  $b$  in die andere Richtung fließt. Das Magnetfeld im Innern am Ort  $r$  ist:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1.4.23)$$

Der magnetische Fluß ergibt sich über Integration von (siehe Abb. 1.4.6):

$$\Phi_m = \int_{\text{Fläche}} \vec{B} d\vec{F} = l \int_a^b B(r) dr = l \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (1.4.24)$$

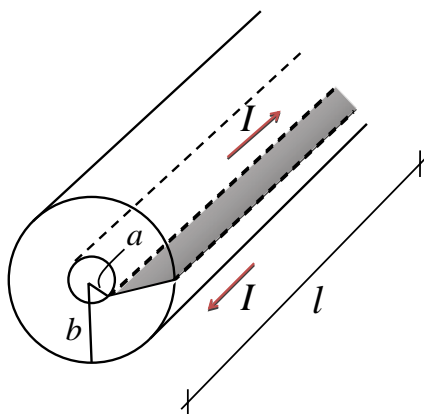


Abbildung 1.4.9: Selbstinduktivität eines Koaxialkabels.

Damit bekommen wir:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1.4.25)$$

Es ergibt sich die Induktivität eines Koaxialkabels von:

$$L_{\text{Koaxialkabel}} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1.4.26)$$

Neben der Selbstinduktion existiert auch die **Gegeninduktion**, die den Fall betrachtet, daß die Änderung des magnetischen Fluß, der in einer Anordnung (z.B. Spule 1) erzeugt wird in einer anderen Anordnung (z.B. Spule 2) eine Spannung induziert. Betrachten wir zwei Spulen 1 und 2 mit den Windungen  $N_1$  und  $N_2$ . Der Strom  $I_1$  in Spule 1 erzeugt einen magnetischen Fluß  $\Phi$  in Spule 2, der in  $N_2$  Windungen wirkt (Beispiel gemeinsamer Eisenkern). Man definiert eine **Gegeninduktivität**  $L_{12}$  gemäß:

$$\Phi_{21} = N_2 \Phi = L_{21} I_1 \quad (1.4.27)$$

Falls sich der Strom in der Spule 1 ändert, so erzeugt er eine induzierte Spannung  $U_{ind,2}$  in Spule 2 von:

$$-U_{ind,2} = \frac{d\Phi_{21}}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (1.4.28)$$

Aus Symmetriegründen erzeugt eine Stromänderung in Spule 2 eine induzierte Spannung  $U_{ind,1}$  in Spule 1 gemäß:

$$-U_{ind,1} = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = L_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (1.4.29)$$

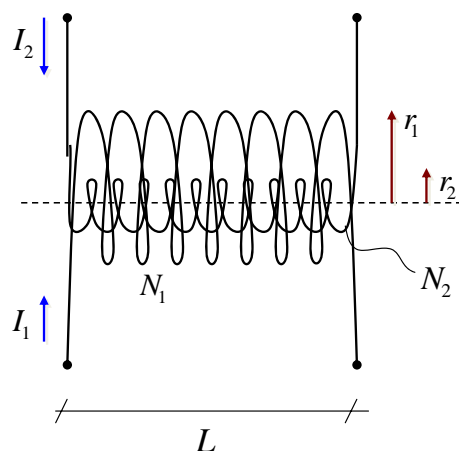
Berechnen wir die Gegeninduktivität für zwei ineinander liegende Spulen der Länge  $L$  mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  und den Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ . In der großen Spule fließt der Strom  $I_1$  und erzeugt einen Fluß  $\Phi_{21}$  in der kleineren Spule. Das Magnetfeld im Innern der großen Spule ist:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 \quad (1.4.30)$$

Dies erzeugt einen Fluß in der kleinen Spule:

$$\Phi_{21} = N_2 r_2^2 \pi \mu_0 \frac{N_1}{L} I_1 \quad (1.4.31)$$

Damit wird die Gegeninduktivität zu:



**Abbildung 1.4.10:** Gegeninduktivität zwischen zwei Spule, die ineinander liegen mit jeweils unterschiedlichen Radien  $r_1$  und  $R_2$  und Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ .

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2}{L L} L r_2^2 \pi \mu_0 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L L} V_{\text{kleine Spule}} \quad (1.4.32)$$

Es läßt sich analog zeigen, daß gilt:

$$L_{12} = L_{21} \quad (1.4.33)$$

Diese Gegeninduktivitäten werden in der Regel für die Beschreibung von Transformatoren verwendet (siehe unten).

## RL-Stromkreise

Das Faraday'sche Induktionsgesetz hat große Auswirkungen auf des Verhalten von Stromkreisen, die mit zeitabhängigken Strömen betrieben werden. Dies soll am einfachen Beispiel des Ein- und Ausschaltens einer Spule illustriert werden.

- **Einschaltvorgang**

Betrachten wir einen RL-Stromkreis wie in Abb. 1.4.11 illustriert. Die Spannungen, die über den Widerstand  $R$  und die Induktivität  $L$  abfallen sind:

$$U_1 = IR \quad (1.4.34)$$

$$U_2 = -U_{\text{ind}} \quad (1.4.35)$$

Nach der Maschenregel setzt sich die von außen angelegte Spannung  $U_0$  zusammen aus:

$$U_0 = IR - U_{ind} = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (1.4.36)$$

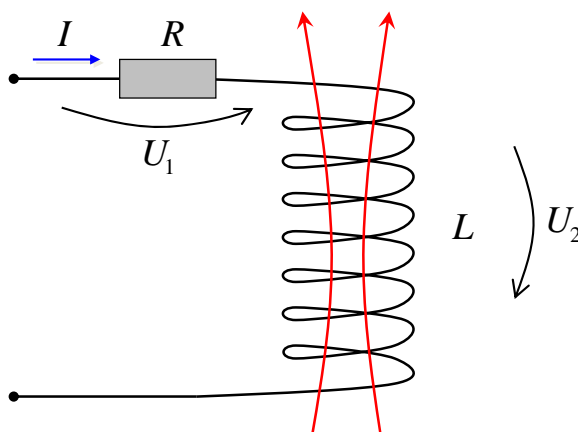


Abbildung 1.4.11: Einschalten einer Spule.

Die induzierte Spannung wirkt immer der äußeren Spannungsquelle entgegen. D.h. die Spannung, die den Strom durch den Widerstand treibt, ist effektiver geringer als  $U_0$ :

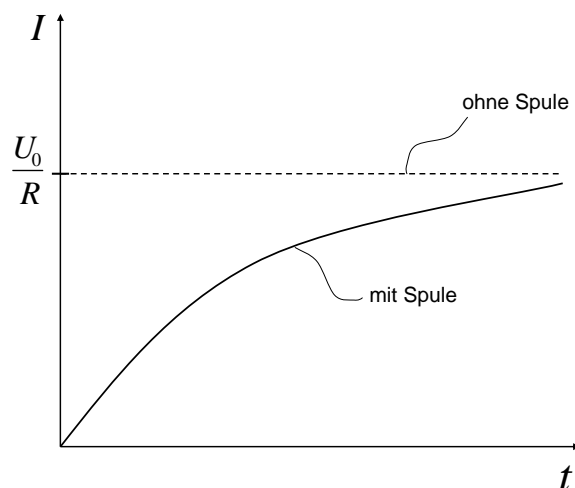
$$\underbrace{\left( U_0 - L \frac{dI}{dt} \right)}_{U_{eff}} = IR \quad (1.4.37)$$

Wie läßt sich dies illustrieren. Vor dem Einschalten ist der Strom gleich Null und damit der magnetische Fluß in der Spule gleich Null. Die induzierte Spannung versucht, diesen Zustand aufrecht zu erhalten: nach dem Einschalten ist die *Änderung* des Stromes groß und es wird eine große Spannung induziert, die  $U_0$  entgegen wirkt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $U_2 = U_0$ . D.h. die Spannungsdifferenz  $U_1$  nahe Null und der Absolutwert des Stromes  $I \simeq 0$ . Der Strom steigt langsam an und mit sinkender  $|\frac{dI}{dt}|$  sinkt auch die induzierte Spannung, die dem Stromfluß entgegen steht. Es ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (1.4.38)$$



D.h. der Strom steigt nur langsam an und erreicht erst lange nach dem Einschalten den Strom, den  $U_0 = RI$  vorgibt. Bei Gleichstrom wirkt die Spule wie ein normaler Leiter.



**Abbildung 1.4.12:** Stromvariation beim Einschalten einer Spule in Abb. 1.4.8.

- **Ausschaltvorgang**

Beim Ausschalten der Spule bei  $t = 0$  ist die äußere Spannungsquelle  $U_0$  gleich Null ( $t > 0$ ) und wir bekommen:

$$0 = IR - U_{ind} = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (1.4.39)$$

Dies läßt sich lösen und man erhält für den Strom ein einfaches exponentielles Abklingen:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1.4.40)$$

Vor dem Moment des Abschaltens fließt zunächst ein Strom der ein Magnetfeld in der Spule erzeugt. Nach dem Abschalten wird eine Spannung induziert, die versucht diesen magnetischen Fluß aufrecht zu erhalten. D.h. der Strom verschwindet nicht instantan mit dem Abschalten, sondern fällt nur exponentiell ab. Dies führt zur Frage woher dieser Strom geliefert wird, wo doch die Spannungsquelle/Stromquelle abgeschaltet

wurde! Die Lösung liegt in der Betrachtung der Spannungen, die sich einstellen.

Betrachten wir dazu einen etwas erweiterten Stromkreis wie in Abb. 1.4.13 illustriert. Die Spule selbst habe einen Eigenwiderstand  $R_L$  und parallel zur Spule sei ein Widerstand  $R_0$  geschaltet<sup>26</sup>. Zum Zeitpunkt  $t < 0$  liegt die Spannung  $U_0$  an und in den beiden Zweigen fließt ein Strom  $I_1$  und  $I_2$ . Der Widerstand  $R_0$  ist in der Regel sehr groß im Vergleich zu  $R_L$ , so daß  $I_2 \gg I_1$  gilt. Diese Ströme sind mit den Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  verknüpft wie:

$$U_1 = R_0 I_1 \quad (1.4.41)$$

$$U_2 = I_2 R_L - U_{ind} \quad (1.4.42)$$

Nach dem Abschalten der Spannungsquelle, verwenden wir die Knoten- und die Maschenregel und erhalten:

$$I_1 = -I_2 \quad (1.4.43)$$

$$-U_1 + U_2 = 0 \quad (1.4.44)$$

Wenn wir die Ströme und Spannung einsetzen, bekommen wir mit  $U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$

$$I_2 (R_0 + R_L) + L \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad (1.4.45)$$

Diese Differentialgleichung läßt sich lösen und man bekommt für den Strom  $I_2$ :

$$I_2(t) = I_2(t=0) \exp\left(-\frac{R_0 + R_L}{L} t\right) \quad (1.4.46)$$

Der Strom zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $I_2(t=0) = \frac{U_0}{R_L}$ . Dieser Strom stellt sich vor dem Abschalten ein, da die Spannung  $U_0$  sowohl über  $R_0$  als auch über die  $R_L$  abfallen muß ( $U_{ind} = 0$  für den Gleichstromfall vor dem Abschalten). Die induzierte Spannung ist gegeben als:

---

<sup>26</sup>Dieser Widerstand kann auch ein Innenwiderstand der Spannungsquelle sein

$$U_{ind} = I_2(t) = I_2(R_0 + R_L) = U_0 \frac{R_0 + R_L}{R_L} \exp\left(-\frac{R_0 + R_L}{L}t\right) \quad (1.4.47)$$

Damit ergibt sich die Spannung  $U_2$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  aus Gl. 1.4.42:

$$U_2 = -U_0 \frac{R_0}{R_L} \quad (1.4.48)$$

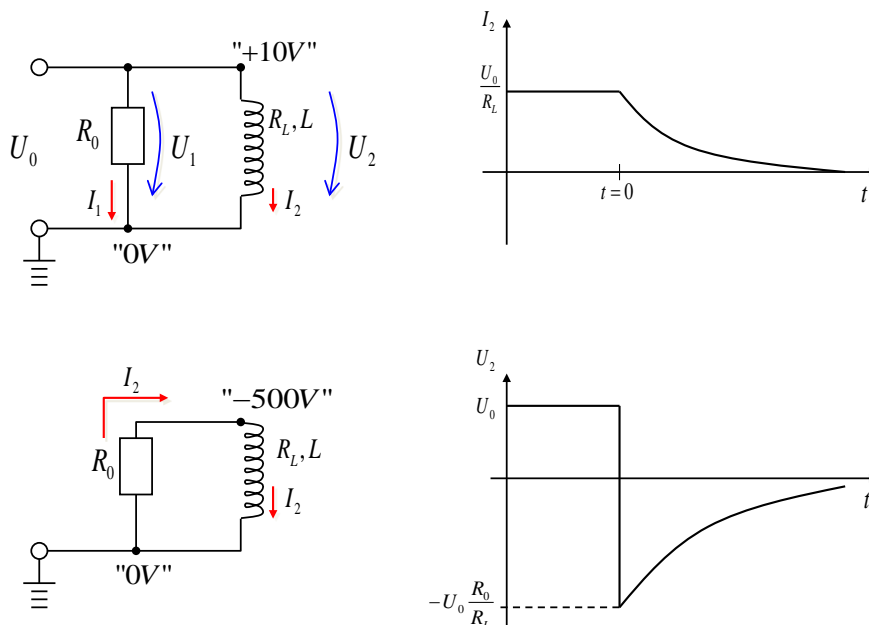
D.h. nach dem Abschalten einer *positiven* Spannung  $U_0$  entsteht eine *negative* Spannungsspitze, die umso größer ist, je größer der Unterschied der Widerstände  $R_0$  und  $R_L$  ist. Wie läßt sich dies anschaulich verstehen? Nach dem Abschalten erfordert die Lenz'sche Regel, daß der Strom durch die Spule  $I_2$  möglichst gut erhalten bleibt. Nachdem die externe Spannungsquelle abgeschaltet wird, kann der Strom *nur* noch über den Widerstand  $R_0$  von Masse her gezogen werden. D.h. der Strom  $I_1$  dreht sich im Vorzeichen um und die Spannung  $U_2$  muß soweit negativ werden, daß der Strom  $I_2$  über den Widerstand  $R_0$  nachgeliefert wird. Wenn der Widerstand  $R_0$  klein ist, entstehen sehr hohe Spannungen, die auch zu einer Zerstörung von Bauteilen führen kann!

Solche Spannungsspitzen werden zum Beispiel beim Zünden von Leuchtstoffröhren genutzt. In jeder Leuchtstoffröhre befindet sich eine kleine Spule als Starter. Zunächst fließt ein hoher Strom durch diese Spule. Parallel zur Leuchtstoffröhre, fließt dieser Strom über einen Bimetallstreifen ab. Erwärmt sich dieser Bimetallstreifen, öffnet dieser und der Stromfluß wäre unterbrochen. Allerdings bildet sich eine hohe induzierte Spannung, die versucht diesen Stromfluß durch die Spule weiter aufrecht zu erhalten. Die Spannungen von mehreren kV reichen dann aus um das Plasma in der Leuchtstoffröhre zu zünden und der Strom kann wieder fließen. Ähnliches wird auch bei der Zündspule in einem Auto ausgenutzt.

### Energiedichte des Magnetfeldes

Aus der Betrachtung von Induktivitäten läßt sich die Energiedichte des Magnetfeldes ableiten, analog zur Betrachtung der Energiedichte des elektrischen Feldes bei der Analyse von Kapazitäten. Die induzierte Spannung z.B. in einer Spule der Induktivität  $L$  ist gegeben als:

$$U_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \quad (1.4.49)$$



**Abbildung 1.4.13:** Änderung von Strom und Spannung beim Ausschalten einer Spule. Die eine Seite des Stromkreises liege auf Masse. Vor dem Abschalten ist die Spannung am Eingang des Stromkreises auf z.B. 10 V. Nach dem Ausschalten wird eine stark negative Spannung induziert und der Strom  $I_1$  dreht seine Richtung um.

Diese Spannung wirkt der Stromänderung immer entgegen, d.h. wir müssen Arbeit leisten, um die Ladung  $Q$  zu transportieren:

$$W = -U_{ind}Q \quad (1.4.50)$$

D.h. die Arbeit ändert sich gemäß:

$$\frac{dW}{dt} = -U_{ind} \frac{dQ}{dt} = -U_{ind}I \quad (1.4.51)$$

bzw.

$$\frac{dW}{dt} = L \frac{dI}{dt} I \quad (1.4.52)$$

und

$$dW = LI dI \quad (1.4.53)$$

Wir integrieren von  $I = 0$  bis zu einem Strom  $I_0$  und bekommen:

$$W = \int_{I=0}^{I=I_0} LI dI = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (1.4.54)$$

Man kann diese Arbeit auch als "kinetische Energie"  $E_{mag}$  auffassen, da die Arbeit geleistet werden mußte um Ladungsträger zu beschleunigen ( $dI/dt$ ). Diese Energie läßt sich zur Energiedichte des magnetischen Feldes verallgemeinern. Betrachten wir dazu zunächst die Induktivität einer Spule:

$$L_{Spule} = \mu_0 V \left( \frac{N}{L} \right)^2 \quad (1.4.55)$$

Damit wird die Energie zu:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \mu_0 V \left( \frac{N}{L} \right)^2 I_0^2 \quad (1.4.56)$$

mit  $B = \mu_0 \frac{N}{L} I_0$  einer Spule ergibt sich:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 V \quad (1.4.57)$$

schließlich die Energiedichte zu:

$$w_{mag} = \frac{E_{mag}}{V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (1.4.58)$$

Man erkennt, daß die gesamte Energiedichte  $w_{em}$  des elektrischen und des magnetischen Feldes geschrieben werden kann als:

$$w_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (1.4.59)$$

Dies kann analog zur Mechanik wieder als Energiesatz der Elektrizitätslehre interpretiert werden, der besagt, daß die Energie in potentieller Form d.h. im Speichern von Ladung an einem Ort oder in Form von kinetischer Energie als der Bewegung von Ladungsträgern vorliegen kann. In einem Schwingkreis tauschen sich die elektrische und die magnetische Energie zum Beispiel in einer Oszillationsperiode aus, analog zum Austausch mechanischer und kinetischer Energie bei einem Pendel.

Die gespeicherte Energie im Magnetfeld einer Induktivität wird zum Beispiel beim Abschalten einer Spule wieder frei. Dazu betrachten wir die Leistung, die in einem Widerstand dissipiert wird über den der Strom gemäß Gl. 1.4.40 aus der Spule abfließt (siehe Abb. 1.4.14):

$$P = I^2 R = RI_0^2 e^{-2\frac{R}{L}t} = \frac{dW}{dt} \quad (1.4.60)$$

Wenn wir jetzt die Änderung der Arbeit mit der Zeit über diesen Abschaltvorgang integrieren, so bekommen wir:

$$W = \int_{t=0}^{\infty} RI_0^2 e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (1.4.61)$$

Man sieht, daß die geleistete Arbeit identisch mit der in der Induktivität gespeicherten Energie ist.

## 1.4.2 Verschiebungsstrom

Betrachten wir den Stromfluß in einer Masche, die eine Kapazität enthält (siehe Abb. 1.4.14). Bei einer Stromquelle, die Gleichstrom produziert, lädt sich der Kondensator auf und der Stromfluß kommt damit zum Erliegen. Betreibt man diesen Kondensator mit Wechselstrom, so wird der Kondensator fortlaufend geladen bzw. entladen. Diese Verschiebung von Ladungsträgern, setzt sich auf der anderen Seite des Kondensators fort. D.h. ein Wechselstrom kann ungehindert eine Kapazität passieren! Ist dies im Einklang mit dem Ampere'schen Gesetz?

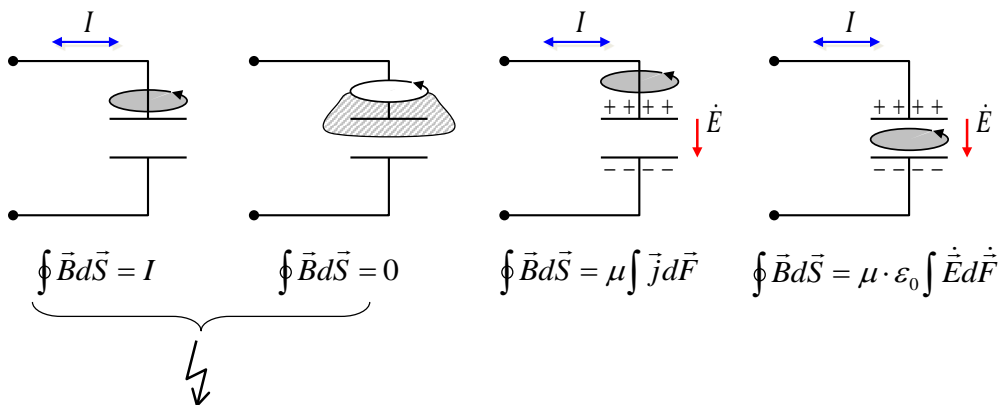
Wir betrachten einen Kondensator und ermitteln das magnetische Feld. Falls wir eine einfache Kreisfläche wählen durch die eine der Zuleitungen des Kondensators tritt, so läßt sich das Ampere'sche Gesetz einfach anwenden. Falls wir allerdings eine Fläche wählen, deren Rand identisch mit der ersten Kreisfläche ist, die aber durch die Mitte des Kondensators läuft, so tritt *keine* Zuleitung durch diese Fläche. Bei Gleichstrom ist dies kein Problem, da durch die Kapazität kein Strom fließt und die rechte Seite des Ampere'schen Gesetzes zu Null gesetzt werden kann. Bei Wechselstrom setzt sich allerdings der Stromfluß über die Kapazität hin fort! Trotzdem sollte auch jetzt das Ampere'sche Gesetz dasselbe Magnetfeld ergeben *unabhängig* von der Wahl der Fläche, die von ein und derselben Kurve berandet wird. Dies läßt sich nur auflösen, wenn man bedenkt, daß ein zeitlich veränderliches elektrische Feld auch einem Stromfluß entspricht, dem **Verschiebungsstrom**.

Dazu betrachten wir den Strom bei Laden und Entladen des Kondensators. Die aufgebrachte Ladung erzeugt ein elektrisches Feld in dem Plattenkondensator der Fläche  $F$ :

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 F} \quad (1.4.62)$$

D.h. die Änderung der Ladung  $Q$  läßt sich als Änderung des elektrischen Feldes  $E$  umformulieren:

$$\vec{I} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 F \vec{E}) \tag{1.4.63}$$



**Abbildung 1.4.14:** Wenn man einen Kondensator an einer Wechselstromquelle betrachtet, so kann man einen pathologischen Fall für das Ampere'sche Gesetz konstruieren, bei der der Leiter die umschlossene Fläche einmal durchdringt und einmal nicht, obwohl die Begrenzung der Fläche identisch bleibt. Dieser Widerspruch läßt sich durch die Einführung des Verschiebungsstroms auflösen, der ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld berücksichtigt.

Wir erkennen, daß sich eine Stromdichte  $j = \frac{I}{F}$  ergibt von:

$$\vec{j} = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \tag{1.4.64}$$

D.h. das Ampere'sche Gesetz läßt sich zu einer allgemeinen Form erweitern, die auch zeitabhängige Effekte berücksichtigt:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_{\text{Fläche}} \vec{j} d\vec{F} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{\text{Fläche}} \frac{d\vec{E}}{dt} d\vec{F} \tag{1.4.65}$$

bzw. in seiner differentiellen Form:

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \tag{1.4.66}$$

Mit dieser Gleichung läßt sich der Widerspruch auflösen. Betrachten wir dazu wieder die Abb. 1.4.14. Falls die Fläche auf dessen Rand das B-Feld bestimmt werden soll von einer Zuleitung durchtreten wird, so benutzen wir

$$\mathbf{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad (1.4.67)$$

Falls wir denselben Rand der Fläche nehmen (sprich dasselbe Magnetfeld) aber die Fläche in der Mitte des Kondensators schließen, so benutzen wir:

$$\mathbf{rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt} \quad (1.4.68)$$

Nachdem der Strom in dem Wechselstromkreis identisch bleibt gilt  $\mu_0\vec{j} = \mu_0\epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}$ . D.h. die Verwendung beider Flächen mit dem gleichen Rand ergeben dasselbe Magnetfeld.

Magnetfelder können durch Ströme von Ladungsträgern und durch Verschiebungsströme erzeugt werden gemäß:

$$\mathbf{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt} \quad (1.4.69)$$

Dieser Zusammenhang wurde aus der Stromerhaltung abgeleitet, da der Wechselstrom von der einen Seite des Kondensators über ein oszillierendes elektrisches Feld zwischen den Kondensatorplatten auf die andere Seite übertragen wird. Diese *Stromerhaltung* läßt sich direkter ableiten, wenn man von Gl. 1.4.69 die Divergenz bildet:

$$\mathbf{div}\mathbf{rot}\vec{B} = \mu_0\mathbf{div}\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\mathbf{div}\vec{E} \quad (1.4.70)$$

mit  $\mathbf{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$  und der Tatsache, dass der Ausdruck  $\mathbf{div}\mathbf{rot}\vec{B} = 0$  ergibt, bekommt man:

$$0 = \mu_0\mathbf{div}\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (1.4.71)$$

Dies entspricht der sogenannten Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{0 = \mathbf{div}\vec{j} + \frac{d\rho}{dt}} \quad (1.4.72)$$

### 1.4.3 Maxwellgleichungen

Abschließend wollen wir die Grundgleichungen der Elektrodynamik zusammenfassen, die **Maxwellgleichungen**. Aus ihnen lassen sich *alle* Phänomene der Elektrizitätslehre ableiten. In ihrer integralen Form ergeben sich:



$$\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{E} d\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{Volumen}} \rho dV \quad (1.4.73)$$

$$\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{B} d\vec{F} = 0 \quad (1.4.74)$$

$$\oint_{\text{Weg}} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{Fläche}} \vec{B} d\vec{F} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.4.75)$$

$$\oint_{\text{Weg}} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_{\text{Fläche}} \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) d\vec{F} \quad (1.4.76)$$

Diese integrale Schreibweise eignet sich insbesondere für die Behandlung der Probleme der Elektro- und der Magnetostatik bzw. der allgemeinen Berechnung von elektrischen und magnetischen Feldern.

Durch die Anwendung des Gauß'schen Satzes und des Satzes von Stokes lassen sich die Maxwellgleichungen auch in einer differentiellen Form formulieren.

$$\mathbf{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.4.77)$$

$$\mathbf{div} \vec{B} = 0 \quad (1.4.78)$$

$$\mathbf{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (1.4.79)$$

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad (1.4.80)$$

Diese Gleichungen müssen an jedem Ort im Raum erfüllt sein. Sie eignen sich besonders gut für die Behandlung von lokalen Problemen wie der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen oder Störungen in einem gegebenen System aus Ladungen.

#### 1.4.4 Schwingkreise

Als Anwendung der Zeitabhängigkeit der elektrischen und magnetischen Felder wollen wir einfache Schwingkreise betrachten, die aus einer Kombination von Induktivitäten und Kapazitäten bestehen.

### Freier Schwingkreis

Es sei ein freier Schwingkreis gegeben gemäß der Schaltung wie in Abb. 1.4.15 illustriert. Die Spannungen, die über den einzelnen Bauelementen abfallen sind:

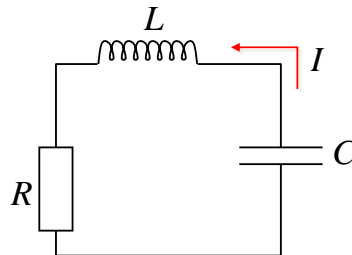


Abbildung 1.4.15: Freier Schwingkreis.

$$U_L = -U_{ind} = L \frac{dI}{dt} \quad (1.4.81)$$

$$U_R = IR \quad (1.4.82)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (1.4.83)$$

Nach der Maschenregel  $U_L + U_R + U_C = 0$  ergibt sich:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1.4.84)$$

Wenn wir diese Gleichung einmal nach der Zeit ableiten erhalten wir:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{dI}{dt} R + \frac{1}{C} I = 0 \quad (1.4.85)$$

Man erkennt die allgemeine Form einer Schwingungsgleichung, die für eine Feder als

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + cx = 0 \quad (1.4.86)$$

gegeben ist. Ein Vergleich zeigt, daß die Induktivität  $L$  der *Trägheit* entspricht,  $R$  der *Dämpfung* der Schwingung und  $1/C$  der *Federkonstante*. Wir teilen jeweils durch die Induktivität  $L$  und bekommen:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2} I = 0 \quad (1.4.87)$$

Aus der Lösung einer allgemeinen Schwingungsgleichung wissen wir, daß die Eigenfrequenz des Schwingkreises als

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (1.4.88)$$

gegeben ist. Für den einfachen Fall einer ungedämpften Schwingung ( $R=0$ ) bekommen wir:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0 \quad (1.4.89)$$

Diese Gleichung besitzt als eine Lösung  $I = I_0 \cos \omega_0 t$ . Im folgenden wollen wir den Verlauf dieser Schwingung in einem einfachen LC-Schwingkreis beschreiben, wie in Abb. 1.4.16 illustriert: (i) bei der Phase  $\omega t = \pi/2$  befinden sich die Ladungen auf dem Kondensator und die Energie ist in Form des elektrischen Feldes gespeichert; der Stromfluß ist Null und die Spannung maximal; (ii) nachdem die beiden Seiten des Kondensators über die Spule verbunden sind, fließen die Ladungen von dem Kondensator ab und es baut sich ein Strom auf. Bei Phase  $\omega t = \pi$  ist der Strom maximal und die Energie im magnetischen Feld gespeichert, der Kondensator ist ungeladen und die Spannung ist Null. Allerdings baut sich mit der Stromänderung eine induzierte Spannung an der Spule auf. Diese induzierte Spannung ist dem Stromfluß *entgegen* gerichtet; (iii) d.h. die Polarität des Kondensators bei Phase  $\omega t = 3/2\pi$  hat sich umgedreht und die Energie ist in Form des elektrischen Feldes gespeichert, das diesmal aber in die andere Richtung zeigt; Der Strom ist wieder Null. (iv) bei Phase  $\omega t = 2\pi$  fließen die Ladungen wieder ab und der Strom durchläuft ein Maximum wobei die Energie im magnetischen Feld gespeichert ist. Man erkennt, daß in einem LC-Schwingkreis die elektrische und die magnetische Feldenergie sich austauschen. Dies ist analog zu einem mechanischen Pendel bei dem sich kinetische und potentielle Energie austauschen. Bei einem LC-Schwingkreis tauschen sich Strom und Spannung aus.

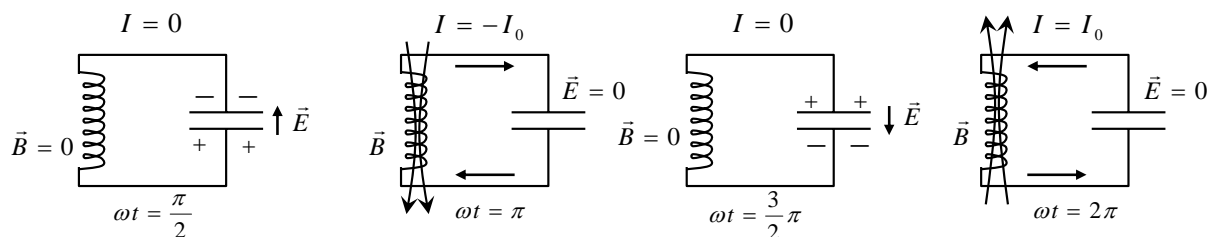
Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (1.4.90)$$

wird analog zur Behandlung von mechanischen Schwingungen abgeleitet<sup>27</sup>. Als Ansatz verwenden wir:

$$I = Ae^{\lambda t} \quad (1.4.91)$$

<sup>27</sup>siehe Kapitel 2.7 Skript Physik I.



**Abbildung 1.4.16:** Wechsel zwischen gespeicherte Energie im elektrischen und magnetischen Feld bei der Oszillation eines LC-Schwingkreises.

wobei  $A$  und  $\lambda$  beliebige komplexe Zahlen sein können. Als Bedingung für  $\lambda$  erhält man:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.4.92)$$

mit den zwei Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (1.4.93)$$

D.h. der allgemeine Ausdruck für die Zeitabhängigkeit des Stromes ist:

$$I = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.4.94)$$

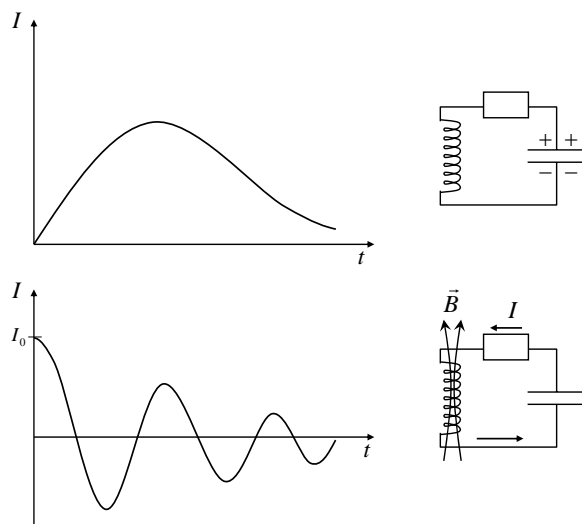
Je nach den Parametern des Schwingkreises können sich jetzt unterschiedliche Lösungen einstellen:

- **Kriechfall**,  $R^2/(4L^2) \gg 1/(LC)$ ,  $\lambda$  reell

Falls der Widerstand sehr groß ist, ist der Schwingkreis sehr stark gedämpft. Damit wird die Lösung für  $\lambda$  reell und man bekommt eine exponentielle Variation des Stromes. Falls der Anfangszustand des Schwingkreises durch einen geladenen Kondensator gegeben ist, so steigt der Strom zunächst, fällt dann aber unendlich langsam wieder auf den Wert Null ab. Dies bezeichnet man als **Kriechfall**, wie in Abb. 1.4.17 illustriert.

- **schwach gedämpfte Schwingung**,  $R^2/(4L^2) < 1/(LC)$ ,  $\lambda$  komplex

Falls der Widerstand klein ist, bekommen wir eine schwach gedämpfte Schwingung, deren Amplitude exponentiell abfällt. Der Strom hat die Lösung:



**Abbildung 1.4.17:** Variation des Stromes beim Kriechfall und bei der schwach gedämpften Schwingung eines Serienschwingkreises.

$$I = e^{-\alpha t} [A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}] \quad (1.4.95)$$

mit  $\alpha = R/(2L)$  und

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (1.4.96)$$

Der Verlauf des Stromes ist in Abb. 1.4.17 für die Anfangsbedingung illustriert, daß bei  $t = 0$  der Strom maximal ist und die Energie im Schwingkreis zunächst im magnetischen Feld gespeichert ist.

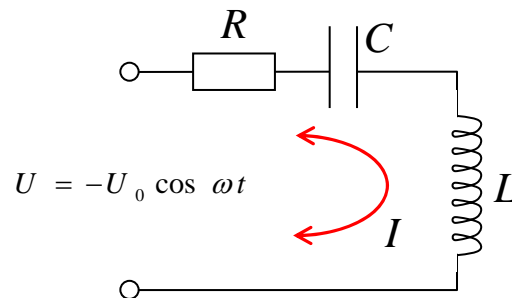
### Erzwungene Schwingungen

Eine Schwingung läßt sich auch von außen anregen. Als einfachste Anordnungen unterscheidet man Serien- und Parallelschwingkreise:

- **Serienschwingkreis**

Gegeben sei eine serielle Anordnung von einem Widerstand, einer Kapazität und einer Induktivität, wie in Abb. 1.4.18 illustriert. Die Maschenregel eines freien Schwingkreises liefert:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1.4.97)$$



**Abbildung 1.4.18:** Ein Serienschwingkreis, der durch eine externe Spannungsquelle getrieben wird.

Falls wir eine externen Spannungsquelle anschließen, die eine Spannung  $U = -U_0 \cos \omega t$  liefert, wird die Gleichung erweitert zu:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = -U_0 \cos \omega t \quad (1.4.98)$$

Um dies auf die Form einer Schwingungsgleichung zu bringen, müssen wir allerdings einmal nach der Zeit ableiten und erhalten

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{U_0 \omega}{L} \sin \omega t \quad (1.4.99)$$

Wir definieren die Größen  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  und die Abklingzeit  $\tau$  der Schwingung gemäß  $\frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$ . Man bekommt:

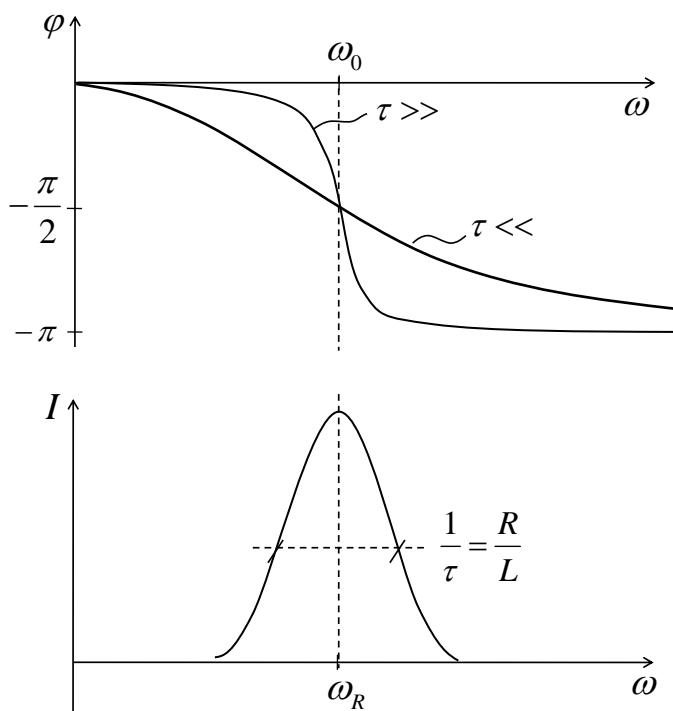
$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \frac{U_0 \omega}{L} \sin \omega t \quad (1.4.100)$$

Diese Gleichung wird durch den Ansatz  $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$  gelöst. Für die Amplitude  $I_0$  und die Phase  $\varphi$  bekommen wir:

$$\tan \varphi = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.4.101)$$

$$I_0 = \frac{\frac{U_0 \omega}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad (1.4.102)$$

Man erkennt, daß in der Nähe von  $\omega \rightarrow \omega_0$  der Ausdruck  $\tan \varphi$  gegen  $-\infty$  läuft, d.h. der Phasenwinkel  $\varphi = -\pi/2$ . Die von außen angelegte Spannung war  $U = -U_0 \cos \omega t$ , die in der Resonanz einen Strom  $I = I_0 \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -I_0 \cos(\omega t)$  antreibt. Man erkennt, daß die von außen angelegte Spannung und der Strom in Phase sind! Wie weiter unten noch gezeigt wird, sind Strom und Spannung an einer Kapazität bzw. an einer Induktivität um jeweils  $\pm\pi/2$  gegeneinander verschoben. D.h. an einer Induktivität eilt die Spannung dem Strom um  $\pi/2$  voraus, während sie bei einer Kapazität um  $\pi/2$  hinterher hinkt. In einem Serienschwingkreis bei der Resonanz sind zwar anregende Spannung und Strom in Phase aber an der Kapazität ist die Spannung  $U_C$  um  $-\pi/2$  gegenüber  $U_0$  bzw. an der Induktivität  $U_L$  um  $+\pi/2$  verschoben. Die Phasen der Spannungen zwischen Induktivität und Kapazität im Serienschwingkreis sind um  $\pi$  gegeneinander verschoben.



**Abbildung 1.4.19:** Variation des Stromamplitude  $I$  und der Phase  $\varphi$  zur anregenden Spannung  $U_0$  mit der Frequenz  $\omega$  in der ein RLC-Schwingkreis getrieben wird.

Dies ist analog zu einem mechanischen Schwingkreis, bei der die Amplitude der anregenden Kraft eines Pendels um  $90^\circ$  gegen die Amplitude

des Pendels selber verschoben ist. Beim Schwingkreis sind  $U_0$  und  $U_C$  bzw.  $U_L$  um  $\mp 90^\circ$  gegeneinander verschoben. Dieses Verhalten ist in Abb. 1.4.20 illustriert. Nachdem die Spannungen an der Induktivität und der Kapazität um  $\pi$  gegeneinander verschoben sind, kann eine kleine äußere Anregung  $U_0$  eine hohe Schwingungsamplitude  $U_L$  bzw.  $U_C$  im Schwingkreis anregen. Amplitude  $I_0$  und die Phase  $\varphi$  sind in Abb. 1.4.19 gezeigt. Man erkennt, daß auch die Amplitude  $I_0$  maximal bei  $\omega_0$  wird.

Die maximale Amplitude  $I_{max}|_{\omega=\omega_0}$  bei der Resonanz ergibt<sup>28</sup>:

$$I_{max}|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_0 \omega_0 \frac{1}{L}}{\frac{\omega_0}{\tau}} = \frac{U_0}{R} \quad (1.4.103)$$

D.h. eine kleine externe Anregung  $U_0$  kann einen großen Strom in dem Schwingkreis antreiben, wenn der Widerstand entsprechend *klein* ist. Bei jeder Schwingung muß der Strom allerdings den Widerstand  $R$  passieren. Die Leistung die dort verbraucht wird ist:

$$P = UI = I^2 R \quad (1.4.104)$$

D.h. in der Resonanz wird auch die meiste elektrische Leistung in dem Schwingkreis dissipiert. Bei dem Serienschwingkreis wird das System mit einer *kleinen* Spannung  $U_0$  und einem großen Strom  $I$  angeregt. Durch diese Anregung speichert man im Schwingkreis selber einen großen Strom  $I$  und eine große Spannung  $U_L$  bzw.  $U_C$ .

Für einen Schwingkreis läßt sich die Güte definieren als die Amplitude der Spannung, die sich an der Induktivität oder der Kapazität bei  $\omega_0$  einstellt im Vergleich zur anregenden Spannung  $U_0$ .

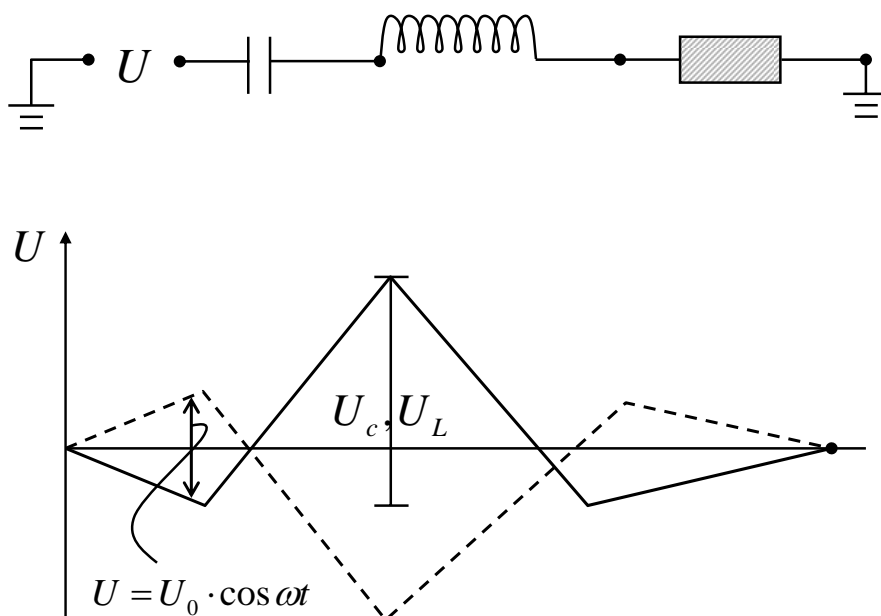
$$Q = \frac{U(\omega = \omega_0)}{U(\omega = 0)} \quad (1.4.105)$$

Wie wir beim freien Schwingkreis gezeigt haben ist in der Periode der Resonanz einmal die Spannung an der Induktivität und einmal die an der Kapazität maximal. Das heißt wir können setzen:

---

<sup>28</sup>Vergleicht man die Amplitude mit der einer mechanischen Schwingung, so erkennt man daß der Strom  $I_0$  für  $\omega \rightarrow 0$  auch gegen Null läuft, während beim einem mechanischen Pendel die Auslenkung bei sehr kleiner Frequenz gleich der Auslenkung der anregenden Kraft ist. Bei der Ableitung der Schwingungsgleichung für den Schwingkreis haben wir allerdings die erste Ableitung der anregenden Spannungsquelle benutzt! Diese ist für kleine Frequenzen auch Null und demnach ergibt sich eine kleine Stromamplitude.





**Abbildung 1.4.20:** Spannungen entlang einer Serienschwingkreises. Nachdem die Spannungen an der Induktivität und der Kapazität um  $180^\circ$  gegeneinander verschoben sind, kann eine kleine äußere Anregung  $U_0$  eine hohe Schwingungsamplitude im Schwingkreis anregen.

$$U = -U_{ind} = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \cos(\omega t + \varphi) = U_L^0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.4.106)$$

Mit der maximalen Spannung  $U_L^0|_{max}$ , die über die Induktivität abfällt von:

$$U_L^0|_{max} = \omega_0 L I_0|_{max} = \omega_0 \frac{L}{R} U_0 \quad (1.4.107)$$

Somit ergibt sich eine Güte des Schwingkreises von:

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \omega_0 \tau \quad (1.4.108)$$

D.h. bei großem  $L$  und kleinem  $R$  bekommen wir eine Schwingung großer Amplitude, da der oszillierende Strom kaum über  $R$  dissipiert wird und das große  $L$  eine hohe induzierte Spannung bedingt.

- **Parallelschwingkreis**

Betrachten wir jetzt den entgegen gesetzten Fall eines Parallel-Schwingkreises, wie in Abb. 1.4.20 illustriert. Wir bekommen:

$$U = U_R = U_C = U_L \quad (1.4.109)$$

$$I = I_R + I_C + I_L \quad (1.4.110)$$

Für jedes Bauteil gilt als Verknüpfung zwischen Spannung und Strom:

$$U_R = RI_R \quad (1.4.111)$$

$$U_C = \frac{Q}{C} \rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C}I_C \quad (1.4.112)$$

$$U_L = -U_{ind} = L\frac{dI_L}{dt} \quad (1.4.113)$$

Um eine Schwingungsgleichung abzuleiten müssen wir allerdings diesmal die Knotenregel einmal nach der Zeit ableiten:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_R}{dt} + \frac{dI_C}{dt} + \frac{dI_L}{dt} \quad (1.4.114)$$

und die jeweiligen Ströme einsetzen. Mit dem Ansatz  $I = -I_0 \cos(\omega t + \varphi)$  bekommen wir schließlich:

$$\omega I_0 \sin \omega t = \frac{1}{R}\dot{U} + C\ddot{U} + \frac{1}{L}U \quad (1.4.115)$$

Wir teilen beide Seiten durch  $C$  und erhalten diesmal eine Differentialgleichung für die Spannung:

$$\ddot{U} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{\frac{1}{\tau}}\dot{U} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}U = \frac{\omega I_0}{C}\sin \omega t \quad (1.4.116)$$

Diese läßt sich analog lösen zu:

$$\tan \varphi = \frac{-\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.4.117)$$

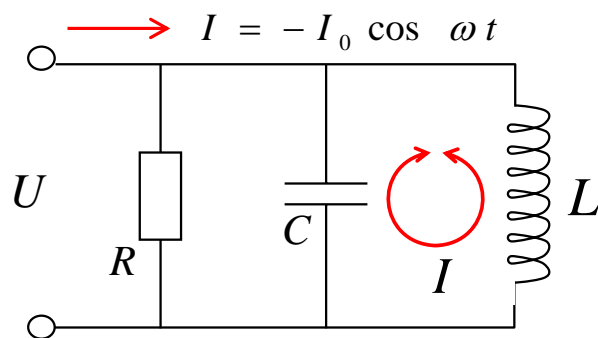
$$U_0 = \frac{\frac{I_0 \omega}{C}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad (1.4.118)$$

Man erkennt, daß ein kleiner eingepprägter Strom  $I_0$  zu einer großen Spannung  $U_0$  in der Resonanz führen kann. Bei einem Parallel-Schwingkreis wird ein *kleiner* Strom und eine *große* Spannung eingepprägt. Der Strom oszilliert dann im wesentlichen zwischen der Induktivität und der Kapazität.

Die Güte des Resonators ist wieder durch

$$Q = \omega_0 \tau = \omega_0 RC \quad (1.4.119)$$

gegeben. Man erkennt allerdings, daß jetzt die Güte bei *großem* Widerstand  $R$  sehr hoch wird im Gegensatz zum Serienschwingkreis! Im Parallelschwingkreis muß der Strom in der Resonanz *nicht* über den Widerstand laufen. Allerdings verliert die Kapazität über den Widerstand gespeicherte Ladung. Wenn dieser Widerstand groß ist, kann die Kapazität diese Ladung gut halten und es stellt sich eine große Spannung in der Resonanz ein.



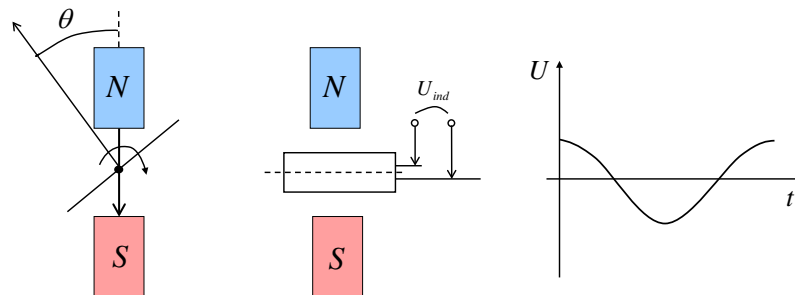
**Abbildung 1.4.21:** Parallel-Schwingkreis, der durch eine Stromquelle getrieben wird.

## 1.5 Wechselstrom

Die wichtigste Anwendung von zeitabhängigen elektrischen und magnetischen Feldern ist die Erzeugung von Wechselstrom bzw. -spannung in einem Generator und damit die Umwandlung von mechanischer Energie in elektrische Energie. Dieser Wechselstrom wird in elektrotechnischen Anlagen verwendet wobei das zeitabhängige Verhalten der Bauteile die Größen von Strom und Spannung sowie deren Phasenverschiebung untereinander bestimmt.

### 1.5.1 Erzeugung von Wechselstrom - Gleichstrom

Betrachten wir zuerst die Erzeugung von Wechselspannung in einem Generator bei dem eine Leiterschleife (Rotor) in einem magnetischen Feld gedreht wird, wie in Abb. 1.5.1 illustriert ist. Dabei wird eine Spannung induziert, die einen Strom antreibt, der ein Magnetfeld erzeugt, der dieser Bewegung *entgegen* steht, d.h. für die Verdrehung, muß mechanische Arbeit aufgewendet werden, die in den Stromtransport umgesetzt wird. Diese induzierte Spannung ist:



**Abbildung 1.5.1:** Bewegt sich eine Leiterschleife in einem magnetischen Feld, so wird eine Wechselspannung induziert.

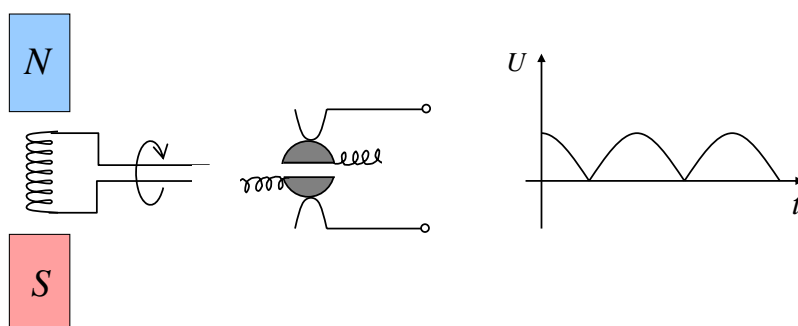
$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int_{Fläche} \vec{B} d\vec{F} = -\frac{d}{dt} BF \cos \theta \quad (1.5.1)$$

mit der Fläche  $F$ . Falls wir den Winkel  $\theta$  mit einer gleichförmigen Frequenz  $\omega$  drehen, so bekommen wir mit  $\theta = \omega t$  eine Spannung an dem Generator der Form.

$$\boxed{U_{ind} = \omega BF \sin \omega t} \quad (1.5.2)$$

Man erkennt, daß die Spannung umso größer wird, je größer die Fläche  $F$ , das Magnetfeld  $B$  oder die Frequenz  $\omega$  der Rotation ist. Über Schleifkontakte wird die Spannung  $U_{ind}$  abgegriffen und an einen entsprechenden Verbraucher angeschlossen.

Ein Wechselstromgenerator läßt sich einfach in eine Gleichstromquelle umwandeln, indem man die Schleifkontakte über einen geteilten Ring laufen läßt, der die Polarität im richtigen Moment umdreht. Diesen geteilten Ring auf der Achse bezeichnet man als **Kommutator**. Dabei entsteht eine Spannung wie sie in Abb. 1.5.2 illustriert ist, die im Mittel immer eine eindeutige Polarität hat.



**Abbildung 1.5.2:** Über einen Kommutator wird eine im Mittel positive Spannung abgegriffen.

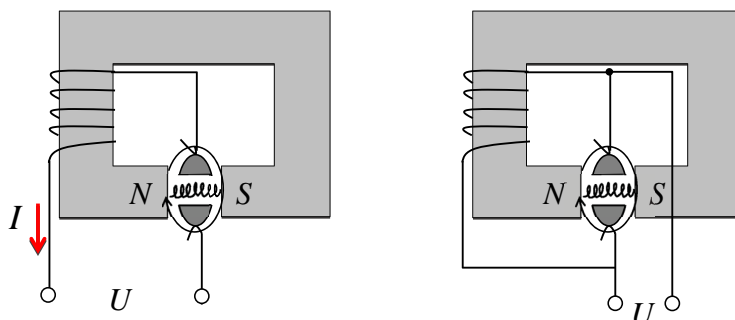
Für die technische Realisierung kann diese Gleichspannung noch weiter geglättet werden, indem man eine große Zahl von Windungen  $N$ -mal gegeneinander versetzt auf der Rotorachse anordnet und einen Kommutator mit  $N$  Unterteilungen wählt. Damit bekommt man eine Spannung, die von derjenigen Spule dominiert wird, die gerade die maximale induzierte Spannung zeigt.

Wie oben gezeigt wurde, ist die Spannung zudem auch von dem Magnetfeld abhängig in dem der Rotor bewegt wird. Hierzu gibt es zwei Anordnungen, die Hauptschluß- und die Nebenschlußmaschine (siehe Abb. 1.5.3):

- **Hauptschlußmaschine**

Bei der sog. Hauptschlußmaschine wird eine Zuleitung um das Eisenjoch geführt, das das stationäre Magnetfeld erzeugt in dem der Rotor bewegt wird. Wenn der Generator einen großen Strom liefern muß (große Last), so wird auch das Magnetfeld entsprechend stärker und die Leistung des Generators steigt. Eine solche Maschine ist somit der Last

angepasst. Allerdings ist die ausgegebene Spannung starken Schwankungen unterworfen.



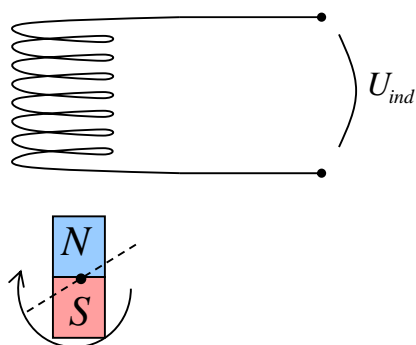
**Abbildung 1.5.3:** Gleichstromgenerator in Hauptschluß und Nebenschlußanordnung.

- **Nebenschlußmaschine**

In einer Nebenschlußmaschine wird nur ein Teil des Stromes zur Magnetisierung des Eisenjoches verwendet. Damit stellt sich eine gleichmäßigere Spannung ein. Allerdings passt sich die Leistung dieses Generators nicht sehr effizient der Last an.

Bei der Erzeugung von Wechselstrom kann man auf einen Kommutator verzichten und kann direkt die Windungen über ungeteilte Schleifkontakte abgreifen. Hierbei ist es sinnvoller, die Spule in der die Spannung induziert wird fest zu halten (Stator) und stattdessen den Magneten zu bewegen (siehe Abb. 1.5.4). Dadurch kann man Generatoren für sehr hohe Ströme bauen, bei denen diese nicht über einen Schleifkontakt nach außen geführt werden müssen. Man unterscheidet **Selbsterregung** (d.h. ein Permanentmagnet wird gedreht) und **Fremderregung**. Bei letzterem wird eine Spule im Stator gedreht, die mit Gleichspannung und Kommutator magnetisiert wird. Der Strom in der Rotorspule kann klein bleiben und somit steht der Verwendung von Schleifkontakten nichts im Wege.

Die Realisierung eines Generators mit Fremderregung durch Werner Siemens Ende des 19ten Jahrhunderts war ein wesentlicher Durchbruch in der technischen Anwendungen von Strom. Zunächst existierten nur Gleichstromquellen, die nach dem Galvanischen Prinzip arbeiteten. Die zugrunde liegenden chemischen Reaktionen waren in ihrer Leistung stark begrenzt. Nachfolgend wurden über das Induktionsprinzip Wechselspannungen erzeugt, wie in Abb. 1.5.5 illustriert. Hierzu wurden zunächst Permanentmagneten verwendet. Solche Generatoren hatten allerdings nur ein begrenzte Lebensdauer.



**Abbildung 1.5.4:** In einem Generator wird ein Magnetfeld rotiert und in einer stationären Spule eine Spannung induziert.

er, da die wechselnden Magnetfelder, die Permanentmagneten mit der Zeit *ent-magnetisierten*. Selbst die Verwendung von möglichst hart-magnetischen Materialien half nur begrenzt. Desweiteren sind Generatoren mit starken Permanentmagneten sehr schwer. Siemens kam auf die Idee für das Magnetfeld wiederum Spulen zu verwenden, die mit einem Teil des erzeugten Stromes magnetisiert werden. Dies bezeichnet man als **dynamoelektrisches Prinzip**: ein Teil des Stromes dazu genutzt die Rotorspule über einen Kommutator mit Gleichstrom zu magnetisieren. Die mechanische Arbeit, die hinein gesteckt wird erzeugt so effizient Strom, so daß nur ein kleiner Prozentsatz zur Fremderregung abgezweigt werden muß. Man spricht auch von Stromverstärkung.

Falls wir einen Generator mit einer einfachen Ohmschen Last  $R$  belasten, so sind Spannung  $U = U_0 \cos \omega t$  und Strom  $I = I_0 \cos \omega t$  in Phase. Die Leistung, die abgegeben wird ist:

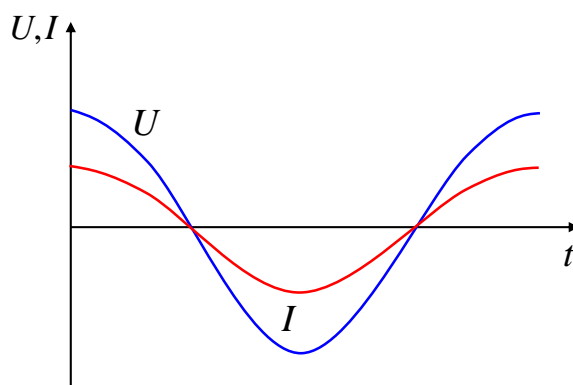
$$P = UI = U_0 I_0 \cos^2 \omega t \quad (1.5.3)$$

Diese ergibt im zeitliche Mittel:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} U_0 I_0 \quad (1.5.4)$$

Man erkennt, daß sich eine geringere Leistung einstellt als wenn  $U_0$  von einer Gleichspannungsquelle geliefert würde. Dies läßt sich ausdrücken durch sog. **effektive Spannungen**:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (1.5.5)$$



**Abbildung 1.5.5:** Bei einer rein Ohm'schen Last ist der Strom und die Spannung immer in Phase.

Im Wechselstromnetz ist immer die effektive Spannung angegeben  $U_{eff} = 230V$ , wobei die Spannung  $U_0$  dann  $325 V$  ist.

## 1.5.2 Drehstrom

In der Praxis wird für die Erzeugung von elektrischer Leistung hingegen ein Generator verwendet, der die Spannung in drei Statorspulen induziert, die um  $120^\circ$  gegeneinander versetzt sind (siehe Abb. 1.5.6). Damit stellen sich die Spannungen in der Form ein:

$$U_1 = U_0 \cos \omega t \quad (1.5.6)$$

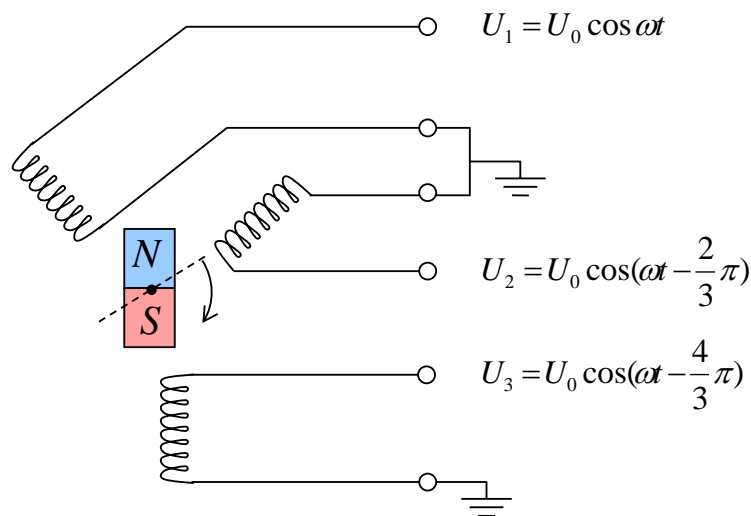
$$U_2 = U_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (1.5.7)$$

$$U_3 = U_0 \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \quad (1.5.8)$$

Die effektive Spannung, die jede einzelne Spule liefert sei  $U_{eff} = 230V$  ( $U_0 = 325V$ ). Vergleicht man die Spannung als Differenz von zwei Spulen, so stellt sich eine Spannung von  $U_{eff} = 398V$  ( $U_0 = 563V$ ) ein. Diese hohe Spannung zwischen zwei Spulenkontakten kann entsprechend größere Ströme treiben und wird deshalb für leistungsstarke Anwendungen verwendet. Man verwendet auch die Bezeichnung **Kraftstrom**.

Gibt man diese drei um  $120^\circ$  versetzte Spannungen auf drei Spulen eines Motors, so entsteht ein magnetisches Feld, daß sich, entsprechend der Pha-





**Abbildung 1.5.6:** Drehstrom wird in drei Spulen erzeugt, die jeweils um  $120^\circ$  gegeneinander versetzt sind.

senverschiebung der Spannungen untereinander kontinuierlich um die Rotorachse dreht. Aus diesem Grund bezeichnet man dies auch als **Drehstrom**. Der Rotor in einem Elektromotor, kann von diesem drehenden Magnetfeld mitgenommen werden, um so mechanische Arbeit zu leisten. Man unterscheidet zwei prinzipielle Anordnungen von Elektromotoren (siehe Abb. 1.5.8):

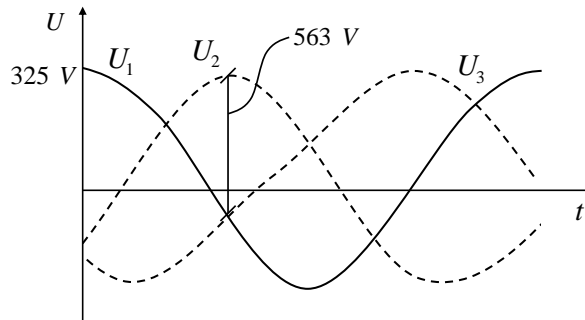
- **Synchronmotor**

Ein **Synchronmotor** ist direkt eine Umkehrung des Generatorprinzips. Wobei der Rotor in Selbsterregung oder in Fremderregung arbeiten kann. Der Rotor folgt dem rotierenden Magnetfeld der Statorspulen. Solche Motoren laufen auch unter Last sehr stabil. Der technische Aufwand ist hingegen groß, da von dem erzeugten Strom ein Teil abgegriffen werden muß, gleichgerichtet<sup>29</sup> und zur Fremderregung der Rotorspule verwendet werden muß.

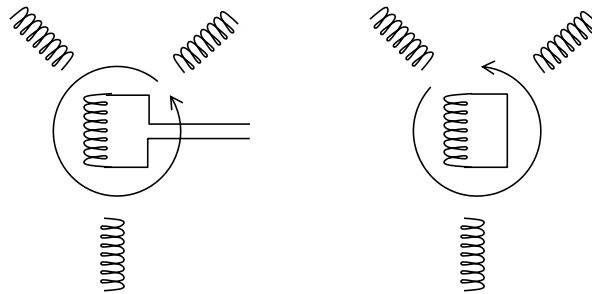
- **Asynchronmotor**

Bei einem **Asynchronmotor** verwendet man als Rotor eine Spule die *kurz geschlossen* ist. D.h. nach außen hin sind keinerlei Schleifkontakte mehr notwendig. Einen solchen Rotor bezeichnet man als **Kurzschlußläufer** in dem der Strom bzw. das Magnetfeld erst durch In-

<sup>29</sup>In einem Gleichrichter werden Wechselströme über ein Diodennetzwerk in Gleichströme umgewandelt



**Abbildung 1.5.7:** Zeitliche Variation der Spannungen, die ein Drehstromgenerator ausgibt.



**Abbildung 1.5.8:** Bei einem Synchronmotor wird das Magnetfeld der Rotorpule über einen externen Gleichstrom erzeugt. Bei einem Asynchronmotor ist die Rotorpule kurz geschlossen und das Rotor-Magnetfeld wird über Induktion erzeugt.

duktion erzeugt werden muß. Hierzu ist es wichtig, daß der Rotor sich *nicht* genau mit der Frequenz des Drehfeldes bewegt, da sich sonst in dem Rotor kein  $\dot{\phi}$  einstellt. D.h. Rotor und Statorfeld laufen *asynchron* und es stellt sich ein bestimmter *Schlupf* zwischen den Bewegungen ein: Ist der Schlupf sehr groß so wird eine hohe Spannung induziert und das induzierte Magnetfeld des Rotors ist entsprechend groß. Damit ist die Abstoßung zwischen Rotor und rotierendem Statorfeld groß und der Rotor wird effizient beschleunigt; ist der Schlupf sehr klein, so laufen Statorfeld und Rotor fast synchron und die Flußänderung  $\dot{\phi}$  im Rotor klein. Damit wird die induzierte Spannung klein und das induzierte Magnetfeld des Rotors ist gering. Damit sinkt die abstoßende Wirkung zwischen rotierendem Statorfeld und Rotor und die Drehzahl des Rotors sinkt.

Asynchronmotoren sind sehr kostengünstig herzustellen und stellen den häufigsten Motorentyp dar. Nachdem sie allerdings nach den Induktionsgesetz funktionieren können insbesondere beim Einschalten sehr hohe Ströme induziert werden! Deshalb sind oft spezielle Anlaufsteuerungen notwendig. Zudem bleibt ihre Drehzahl nicht so stabil, wie das bei Synchronmotoren der Fall ist.

Für die Beschaltung von Drehstromgeneratoren und -motoren existieren mehrere Varianten, wie in Abb. 1.5.9 illustriert:

- **Sternschaltung**

Betrachten wir einen Motor bei dem die Kontakte jeder Spule nach außen geführt werden. Falls wir die Spulen an einem Punkt zusammenschalten, so bekommen wir eine sog. **Sternschaltung**. Die vierte Leitung wird von dem Sternpunkt nach außen geführt, man bezeichnet sie als **Nullleiter**. Bei einer Ohmschen Last sind Spannung und Ströme in Phase und die Ströme, die durch die Spulen fließen sind:

$$I_1 = I_0 \cos \omega t \quad (1.5.9)$$

$$I_2 = I_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (1.5.10)$$

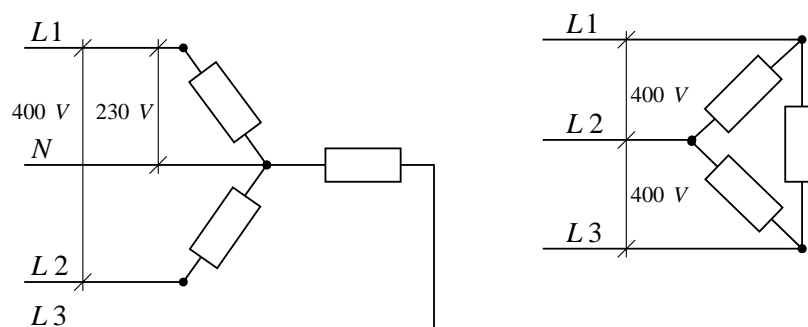
$$I_3 = I_0 \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \quad (1.5.11)$$

Man erkennt, daß sich in der Summe

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1.5.12)$$

ergibt. D.h. man könnte den Nullleiter weglassen, da dort kein Strom fließen muß. Die Spannung, die zwischen den Phasen ( $L_1, L_2, L_3$ ) des Drehstroms liegen bezeichnen wir mit  $U_0$ . Diese Spannung  $U_0$  fällt aber nicht komplett an einer Spule des Stators ab, sondern nur  $U = \frac{1}{\sqrt{3}}U_0$ , da immer zwei Spulen in Serie geschaltet sind.

Bei einem Generator wird eine solche Schaltung verwendet, um zum Beispiel elektrische Leistung auf drei Phasen zu verteilen und im Stromnetz zu verteilen. Die effektive Spannung zu dem Nullleiter sei jeweils 230 V, während die effektive Spannung zwischen zwei Spulen jeweils 398 V beträgt. Ist der Verbraucher eine reine Ohm'sche Last, so gilt wieder daß die Summe aller Ströme Null ist und auf dem Nullleiter kein Strom fließen muß.



**Abbildung 1.5.9:** In einer Sternschaltung sind die drei Statorspulen so verschaltet, daß der Strom in der Summe immer Null ergibt. In einer Dreiecksschaltung sind die drei Statorspulen in Reihe geschaltet

- **Dreiecksschaltung**

Bei einer Dreiecksschaltung eines Motors werden die drei Spulen in einem Dreieck hintereinander geschaltet. Dies bedingt:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 0 \quad (1.5.13)$$

Die Spannung  $U_0$  die von außen ankommt ist diesmal genau die Spannung, die auch an der Spule abfällt. Damit fließt im Vergleich zur Sternschaltung auch ein höherer Strom und ein solcher Motor kann bei einer höheren Leistung gefahren werden.

Bei einem endlichen Widerstand in jeder Spule gilt immer  $U = RI$  pro Spule so daß Strom als auch Spannung im Vergleich zur Sternschaltung um den Faktor  $\sqrt{3}$  größer sind. D.h. die Leistung  $P = UI$  bei einer Dreiecksschaltung ist um den Faktor 3 höher als die bei einer Sternschaltung. Bei sehr leistungsstarken Asynchronmotoren wird gerade beim Einschalten ein sehr hoher Strom gezogen, da der Rotor erst anlaufen muß. Dieser hohe Strom könnte den Kurzschlußläufer zerstören, so daß eine Anlaufsteuerung gewählt wird bei der zuerst der Motor in der Sternschaltung anläuft und dann beim Erreichen der Drehzahl auf die Dreiecksschaltung umgeschaltet wird.

### 1.5.3 Wechselstromkreise

Im folgenden wollen wir das allgemeine Verhalten von Bauelementen an Wechselfeldspannungsquellen beschreiben.

## Impedanzen, Zeigerdiagramme

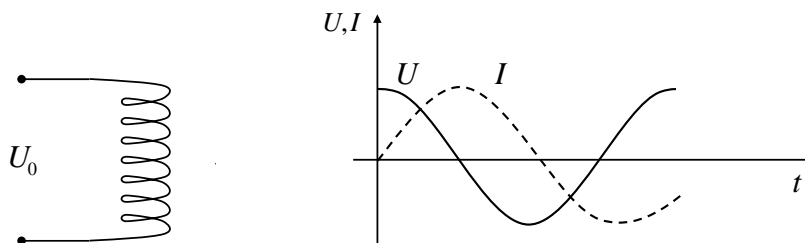
- **Induktivität**

Betrachten wir eine Induktivität an der eine cosinus-förmige Spannung  $U$  anliegt (siehe Abb. 1.5.10). Die Maschenregel ergibt:

$$U = -U_{ind} \quad (1.5.14)$$

Gemäß dem Induktionsgesetz bekommen wir:

$$U_0 \cos \omega t = L \frac{dI}{dt} \quad (1.5.15)$$



**Abbildung 1.5.10:** Bei einer Induktivität hinkt der Strom der Spannung um  $90^\circ$  hinterher.

Wenn wir dies auflösen, bekommen wir für den Strom die Bedingung:

$$I = \frac{U_0}{L} \int \cos \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \quad (1.5.16)$$

bzw.

$$I = I_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5.17)$$

Man erkennt, daß der Strom der Spannung um  $\pi/2$  hinterher läuft. Der Widerstand einer Spule ist gegeben als:

$$R_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega L \quad (1.5.18)$$

D.h. der Widerstand steigt mit der Frequenz und der Induktivität: die Frequenz ist ein Maß für die Änderung des Stromes und damit bestimmt sie die induzierte Spannung. Die Induktivität bestimmt wie sich

eine Stromänderung in eine Spannungsänderung übersetzt. Bei sehr kleinen Frequenzen wird  $R_L=0$ , d.h. die Spule wirkt wie ein einfacher Leiter.

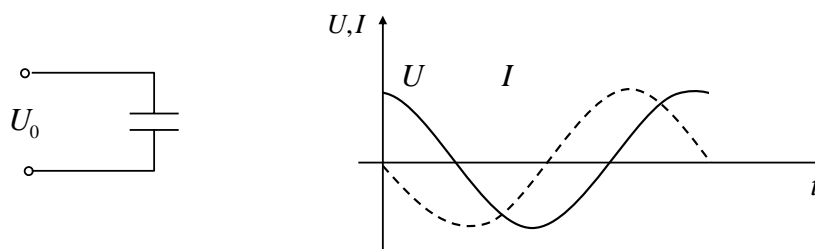
- **Kapazität**

Bei einer Kapazität hatten wir

$$U = \frac{Q}{C} \quad (1.5.19)$$

Wenn wir dies einmal nach der Zeit ableiten bekommen wir:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{C} I \quad (1.5.20)$$



**Abbildung 1.5.11:** Bei einer Kapazität eilt der Strom der Spannung um  $90^\circ$  voraus.

Wir setzen die Spannung ein und bekommen:

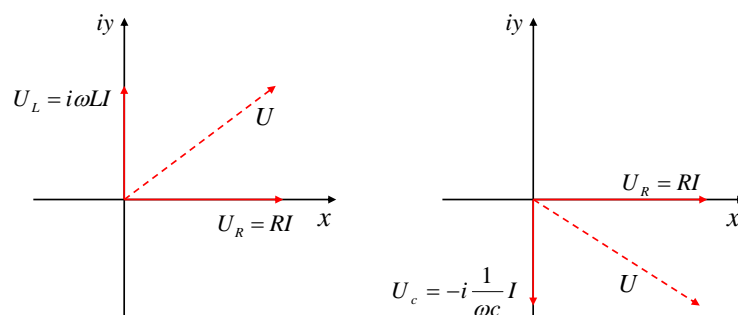
$$-U_0 \omega \sin \omega t = \frac{1}{C} I \quad (1.5.21)$$

Mit der Lösung für  $I$  von:

$$I = U_0 \omega C (-1) \sin \omega t = U_0 \omega C \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5.22)$$

Man erkennt, daß bei einer Kapazität der Strom der Spannung um  $\pi/2$  voraus eilt (siehe Abb. 1.5.12). Der Widerstand einer Kapazität ist gegeben als:

$$R_C = \frac{1}{\omega C} \quad (1.5.23)$$



**Abbildung 1.5.12:** Komplexe Widerstände, Impedanzen lassen sich elegant durch Zeiger in der komplexen Ebene darstellen.

Bei einer hohen Frequenz oder einer hohen Kapazität wird der Widerstand klein. Bei einer hohen Kapazität kann ein hoher Strom fließen, um den Kondensator aufzuladen. In gleichem Maße steigt der Verschiebungsstrom mit einer zeitlichen Änderung des Stromes. D.h. der Kondensator wird bei hohen Frequenzen zu einem einfachen Leiter.

Wie lassen sich jetzt die Widerstände und die Tatsache einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung kompakt darstellen. Dazu verwendet man formal komplexe Widerstände, die **Impedanzen**. Der Betrag einer Impedanz drückt den Widerstand aus und die Phase die Verschiebung zwischen Strom und Spannung, die an dem Bauelement anliegt. Die Phase ist formal:

$$\tan \varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} \quad (1.5.24)$$

Im folgenden wollen wir die Impedanz einiger Elemente beschreiben:

- **Induktivität**

Bei der Serienschaltung eines Widerstands  $R$  und einer Induktivität  $L$  bekommen wir, eine gesamte Spannung  $U$  von:

$$U = U_R + U_L \quad (1.5.25)$$

Formal setzen wir jetzt die Impedanzen ein, der Form:

$$U_R = RI \quad (1.5.26)$$

$$U_L = i\omega LI \quad (1.5.27)$$

Insgesamt gilt:

$$U = ZI \quad (1.5.28)$$

mit der Impedanz  $Z$  zu:

$$Z = R + i\omega L \quad (1.5.29)$$

Die Phase zwischen Strom und Spannung ist:

$$\tan \varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = \frac{\omega L}{R} \quad (1.5.30)$$

D.h für  $R = 0$  ist  $\tan \varphi \rightarrow \infty$ , d.h. die Phasenverschiebung ist  $+\pi/2$  und die Spannung ist dem Strom um  $90^\circ$  voraus.

- **Kapazität**

Bei der Serienschaltung eines Widerstands  $R$  und einer Kapazität  $C$  bekommen wir eine gesamte Spannung  $U$  von:

$$U_L = U_R + U_C \quad (1.5.31)$$

Formal setzen wir jetzt die Impedanzen ein der Form:

$$U_R = RI \quad (1.5.32)$$

$$U_C = -i \frac{1}{\omega C} I \quad (1.5.33)$$

Damit wird die gesamte Impedanz zu:

$$Z = R - i \frac{1}{\omega C} \quad (1.5.34)$$

Die Phase zwischen Strom und Spannung ist:

$$\tan \varphi = \frac{\Im Z}{\Re Z} = -\frac{i \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (1.5.35)$$

D.h für  $R = 0$  ist  $\tan \varphi \rightarrow -\infty$  und die Phasenverschiebung ist  $-\pi/2$  und die Spannung eilt dem Strom um  $90^\circ$  hinterher.



Man erkennt, daß mit der formalen Verwendung eines komplexen Widerstandes  $Z$  automatisch die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung eines Netzwerkes aus Kapazitäten und Induktivitäten resultieren.

Die Einführung von komplexen Widerständen erscheint zunächst willkürlich. Man kann sie aber allgemein aus der Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichungen ableiten. Betrachten wir dazu noch einmal einen Serienschwingkreis:

$$U = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (1.5.36)$$

Dies läßt sich umformen zu einer Schwingungsgleichung:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dI}{dt}R + L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I \quad (1.5.37)$$

Wie bei den mechanischen Schwingungen verwenden wir formal einen komplexen Ansatz, wobei der Realteil dieser Funktionen die physikalisch messbaren Größen bleiben. So ist

$$I = I_0 e^{i\omega t} = I_0 \cos \omega t + i I_0 \sin \omega t \quad (1.5.38)$$

Der Realteil  $\Re I$  ist der Strom, den ein Messgerät anzeigt. Als allgemeinen Ansatz für Strom und Spannung mit einer Phasenverschiebung  $\varphi$  dazwischen wählen wir:

$$U = U_0 e^{i\omega t} \quad (1.5.39)$$

$$I = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (1.5.40)$$

Wenn wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung 1.5.37 einsetzen, bekommen wir:

$$i\omega U = R i\omega I - L\omega^2 I + \frac{1}{C}I \quad (1.5.41)$$

Der komplexe Widerstand eines Serienschwingkreises ist damit:

$$Z = \frac{U}{I} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (1.5.42)$$

Dies Lösung ist identisch mit dem oben eingeführten Lösungsweg bei der man einfach die Serienschaltung komplexer Widerstände bemüht:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \quad (1.5.43)$$

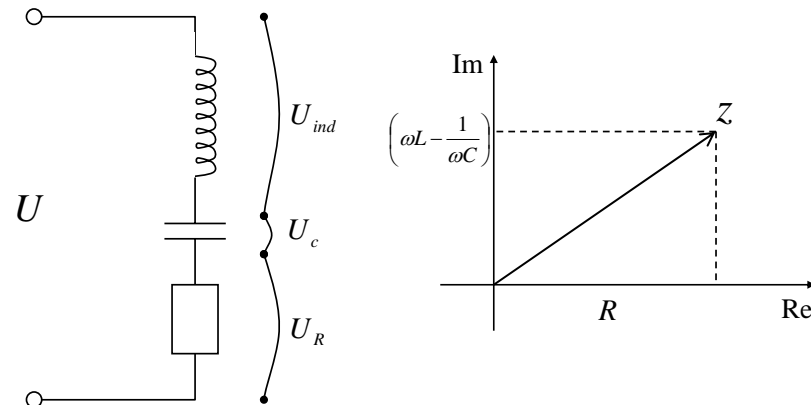


Abbildung 1.5.13: Serienschaltung aus L,C und R.

Mit dem Ansatz von komplexen Widerständen, den Impedanzen, läßt sich zudem auch die Energie beschreiben, die pro Sekunde umgesetzt wird. Formal bekommen wir für phasenverschobene Ströme und Spannungen

$$\bar{P}_{el} = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi \quad (1.5.44)$$

D.h. falls wir eine reine Induktivität und eine Kapazität betrachten ist die Phasenverschiebung  $\pm\pi/2$ , d.h. die mittlere Leistung ist *Null*. Man bezeichnet in diesem Fall diese Leistung auch als **Blindleistung**, da die Energie nicht dissipiert wird sondern zwischen Spule und Kondensator hin und her schwingt. Die **Wirkleistung** entsteht durch den reellen Teil der Impedanz  $R$  und beschreibt das Leisten von Arbeit an einem Verbraucher. Formal kann man dies ausdrücken durch:

$$P = \Re P + \Im P = \text{Wirkleistung} + \text{Blindleistung} \quad (1.5.45)$$

### Schaltungen mit R, L und C

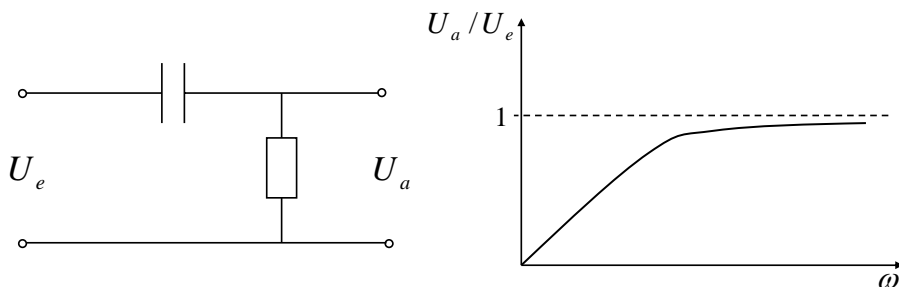
Im folgenden wollen wir mit den Impedanzen eine Reihe von typischen Anordnungen berechnen und ihr Verhalten an Hand von **Zeigerdiagrammen** diskutieren. Solche Schaltungen bezeichnet man als **Vierpole** bei denen eine Eingangsspannung  $U_e$  in eine Ausgangsspannung  $U_a$  umgesetzt wird.

- **Hochpaß**

Bei einem Hochpaß wird ein Kondensator  $C$  und ein Widerstand  $R$  in Reihe geschaltet und man betrachtet die Umsetzung einer Spannung am Eingang  $U_e$  zu einer Spannung am Widerstand  $R$  als Ausgang  $U_a$

$$U_e = U_c + U_a \quad (1.5.46)$$

Mit der Spannung am Kondensator  $U_c = ZI = \frac{1}{\omega C}I$  und am Widerstand  $U_a = RI$  bekommen wir einen Spannungsteiler:



**Abbildung 1.5.14:** Ein Hochpaß läßt nur große Frequenzen durch.

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{\omega C}} U_e \quad (1.5.47)$$

Wenn wir den Betrag betrachten, so erkennen wir, daß die Spannung am Ausgang nur für große Frequenzen den Wert der Eingangsspannung annimmt.

$$|U_a| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_e| \quad (1.5.48)$$

D.h. für hohe Frequenzen ist der Kondensator *transparent*. Man benutzt diese Schaltung als sog. **Hochpaß**, der niedrige Frequenzen sperrt und hohe Frequenzen passieren läßt.

- **Tiefpaß**

Bei einem Tiefpaß wird wieder ein Widerstand und Kondensator in Reihe geschaltet, diesmal ist aber die Spannung am Kondensator das Signal am Ausgang. Wir bekommen also:

$$U_a = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R + \frac{1}{\omega C}} U_e \quad (1.5.49)$$

Wenn wir den Betrag bilden, bekommen wir schließlich ein Verhalten, daß niedrige Frequenzen passieren können während hohe Frequenzen gesperrt werden. D.h. man spricht von einem **Tiefpaß**.

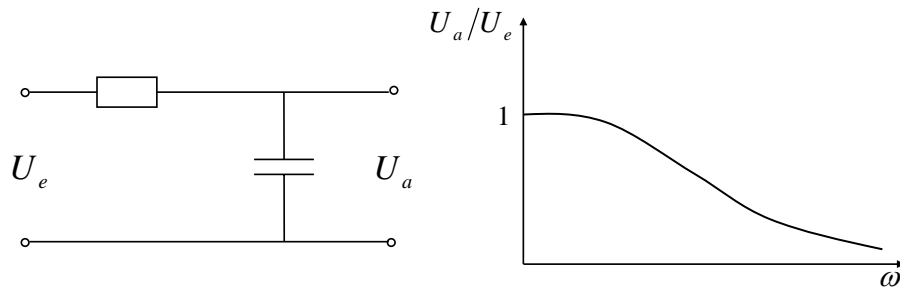


Abbildung 1.5.15: Ein Tiefpaß läßt nur niedrige Frequenzen durch.

$$|U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_e| \quad (1.5.50)$$

Ein solcher Kondensator parallel zu den Ausgangskontakten wird oftmals als Filter für hochfrequente Störsignale eingesetzt.

- **Filter in Serie**

Betrachten wir einen Serienschwingkreis und behandeln die Ausgangsspannung als diejenige, die an dem Widerstand abfällt. Die Umsetzung von Eingangs- in Ausgangsspannung ist gegeben als:

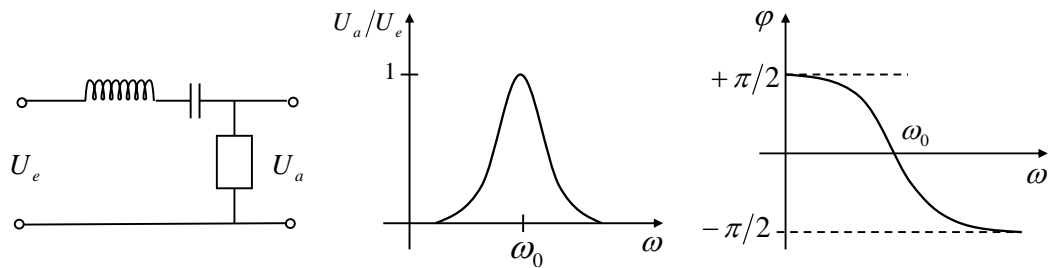


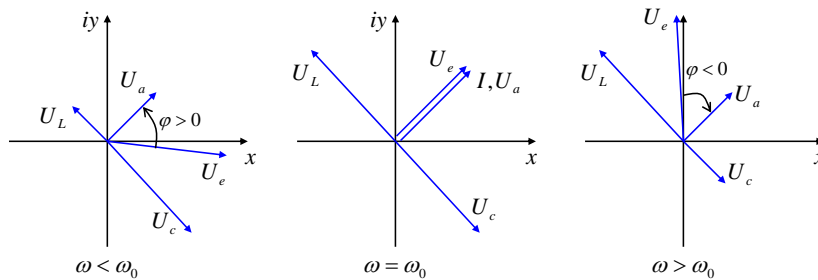
Abbildung 1.5.16: LC-Filter in Serienschaltung.

$$U_a = \frac{R}{i\omega L - i\frac{1}{\omega C} + R} U_e \quad (1.5.51)$$

Man erkennt, daß der Betrag dieser Spannung bei der Resonanzfrequenz  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  maximal wird.

$$|U_a| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} |U_e| \quad (1.5.52)$$

Die Phasenverschiebung läuft dabei mit steigendem  $\omega$  von  $+\pi/2$  zu  $-\pi/2$ . Dies läßt sich anschaulich an einem Zeigerdiagramm verdeutlichen (siehe Abb. 1.5.17): (i) in der Resonanz ist die Spannung am Kondensator  $U_C$  genau so groß wie die an der Spule  $U_L$  allerdings um  $\pi$  verschoben. Damit addieren sich beide Spannungen im Zeigerdiagramm zu Null und Eingangs- und Ausgangsspannung sind in Phase;  $\varphi = 0$ ; (ii) falls die Frequenz  $\omega$  kleiner als  $\omega_0$  ist, ist die Spannung am Kondensator viel größer als die an der Spule und die Vektoraddition ergibt eine Spannung am Eingang, die der Spannung am Ausgang hinterher hinkt (die Ausgangsspannung hat eine positive Phase gegenüber der Eingangsspannung); (iii) falls die Frequenz  $\omega$  größer als die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ist, so ist die Spannung an der Spule größer als die an der Kapazität und entsprechend ändert die Phasenverschiebung ihr Vorzeichen.



**Abbildung 1.5.17:** Beschreibung eines LC-Filter in Serienschaltung in einem Zeigerdiagramm zu einer beliebigen Zeit  $t$ . Der Strom sei  $I = I_0 \cos \omega t$ .

### • Filter in Parallel

In Analogie zum Serienschwingkreis betrachten wir einen Parallelschwingkreis wie in Abb. 1.5.18 illustriert. Zunächst bilden wir die gemeinsame Impedanz des Parallelschwingkreises gemäß der Regel für die Parallelschaltung von Widerständen:

$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{\omega L} + \omega C \quad (1.5.53)$$

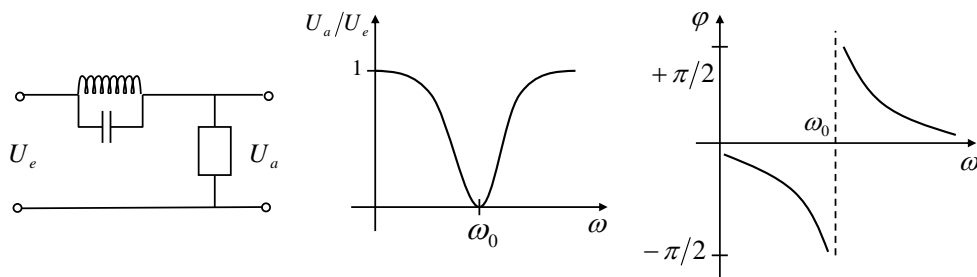
Damit wird die Spannung am Ausgang zu:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{\frac{1}{i\omega L} + i\omega C}} U_e = \frac{iR(\omega C - \frac{1}{\omega L})}{1 + iR(\omega C - \frac{1}{\omega L})} U_e \quad (1.5.54)$$

Man erkennt, daß die Spannung am Ausgang auf Null abfällt, falls die Resonanz erreicht wird. Die Spannung, die über den Parallelschwingkreis abfällt ist:

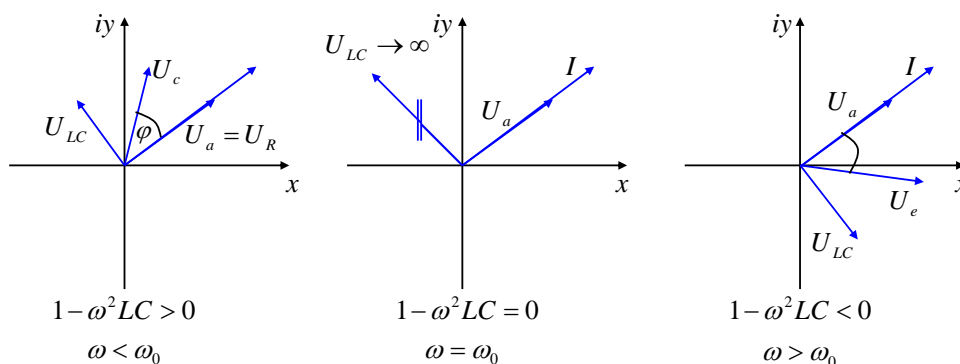
$$U_{LC} = Z_{LC} I = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} I \quad (1.5.55)$$

Man erkennt, daß  $U_{LC}$  gegen unendlich läuft für  $\omega \rightarrow \omega_0$ . Nachdem  $U_{LC}$  und  $U_a$  als Spannungsteiler für  $U_e$  wirken ist klar daß in der Resonanz  $U_a$  zu Null werden muß.



**Abbildung 1.5.18:** LC-Filter in Parallelschaltung.

Auch das Verhalten des Parallelschwingkreis wollen wir an dem Zeigerdiagramm erläutern (siehe Abb. 1.5.19): (i) in der Resonanz ist die Spannung  $U_{LC}$  am Kondensator genau so groß wie die an der Spule. Damit addieren sich beide Spannungen im Zeigerdiagramm. Je nach Vorzeichen des Ausdrucks  $(1 - \omega^2 LC)$  ist die Phase zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung  $\varphi = \pm\pi/2$ ; (ii) falls die Frequenz kleiner als  $\omega_0$  ist, wird der Term  $1 - \omega^2 LC > 0$  und die die Spannung  $U_{LC}$  läuft der Spannungen  $U_a$  voraus. Damit läuft die Spannung  $U_a$  der Anregung durch  $U_e$  hinter her und die Phase ist negativ. Die Phase läuft für  $\omega \rightarrow \omega_0$  gegen  $-\pi/2$ ; (iii) falls die Frequenz größer als  $\omega_0$  ist, wird der Term  $1 - \omega^2 LC < 0$  und die Spannung  $U_{LC}$  eilt der Spannung  $U_a$  hinterher. Damit läuft die Spannung  $U_a$  der Anregung durch  $U_e$  voraus und die Phase ist positiv. Die Phase läuft für  $\omega \rightarrow \omega_0$  gegen  $+\pi/2$ ;



**Abbildung 1.5.19:** Zeigerdiagramm für einen LC-Filter in Parallelschaltung zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ .

## 1.5.4 Transformatoren

Eine der wichtigsten Anwendungen elektrotechnischer Anlagen sind Transformatoren zur Umwandlung von Spannungen und Strömen. Dabei wird eine geringe Spannung in eine hohe bzw. umgekehrt umgewandelt.

### Transformatorprinzip

Ein **Transformator** (Trafo) besteht aus zwei Spulen, die über ein Eisenjoch gekoppelt sind (siehe Abb. 1.5.20). Damit induziert die Änderung des magnetischen Flusses in einer **Primärspule** eine entsprechende Spannung in einer **Sekundärspule**. An der ersten Spule sei eine Spannungsquelle:

$$U = U_0 \cos \omega t \quad (1.5.56)$$

angeschlossen. Diese treibt eine **Primärspule** mit  $N_1$  Windungen:

$$U_1 = -U_{ind} = L_1 \frac{dI_1}{dt} = \frac{\Phi}{dt} = N_1 \frac{d\Phi_{m,1}}{dt} \quad (1.5.57)$$

Der magnetische Fluß den  $N_1$  Windungen umfassen ist  $\Phi$ , während der erzeugte magnetische Fluß in dem Eisenjoch als  $\Phi_m$  gegeben ist. Auf der Sekundärseite des Transformators "sieht" die Spule diese Flußänderung  $\dot{\Phi}_m$  und man bekommt:

$$U_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_{m,2}}{dt} \quad (1.5.58)$$

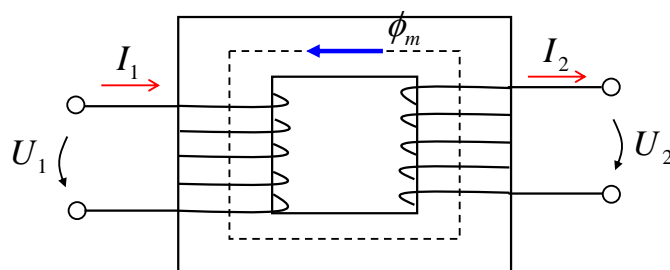
Das Vorzeichen ergibt sich aus dem *Wicklungssinn* der Spulen. Falls beide Spulen gleich gewickelt sind, dreht sich die Spannung um, da der Fluß laut

Zeichnung einmal von oben, einmal von unten durch die Spulen dringt.

Falls die beiden Spulen perfekt gekoppelt sind ist  $\Phi_{m,1} = \Phi_{m,2}$  und man bekommt:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = -\frac{N_1}{N_2}} \quad (1.5.59)$$

D.h. wenn man mit einer gegebene Spannung  $U_1$  und Windungszahl  $N_1$  beginnt, so kann man für  $N_2 > N_1$  die Spannung hoch transformieren und für  $N_2 < N_1$  herunter transformieren.



**Abbildung 1.5.20:** In einem Transformator ist der Fluß zweier Leiterschleifen miteinander verknüpft.

Das Eisenjoch eines Transformators wird in der Regel aus einem Stapel Eisenbleche hergestellt, die voneinander isoliert sind um Wirbelstromverluste zu vermeiden. Trotzdem führen die auftretenden Kräfte zu dem charakteristischen "Brummen" eines Trafos.

Erst Transformatoren erlauben es elektrische Leistung über große Strecken zu transportieren und so die Energieerzeugung auf wenige Standorte (Kraftwerke) zu beschränken. Betrachten wir den Transport von 20 kW elektrischer Leistung über eine 230 V Leitung. Dabei muß ein Strom von 87 A fließen. Wenn wir annehmen, daß die Leitung einen Widerstand von 2  $\Omega$  besitzt ergibt sich ein Spannungsabfall über die Leistung von  $\Delta U = RI=174$  V. D.h. 80% der Leistung gehen beim Transport verloren. Transportiert man diese Leistung allerdings bei einer Spannung von 20 kV, so muß nur noch ein Strom von 1 A fließen und der Spannungsabfall über dieselbe Leitung sind 2 V. D. h. im Vergleich zu den 20 kV ergibt dies eine Verlustleistung von 0.01%. D.h. Strom kann nahezu verlustfrei transportiert werden. Im europäischen Stromnetz sind die wichtigsten Spannungen 110 kV und 380 kV. Als Faustformel eignen sich diese Spannungen für die Übertragung über 110 bzw. 380 km.



### Belasteter Transformator

In dem obigen Beispiel war der Transformator *unbelastet*, d.h. an der Sekundärseite war kein Verbraucher angeschlossen. Wenn der Transformator allerdings belastet wird, so fließt auch auf der Sekundärseite ein Strom  $I_2$ . Dieser Strom erzeugt in der Sekundärspule eine magnetischen Flußänderung die in der Primärspule sichtbar wird. D.h. wir müssen beide Spulen auch noch mittels der Gegeninduktivität koppeln. Mit der Verwendung von komplexen Widerständen mit  $Z$  der Impedanz des Verbrauchers bekommen wir:

$$U_1 = i\omega L_1 I_1 + i\omega L_{12} I_2 \quad (1.5.60)$$

$$U_2 = Z I_2 = -i\omega L_{12} I_1 - i\omega L_2 I_2 \quad (1.5.61)$$

Diese Gleichungen können wir nach den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  auflösen.

$$I_1 = \frac{i\omega L_2 + Z}{i\omega L_1 Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_1 L_2)} U_1 \quad (1.5.62)$$

$$I_2 = -\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_1 Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_1 L_2)} U_1 \quad (1.5.63)$$

Damit wird das Verhältnis der Ströme zu:

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{i\omega L_{12}}{i\omega L_2 + Z} \quad (1.5.64)$$

Sowie das Verhältnis der Spannungen zu:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{i\omega L_{12} Z}{i\omega L_1 Z + \omega^2 (L_{12}^2 - L_1 L_2)} \quad (1.5.65)$$

- **Ohm'sche Last**  $Z = R$

Bei einer vollständigen Kopplung der zwei Spulen, d.h.  $\Phi_{m,1} = \Phi_{m,2}$  gilt:

$$L_{12}^2 = L_1 L_2 \quad (1.5.66)$$

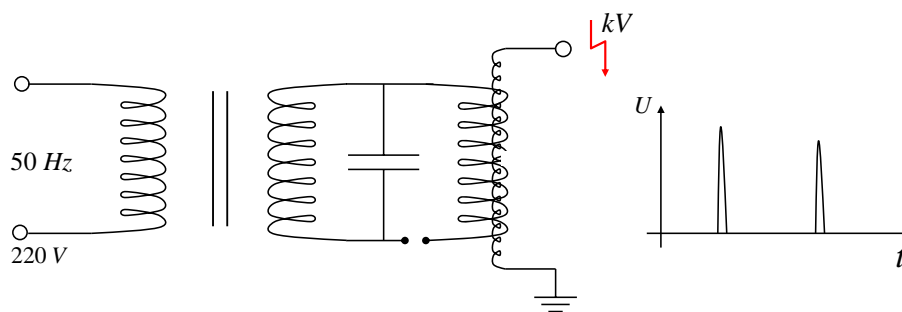
Mit  $Z = R$  bekommen wir als das Verhältnis der Spannungen somit.

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{L_{12}}{L_1} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (1.5.67)$$

Wir erkennen, daß die Übersetzung der Spannungen identisch zu dem eines unbelasteten Transformators ist.

- **kapazitive Last**  $Z = \frac{1}{\omega C}$

Bei einer kapazitiven Last als Verbraucher erzeugt man einen Schwingkreis im Sekundärkreis des Transformators. Ein solche Anordnung wird als **Teslatransformator** zur Erzeugung von sehr hohen Wechselspannungen genutzt. Hierzu verwendet man einen Transformator, der einen Schwingkreis auf der Sekundärseite speist (Spule 1). Dieser Schwingkreis kann über eine Spule 2 mit wenigen Windungen und eine Funkenstrecke kurz geschlossen werden. In dieser Spule 2 befindet sich eine Spule 3 mit sehr vielen Windungen, die an einem Ende geerdet ist. Wenn die Funkenstrecke zündet, fließt kurzzeitig durch die Spule 2 ein großer Strom, der den Schwingkreis entlädt. Dabei wird in der Spule 3 ein Hochspannung von vielen kV erzeugt.



**Abbildung 1.5.21:** In einem Teslatransformator lassen sich sehr hohe Spannungspulse erzeugen.

# Kapitel 2

## Optik

Die Optik beschäftigt sich mit der Ausbreitung von Licht in beliebigen Medien. Ihre Anfänge nahm die Optik in der Entwicklung von Instrumenten für die astronomische Beobachtung. Galileo (1564-1642) und Kepler (1571-1630) verwendeten Linsen für die Entwicklung ihrer Fernrohre um Lichtstrahlen zu brechen und zu fokussieren. Diese Entwicklung erfolgte zunächst auf empirische Art und Weise. Erst Snell (1580-1626) entdeckte das Brechungsgesetz, das die Einfallswinkel- und Ausfallswinkel eines Lichtstrahls an der Grenze zweier Medien mit deren Brechzahlen verknüpft. Dieses bildet die Grundlage für die Berechnung von optischen Instrumenten. Alternativ zu Snell hatte Fermat (1607-1665) das Brechungsgesetz aus der Forderung nach der kürzesten Zeit für einen Lichtstrahl zum Zurücklegen einer Strecke abgeleitet.

Robert Hooke (1635-1703) stellte als erster die Behauptung auf, daß Licht als Schwingungen eines Mediums aufgefasst werden könnte. Dies war im Gegensatz zu Newton, der eine Partikelhypothese vertrat und zum Beispiel die Interferenzfarben als das Erscheinen unterschiedlich gefärbter Farbpartikel interpretierte. Huygens (1629-1695) legte schließlich die Grundlage für die Wellenhypothese, da er die Lichtbrechung, Beugung und Reflexion als das Ergebnis der Überlagerung von einzelnen Punktwellen beschreiben konnte.

Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht wurde von Römer (1644-1710) aus der Mondfinsternis des Jupiter Mondes Io, von Fizeau (1819-1896) mit der Zahnradmethode und von Foucault (1819-1868) mit einem rotierendem Spiegel gemessen.

Thomas Young (1773-1829) begründete das Superpositionsprinzip zur Erklärung der Interferenzeffekte. Fresnel (1788-1827) kombinierte dann das Wellenbild von Huygens und das Superpositionsprinzip von Young und beschrieb die Ausbreitung von Licht innerhalb von Medien als die Überlagerung von Primär- und Sekundärwellen.

Der Durchbruch bei der Beschreibung von Licht gelang schließlich

Maxwell (1831-1879), der mit seinen Maxwellgleichungen das theoretische Rüstzeug entwickelte um Licht als die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im Vakuum darzustellen. 8 Jahre nach dem Tod von Maxwell, konnte Hertz (1857-1894) die Erzeugung von elektromagnetischen Wellen direkt nachweisen.

Prinzipiell ist damit die Natur des Lichtes erfasst. Das theoretische Gebäude ist auch fähig neuere Aspekte der Physik zu beschreiben, die heute mit den Methoden der Quantenphysik behandelt werden<sup>1</sup>. Anfang des 20. Jahrhundert trat allerdings zunächst das theoretische Problem auf den Energieinhalt eines Hohlraums zu bestimmen, der von Licht erfüllt ist<sup>2</sup>. Dies wurde von Planck gelöst durch die Forderung nach einer quantisierten Natur des Lichtes. Einstein hatte mit der Beschreibung des Photoeffektes, diese quantisierte Natur durch die Existenz von Photonen begründet. Somit existieren gegenwärtig zwei alternative Beschreibungsformen von Licht, zum einen die Wellentheorie, wie sie von den Maxwellgleichungen vorgegeben werden und zum anderen die Teilchenhypothese der Quantenphysik nach der Licht aus Photonen zusammengesetzt ist. Beide Sichtweisen sind nicht konträr sondern nur unterschiedliche Formulierung derselben Sachverhalte. Dies läßt sich eindrucksvoll an folgendem Experiment illustrieren. Betrachten wir eine sehr schwache Lichtquelle, die ein Muster auf ein Photopapier belichten soll. Bei sehr kurzer Belichtungszeit entsteht *kein* sehr schwaches Bild des Musters, wie es die Wellenhypothese vorhersagen würde, sondern auf dem Photopapier werden nur sehr vereinzelt belichtete *helle* Punkte sichtbar. Erst bei längerer Belichtung überlagern sich diese Punkte zu dem Abbild des Musters. D.h. eine Welle entsteht durch die statistische Überlagerung sehr vieler einzelner Lichtteilchen.

## 2.1 Elektromagnetische Wellen

### 2.1.1 Wellengleichung

Elektromagnetische Wellen ergeben sich als Lösung der Maxwellgleichung für den Fall, daß keine Ströme ( $j = 0$ ) und Ladungen ( $\rho = 0$ ) existieren. Hierzu betrachten wir das Induktionsgesetz:

$$\mathbf{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (2.1.1)$$

und das Ampere'sche Gesetz für den Fall  $\vec{j} = 0$

<sup>1</sup>siehe W. E Lamb, jr (Nobelpreis 1955) " Anti-Photon", Appl. Phys. B 60, 77 (1995).

<sup>2</sup>siehe Skript Physik III.

$$\mathbf{rot}\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\dot{\vec{E}} \quad (2.1.2)$$

Wir multiplizieren beide Seiten von Gl. 2.1.1 mit **rot** erhalten für die linke Seite:

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{rot}\vec{E}\right) = \mathbf{grad}\left(\mathbf{div}\vec{E}\right) - \mathbf{div}\left(\mathbf{grad}\vec{E}\right) \quad (2.1.3)$$

Nachdem im Vakuum  $\mathbf{div}\vec{E} = 0$  gilt, verbleibt nur der Term:

$$-\mathbf{div}\left(\mathbf{grad}\vec{E}\right) = -\begin{pmatrix} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{grad}\vec{E}_x \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{grad}\vec{E}_y \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{grad}\vec{E}_z \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

der Ausdruck  $\mathbf{div} \cdot \mathbf{grad}\vec{E}$  ergibt

$$-\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z \end{pmatrix} = -\Delta\vec{E} \quad (2.1.5)$$

$\Delta$  bezeichnet man auch als **Laplace-Operator**. Die rechte Seite von Gl. 2.1.1 wird mit **rot** multipliziert und man vertauscht zeitliche und räumliche Ableitung:

$$\vec{\nabla} \times (-\dot{\vec{B}}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.1.6)$$

Jetzt läßt sich das Ampere'sche Gesetz einsetzen und man erhält:

$$-\frac{d}{dt} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0\mu_0\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} \quad (2.1.7)$$

D.h. wenn wir Gl. 2.1.7 und 2.1.5 kombinieren, erhalten wir eine Gleichung der Form:

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}}} \quad (2.1.8)$$

Diese hat die Form einer **Wellengleichung** mit  $c$  der Phasengeschwindigkeit einer Welle<sup>3</sup>. In analoger Weise läßt sich auch eine Wellengleichung für das Magnetfeld ableiten:

<sup>3</sup>In der Mechanik war die allgemeine Gleichung für die Ausbreitung einer Welle in x-Richtung mit einer Amplitude in y-Richtung:  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v_{Phase}^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}}} \quad (2.1.9)$$

Man erkennt, daß man aus den Maxwellgleichungen Lösungen für das elektrische und magnetische Feld ableiten kann, die ihrer Natur nach sich ausbreitende Wellen darstellen.

## 2.1.2 Ebene Wellen

### Transversalwellen

Wie sehen Wellen der elektrischen und magnetischen Felder aus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ausbreiten? Hierzu betrachten wir eine Welle, die sich in  $z$ -Richtung ausbreitet (siehe Abb. 2.1.1). Das elektrische Feld habe nur eine Komponente  $E_x$  in  $x$ -Richtung. Der Betrag des Feldes soll sich nicht innerhalb der  $xy$ -Ebene ändern. D.h. es gilt:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad (2.1.10)$$

Nachdem  $\mathbf{div} \vec{E} = 0$  gelten soll, bekommen wir auch:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad E_z = \text{const.} = 0 \quad (2.1.11)$$

Das elektrische Feld in  $z$ -Richtung ist konstant und wir setzen es ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu Null. Für die Lösung der Wellengleichung fordern wir eine Funktion, die als Argument  $(z - v_{\text{Phase}}t)$  hat. D.h. falls wir einen Ort wählen, der sich mit  $v_{\text{Phase}}$  mit der Welle mitbewegt, soll sich die Amplitude nicht ändern (Beispiel "Surfer auf Welle").

$$E_x = f(z - v_{\text{Phase}}t) \quad (2.1.12)$$

Eine Lösung der Wellengleichung sind trigonometrische Funktionen. Mit der sog. **Wellenzahl**  $k$  ergibt sich:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin k(z - ct) \quad (2.1.13)$$

da  $v_{\text{Phase}} = c$  gilt. Mit  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und der Kreisfrequenz  $\omega = ck$ :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t)} \quad (2.1.14)$$

Wie sind jetzt das elektrische und das magnetische Feld verknüpft? Das Induktionsgesetz fordert:

$$\mathbf{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (2.1.15)$$

Auf die einzelnen Komponenten von  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  angewendet, bekommen wir:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2.1.16)$$

D.h. die Änderung der elektromagnetischen Welle durch ein elektrisches Feld in x-Richtung ist mit der Erzeugung eines magnetischen Feldes in y-Richtung verknüpft, wie in Abb. 2.1.1 illustriert. Für die Orientierung der einzelnen Komponenten dient die Rechte-Hand-Regel, wobei der Daumen die Ausbreitungsrichtung, die gestreckten Finger das elektrische und die abgeknickten Finger das magnetische Feld bezeichnen.

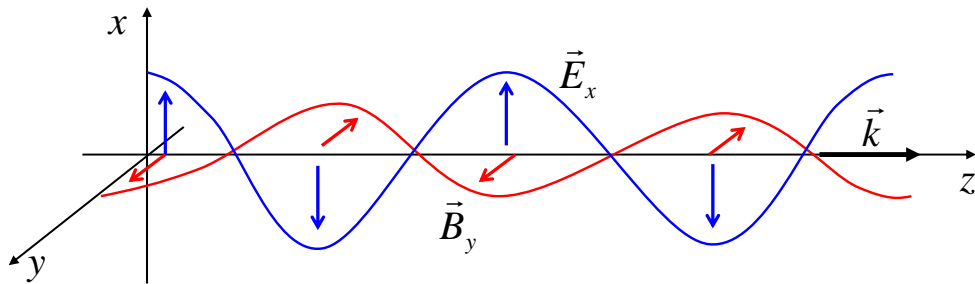


Abbildung 2.1.1: Ausbreitung einer ebenen Welle in z-Richtung.

Das elektrische und magnetische Feld läßt sich allgemein auch in der Form  $E = E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$  bzw.  $B = B_0 e^{-i(\omega t - kz)}$  darstellen. Die Wellenzahl  $k$  wird dabei als Vektor  $\vec{k}$  interpretiert, der die Richtung der Welle angibt. Damit bekommen wir aus dem Induktionsgesetz:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (2.1.17)$$

bzw.

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \quad (2.1.18)$$

Man erkennt, daß elektromagnetische Wellen im Vakuum **Transversalwellen** sind, d.h. die Felder stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Nur bei der Ausbreitung von Wellen innerhalb von Medien können Lichtwellen auch Longitudinalkomponenten besitzen. Mit  $\omega = ck$  bekommen wir:

$$\boxed{|\vec{B}| = \frac{1}{c}|\vec{E}|} \quad (2.1.19)$$

D.h. das Verhältnis zwischen elektrischem und magnetischem Feld entspricht der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

### Polarisation

Transversalwellen können in mehreren **Polarisationszuständen** auftreten (siehe Abb. 2.1.2). Hierzu betrachten wir den allgemeinen Fall, daß das elektrische Feld Komponenten in x- und in y-Richtung besitzt. Diese Komponenten können sich bezüglich ihres Betrages  $E_x$  bzw.  $E_y$  aber auch bezüglich ihrer Phase  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  unterscheiden. Dies wird durch einen sog. **Jones-Vektor** ausgedrückt:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x e^{i\varphi_x} \\ E_y e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \quad (2.1.20)$$

- **linear polarisiert**

Falls die Differenz der Phasen  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y = 0$  ist, so bekommt man linear polarisiertes Licht, da beide Komponenten in Phase schwingen. Die Orientierung der Polarisation in Ausbreitungsrichtung kann man in einem Zeigerdiagramm ausdrücken, das durch die x- und y-Richtung aufgespannt wird.

Bei einer linearen Polarisation ändert sich die Richtung des Zeigers im Zeigerdiagramm nicht mit der Zeit.

- **zirkular polarisiert**

Falls die Differenz der Phasen  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pm\pi/2$  ist, so bekommt man rechts bzw. links zirkular polarisiertes Licht. Die Orientierung der Polarisation in Ausbreitungsrichtung entspricht einem Zeiger, der seinen Betrag beibehält aber in einem Zeigerdiagramm umläuft.

- **elliptisch polarisiert**

Für eine beliebige Phase  $\varphi \neq 0$  ergibt sich elliptisch polarisiertes Licht. Die Orientierung der Polarisation in Ausbreitungsrichtung entspricht einem Zeiger, der in einem Zeigerdiagramm eine Ellipse durchläuft.

Die Polarisation eines Lichtstrahls stellt sich bei der Erzeugung des Photons ein. Er kann allerdings durch entsprechende optischen Elemente später noch verändert werden.



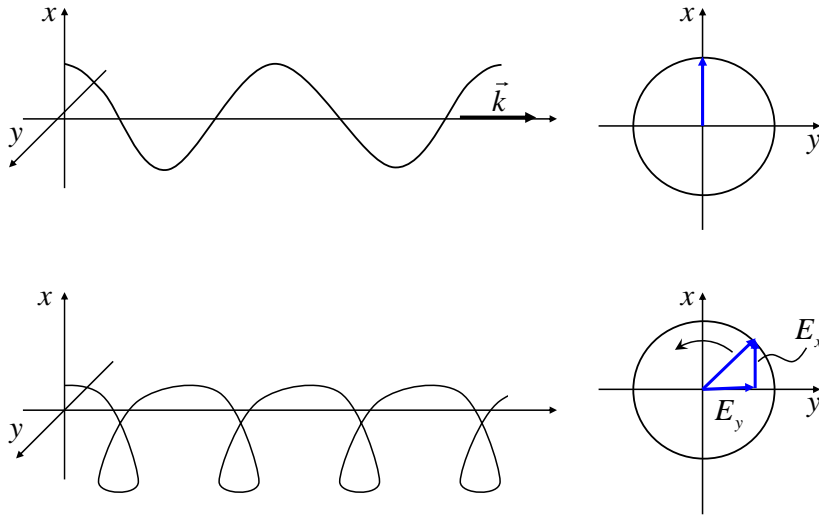


Abbildung 2.1.2: Linear und zirkular polarisiertes Licht.

### 2.1.3 Energiedichte und Impuls

#### Energietransport einer Welle, Intensität

Elektromagnetische Wellen tragen Energie und Impuls. Die Energiedichte des elektrischen und magnetischen Feldes war allgemein:

$$w_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) \quad (2.1.21)$$

Für eine elektromagnetische Welle hatten wir abgeleitet  $B^2 = E^2/c^2$ . Damit folgt sofort:

$$w_{em} = \epsilon_0 E^2 \quad (2.1.22)$$

Den Transport von Energie bezeichnet man als **Intensität** oder als **Bestrahlungsstärke**  $I$ , die aus dem Produkt von Energiedichte mal Ausbreitungsgeschwindigkeit gegeben ist:

$$\boxed{I = \epsilon_0 E^2 c} \quad (2.1.23)$$

Als Einheit bekommt man Watt pro Quadratmeter. Im zeitlichen Mittel ergibt diese Bestrahlungsstärke für eine elektrische Welle ( $E = E_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ ):

$$\langle I \rangle = \epsilon_0 E^2 c \langle \sin^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 c \quad (2.1.24)$$

Dieser Energietransport wird hinsichtlich seines Betrages und seiner Richtung durch den sog **Poynting-Vektor** ausgedrückt:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.1.25)$$

Setzt man die Beziehung zwischen Magnetfeld und elektrischem Feld einer Welle ein, so ergibt sich (da elektrisches und magnetisches Feld senkrecht aufeinander stehen) via:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 c E^2 \quad (2.1.26)$$

in der Tat die Bestrahlungsstärke.

Die Verknüpfung 2.1.25 gilt im Vakuum sowie für die Lichtausbreitung in isotropen Medien. In diesen Fällen stehen Ausbreitungsrichtung und das elektrische und magnetische Feld jeweils senkrecht aufeinander stehen. Im allgemeinsten Fall gilt allerdings für den Energietransport eine *Kontinuitätsgleichung* der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon E^2) + \mathbf{div} \vec{S} = 0 \quad (2.1.27)$$

Die Materie wird durch die formale Ersetzung  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon$  berücksichtigt (siehe unten).

### Impuls einer em-Welle, Strahlungsdruck

Neben dem Energietransport ist aber mit einer elektromagnetischen Welle auch ein Impuls verknüpft. Betrachten wir dazu einen Ladungsträger, der sich im Feld einer elektromagnetischen Welle befindet, die sich in x-Richtung ausbreitet und eine elektrische Feldkomponente in y-Richtung besitzt. Über einen Zeitraum  $t$  wirkt das elektrische Feld der Welle, das den Ladungsträger auf die Geschwindigkeit  $v_y$  beschleunigt:

$$v_y = at = \frac{qE}{m} t \quad (2.1.28)$$

Dabei erreicht er eine kinetische Energie von:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t^2 \quad (2.1.29)$$

Nachdem der Ladungsträger sich jetzt mit einer Geschwindigkeit  $v_y$  bewegt verspürt er allerdings auch eine Lorentzkraft im magnetischen Feld der

Welle! Diese Lorentzkraft ist dabei *in Richtung der Ausbreitung* der Welle orientiert. D.h. die Welle beschleunigt den Ladungsträger mit einer Kraft  $F$ :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qv_y B_z \vec{e}_x \quad (2.1.30)$$

Der Impuls  $p$ , der sich in einem Zeitraum  $t$  in x-Richtung einstellt ist:

$$p = \int_0^t F_x dt = \int_0^t \frac{q^2 EB}{m} t = \frac{1}{2} t^2 q^2 \frac{EB}{m} \quad (2.1.31)$$

mit  $|B| = \frac{1}{c}|E|$  ergibt sich:

$$p = \frac{1}{c} \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m}}_{E_{kin}} t^2 \quad (2.1.32)$$

Nachdem die kinetische Energie, die das Teilchen gewinnt aus der elektromagnetischen Energie der Welle bezogen wurde gilt  $E_{kin} = E_{em}$ . D.h. wir bekommen als Impuls einer elektromagnetischen Welle den Ausdruck:

$$\boxed{p_{em} = \frac{E_{em}}{c}} \quad (2.1.33)$$

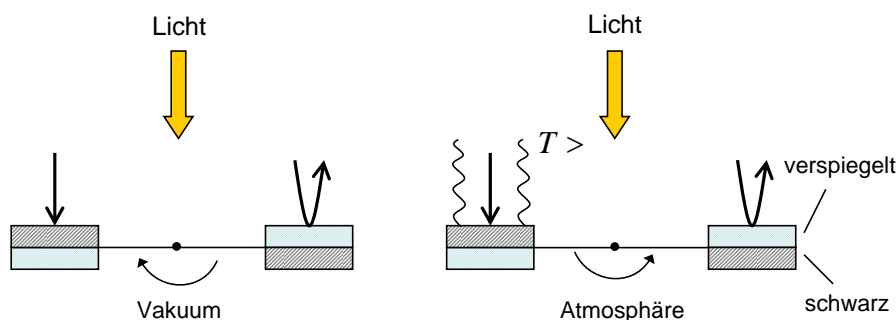
Der Impulsübertrag von Licht auf Materie läßt sich an mehreren Beispielen illustrieren:

- **Lichtmühle**

Bei einer **Lichtmühle** sind die Flügel aus einer Fläche hergestellt, die auf einer Seite schwarz auf der anderen Seite verspiegelt sind. D.h. das Licht trifft entweder auf eine verspiegelte oder auf eine geschwärzte Fläche (siehe Abb. 2.1.3). Bei der geschwärzten Fläche wird ein Impuls  $p$  übertragen ( $p_{vorher} = p$ ,  $p_{nachher} = 0$ ,  $\Delta p = p$ ), während bei einer verspiegelten Fläche durch die Reflexion der Impuls  $2p$  übertragen wird ( $(p_{vorher} = p, p_{nachher} = -p, \Delta p = 2p)$ ). D.h. Licht, das von einer Seite auf diese Mühle fällt bewegt diese in Richtung der schwarzen Fläche.

Die meisten Mühlen bewegen sich allerdings nicht im Vakuum sondern in Atmosphäre. Dort heizt sich die beleuchtete schwarze Fläche stärker auf als die verspiegelte, und das *abströmende* heiße Gas erzeugt einen Rückstoß: die Lichtmühle dreht sich in die Richtung der verspiegelten Fläche.

- **Ablenkung Kometenschweif**

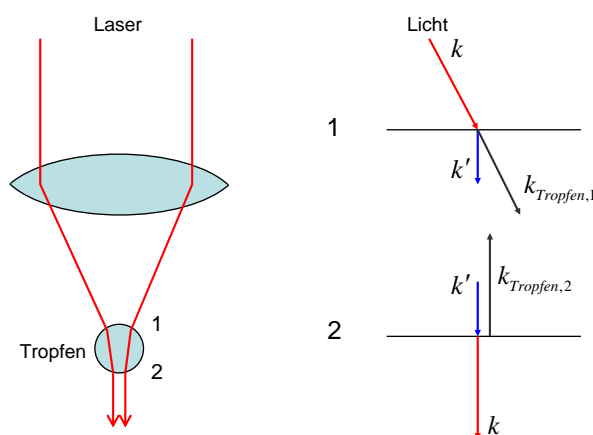


**Abbildung 2.1.3:** Bei einer Lichtmühle besitzen die Flügel eine schwarze und eine verspiegelte Fläche. Im Vakuum führt der größere Rückstoß auf die verspiegelte Fläche zu einer Rotation, wie angedeutet. Bei Atmosphäre dominiert die stärkere Erwärmung der schwarzen Fläche, die das umgebende Gas erwärmt, was seinerseits einen größeren Rückstoß auf den geschwärzten Flügel ausübt.

Die abströmende Materie, die den Schweif eines **Kometen** bildet wird beim Umlauf um die Sonne in eine Richtung weg von der Sonne abgelenkt. Dies geschieht durch den Strahlungsdruck.

### • Optische Pinzette

Eine neuere Anwendung des Strahlungsdruckes ist eine **optische Pinzette**. Hierbei wird ein Objekt im Fokus eines Laserstrahls festgehalten. Dies wollen wir am Beispiel eines Tropfens illustrieren (siehe Abb. 2.1.4). Lichtstrahlen dringen an der Grenzfläche in den Tropfen ein und werden dort gebrochen. D.h. die Richtung und Geschwindigkeit (siehe Kap. 2.2) des Lichtes ändert sich. Dies ist gleichbedeutend mit einem Impulsübertrag (Die Geschwindigkeit bzw. Wellenlänge des Lichtes reduziert sich, entsprechend bekommt der Tropfen einen Impuls in Richtung des Lichtstrahls bei Eintreten in den Tropfen:  $\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$ ). Beim Austreten aus dem Tropfen findet diesmal wieder ein Impulsübertrag statt, diesmal nur in die andere Richtung (die Lichtgeschwindigkeit ist größer und der Tropfen bekommt den entsprechenden Rückstoß,  $\vec{k}' \rightarrow \vec{k}$ ). Wenn jetzt die Winkel beim Eintreten in den Tropfen und beim Austreten aus dem Tropfen unterschiedlich sind, ist der entsprechende Impulsübertrag auch unterschiedlich. D.h. die Schwerkraft kann kompensiert werden. Die Kräfte, die man damit ausüben kann sind im Bereich pN. Damit ist es möglich einzelne DNA-Moleküle in einem Lichtfeld zu fixieren.



**Abbildung 2.1.4:** Prinzip einer Optischen Pinzette: durch den Rückstoß beim Ein- und Austreten eines Laserstrahls in bzw. aus einem Tropfen entsteht eine Nettokraft nach oben. An der Grenzfläche 1 ist der Winkel in dem das Licht in den Tropfen eintritt ein anderer als an der Grenzfläche 2. Entsprechend unterscheidet sich der Impulsübertrag.

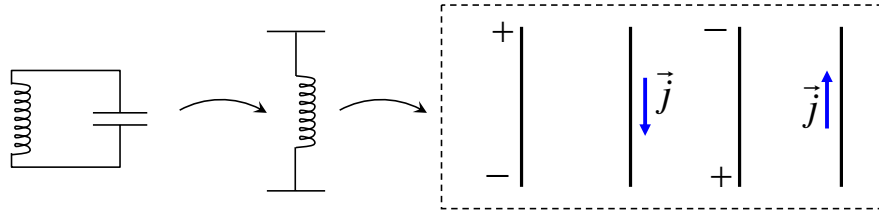
### 2.1.4 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Elektromagnetische Wellen können auf unterschiedliche Art und Weise erzeugt werden. Wesentlich ist hierbei die Tatsache, daß beschleunigte Ladungsträger Wellen abstrahlen. Bei einer gleichförmigen Bewegung kann man sich immer in das entsprechende Bezugssystem transformieren und erhält eine ruhende Ladung mit entsprechenden statischen Feldern. Eine solche Transformation ist bei beschleunigten Ladungen nicht möglich. Diese Beschleunigung kann eine makroskopische Beschleunigung aber auch die Bewegung der Elektronen in einer Antenne oder in einem Atom (bei Strahlungsübergängen) sein.

#### Dipolstrahlung

Betrachten wir zunächst die Bewegung von Elektronen in einem Schwingkreis in dem sich das elektrische Feld und das magnetische Feld in einer Schwingungsperiode austauschen. Falls wir den Schwingkreis "aufbiegen" und strecken gelangen wir zu einer linearen Anordnung, einer Antenne, in denen die Elektronen schwingen (siehe Abb. 2.1.5). Dabei oszilliert auch die Energie zwischen elektrischem und magnetischem Feld.

Die Elektronen sollen sich über eine Strecke  $d_0$  gegenüber den positiven Ionen bewegen. Damit entsteht ein elektrisches Dipolmoment, das sich zeitlich ändert!



**Abbildung 2.1.5:** Durch das "Aufbiegen" eines Schwingkreises kann man die Oszillation zwischen einem elektrischen Feld und einem magnetischen Feld in einer Antenne motivieren.

$$\vec{p} = qd_0 \sin \omega t = q\vec{d} \quad (2.1.34)$$

Für die Berechnung der Abstrahlung eines solchen Dipols betrachten wir die elektrischen und magnetischen Felder, die sich ausbilden.

### Einschub Vektorpotential

Für die Ableitung ist es zweckmäßig das sogenannte **Vektorpotential**  $\vec{A}$  einzuführen. Formal definieren wir:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.1.35)$$

Diese Ersetzung hat den Vorteil, daß sich das Gesetz von Biot-Savart einfacher formulieren läßt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} dV_2 \quad (2.1.36)$$

Wir ersetzen formal  $\vec{B}$  durch  $\nabla \times \vec{A}$  und erhalten:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} dV_2 \quad (2.1.37)$$

bzw.

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} dV_2 \quad (2.1.38)$$

Jetzt vertauschen wir im Integranden das Kreuzprodukt:

$$\nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{j}}{|\vec{r}_{12}|^3} dV_2 \quad (2.1.39)$$

Mit der Beziehung  $\nabla \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$  läßt sich der Term in  $\vec{r}_{12}$  auflösen zu:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\vec{j}}{|\vec{r}_{12}|} dV_2 \quad (2.1.40)$$

Man erkennt, daß für das Vektorpotential eine einfachere Integration ausreicht<sup>4</sup>:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{|\vec{r}_{12}|} dV_2} \quad (2.1.41)$$

Der elektrische Dipol ist:

$$\vec{p} = qd_0 \sin \omega t = q\vec{d} \quad (2.1.42)$$

Bzw. die zeitliche Änderung:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = qd_0\omega \cos \omega t = q \frac{d\vec{d}}{dt} = q\vec{v} = \vec{j} \quad (2.1.43)$$

Damit bekommen wir ein Vektorpotential von:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.1.44)$$

Wenn wir  $\vec{p}$  einsetzen, erhalten wir:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|} qd_0\omega \cos \omega t \vec{e}_z \quad (2.1.45)$$

An dieser Stelle ist es allerdings wichtig zu beachten, daß wir das Potential am Ort  $\vec{r}$  zu einem Zeitpunkt  $t$  suchen. Nachdem die elektromagnetischen Wellen eine *endliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen, ist die Stromverteilung zu einem früheren Zeitpunkt mit dem Vektorpotential zum Zeitpunkt  $t$  verknüpft. Dies läßt sich retardierte bzw. avancierte Potentiale berücksichtigen bei denen  $t \rightarrow t - \frac{r}{c}$  im Integranden ersetzt wird. Damit bekomme wir:

<sup>4</sup>Die Formulierung des Vektorpotentials ist invariant zur Addition des Gradienten eines beliebigen skalaren Potentials  $\phi$ . D.h. ein Ansatz  $\vec{A}$  liefert dasselbe Ergebnis wie  $\vec{A} + \text{grad}\phi$ .

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}_{12}|} qd_0\omega \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \vec{e}_z \quad (2.1.46)$$

Über  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  läßt sich jetzt das Magnetfeld ermitteln.

Als Endergebnis der Berechnung des magnetischen Feldes bekommen wir:

$$\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[ \underbrace{\left( \dot{\vec{p}} \times \vec{r} \right)}_{\text{Nahfeld}} + \underbrace{\frac{r}{c} \left( \ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right)}_{\text{Fernfeld}} \right] \quad (2.1.47)$$

Diese Magnetfeld besitzt zwei Anteile die einmal mit  $1/r^2$  und mit  $1/r$  abfallen. Nachdem der quadratische Abfall schneller erfolgt dominiert der erste Term das Nahfeld während der zweite Term das Fernfeld dominiert.

- **Nahfeld**

Der erste Term beschreibt den Nahbereich des Magnetfeldes. Ein Vergleich mit dem Biot-Savart-Gesetz zeigt, daß dieser Anteil dem einer oszillierenden Stromverteilung (wegen  $\dot{\vec{p}} = \vec{j}$ ) entspricht:

$$\vec{B}_{\text{Nahfeld}}(r, t) \propto \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left( \dot{\vec{p}} \times \vec{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2.1.48)$$

Das Magnetfeld ist instantan dasjenige, das durch einen Strom  $\vec{j}$  erzeugt wird.

- **Fernfeld**

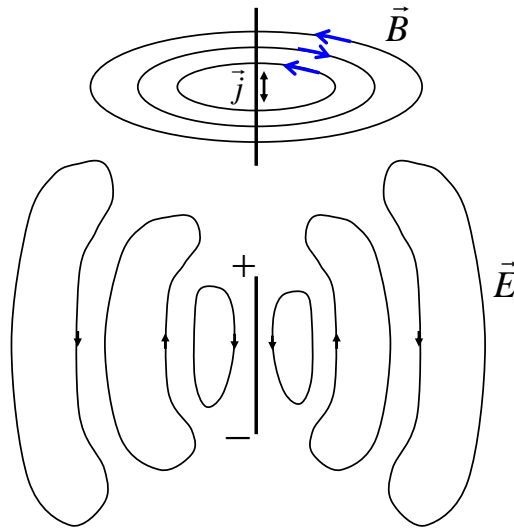
Das Fernfeld eines elektrischen Dipols wird allerdings durch die Verkopplung von Magnetfeld und elektrischem Feld bestimmt. Der zweite Term besagt:

$$\vec{B}_{\text{Fernfeld}}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^2} \left( \ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right) \quad (2.1.49)$$

Dieser ist proportional zu  $\ddot{\vec{p}} \propto \dot{v} \propto \dot{\vec{j}}$ . D.h eine zeitliche *Änderung des Stromes* erzeugt ein zeitlich veränderliches Magnetfeld, daß seinerseits ein elektrische Feld erzeugt! D.h. über das Induktionsgesetz sind wieder elektrische und magnetische Felder verkoppelt und das Fernfeld entspricht der Emission von *Transversalwellen*! Dieses Fernfeld nimmt mit  $1/r$  ab, d.h. daß die Energiedichte in der Welle mit  $1/r^2$  mit dem Abstand  $r$  zum Dipol abnehmen muß (wegen  $w_{em} \propto E^2$  bzw.  $w_{em} \propto B^2$ ).



Dies ist konsistent, da die gesamte Energiemenge, die ein Dipol abstrahlt, über die Oberfläche einer Kugel im Abstand  $r$  vom Dipol integriert, konstant bleiben muß.



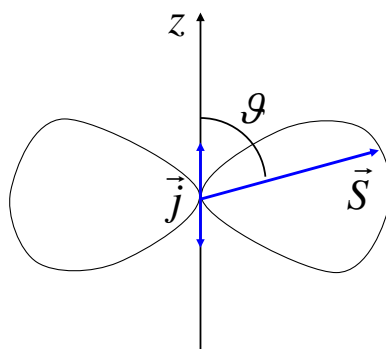
**Abbildung 2.1.6:** Magnetisches und elektrisches Feld eines elektrischen Dipols.

Aus dem Vektorpotential läßt sich zudem auch das elektrische Feld ausrechnen, was allerdings eine komplexe Aufgabe der theoretischen Elektrodynamik ist. Wenn wir daraus die räumliche Abstrahlung der Energie, den Poynting-Vektor bestimmen, erkennen wir, daß diese Abstrahlung *nicht* isotrop ist, sondern sich räumlich stark unterscheidet. Insbesondere in Richtung der Dipolachse werden keine elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Wenn wir mit  $\vartheta$  den Winkel der Emission zur Dipolachse beschreiben, bekommen wir für die Richtungsabhängigkeit von  $\vec{S}$  den Ausdruck (siehe Abb. 2.1.7):

$$S = \epsilon_0 c E^2 \propto \sin^2 \vartheta \quad (2.1.50)$$

Wenn wir diese Abstrahlcharakteristik mit den entsprechenden elektrischen Felder über die Oberfläche einer Kugel integrieren und über eine Periode der Schwingung zeitlich mitteln, bekommen wir als abgestrahlte Leistung:

$$\bar{P}_{em} = \left\langle \oint \vec{S} d\vec{F} \right\rangle_t = \frac{q^2 \omega^4 d_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \quad (2.1.51)$$



**Abbildung 2.1.7:** Abstrahlcharakteristik eines Dipols.

Man erkennt eine dominante Abhängigkeit proportional zu  $\omega^4$  der Frequenz der Schwingung. D.h. Dipole sehr hoher Frequenz strahlen sehr intensiv ihre Energie ab.

### Strahlung beschleunigter Ladungen

Bei der Emission eines Dipols haben wir eine oszillierende Ladungsverteilung betrachtet. Allerdings gilt auch ganz allgemein, daß eine beschleunigte Ladung elektromagnetische Wellen aussendet. Dies wollen wir im folgenden illustrieren. Betrachten wir zunächst eine Ladung, die ein elektrisches Feld erzeugt. Dieses Feld ist allerdings nicht instantan da, sondern kann sich nur mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  *radial* ausbreiten. D.h. wenn wir zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Ladung am Ort  $r$  erzeugen, ist erst nach einer Zeit  $\Delta t = r/c$  dieses Feld am Ort  $r$  sichtbar.

Bewegt sich diese Ladung gleichförmig, so werden die elektrischen Feldlinien durch diese Bewegung verbogen. Durch eine Transformation in ein bewegtes Bezugssystem kann diese Bewegung allerdings wieder kompensiert werden und man erhält die radialen Feldlinien einer ruhenden Ladung.

Bei einer Beschleunigung der Ladung kann man allerdings nicht mehr per Transformation in ein bewegtes Bezugssystem, diese Verbiegung der Feldlinien weg transformieren. Betrachten wir dazu Abb. 2.1.5: Zu einem Zeitpunkt  $t = 0$  befinde sich die Ladung im Zentrum ( $r = 0$ ) und erzeugt eine radiale Verteilung der elektrischen Feldlinien. Zum einem Zeitpunkt  $t_1$  wird die Ladung beschleunigt und gelangt an einen Ort  $r = r_1$  und ruht wieder. Auch von diesem neuen Ort gehen die Feldlinien wieder radial nach außen. Allerdings müssen die Feldlinien immer geschlossen bleiben, d.h. für die Zeitdauer der Beschleunigung müssen wir die korrekten Feldlinien *konstruieren*. Dies gelingt indem die Linien des inneren mit denen des äußeren Kreises

verbunden werden. Man erkennt, daß plötzlich eine *tangentiale* Komponente im elektrischen Feld auftritt, die in die Richtung *senkrecht* zur Beschleunigung maximal wird. Die räumliche Verteilung dieses tangentialen elektrischen Feldes gleicht dem eines elektrischen Dipols, dessen Achse in Richtung der Beschleunigung orientiert ist (vgl. Abb. 2.1.7)! Diese Art der Abstrahlung wird für mehrere Anwendung genutzt:

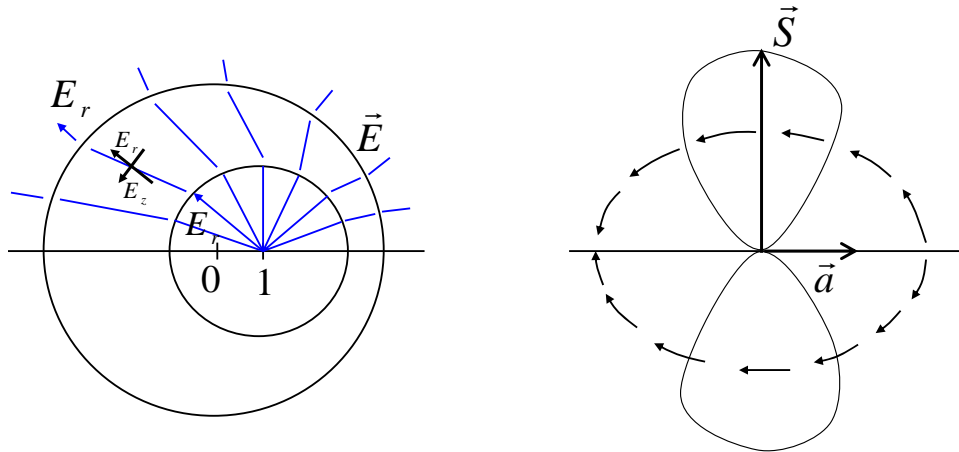


Abbildung 2.1.8: Dipolstrahlung einer beschleunigten Ladung.

- **Synchrotronstrahlung**

Bei der Synchrotronstrahlung nutzt man die radiale Beschleunigung eines Elektrons in einem Ringbeschleuniger aus. Dabei erreichen Elektronen nahezu Lichtgeschwindigkeit. Für den stationären Experimentator erscheint die Strahlung durch die Lorentz-Transformation allerdings sehr stark in Vorwärtsrichtung konzentriert. Zudem zeigt sich eine sehr breite spektrale Verteilung, die von Wellenlängen im Angstrombereich bis ins Infrarote reicht. Dies macht diese Lichtquelle besonders geeignet für die vielfältigsten Untersuchungen.

- **Bremsstrahlung**

Bei der Bremsstrahlung wird ein Elektron, das auf ein Material fällt, im Potential eines Atoms des Festkörpers abgelenkt. Hierbei strahlt es ab und erzeugt zum Beispiel den Untergrund in jeder Röntgenröhre.

## Strahlung von Atomen, Molekülen und Festkörpern

Neben der Strahlung von elektrischen und magnetischen Dipolen und auch freien Ladungen ist auch die Schwingung in einem Atom die Quelle für elek-

tromagnetische Strahlung. Bei dem Übergang von Elektronen zwischen den einzelnen Schalen, ändert sich das Dipolmoment  $p$  eines Atoms und die zeitliche Änderung von  $p$  bedingt die Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen<sup>5</sup>.

## 2.1.5 Stehende Wellen

### Reflexion einer Welle

Bei der Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einer leitenden Oberfläche müssen die Randbedingungen der Elektrostatik erfüllt werden. Bei senkrechtem Einfall auf eine Metalloberfläche zum Beispiel müssen die elektrischen Komponenten parallel zur Oberfläche verschwinden. Die hin- und rücklaufende Welle überlagern sich zu:

$$E_x = E_{0i} \sin(\omega t - kz) + E_{0r} \sin(\omega t + kz) \quad (2.1.52)$$

Wobei die Amplitude der hinlaufenden Welle  $E_{0i}$  und die der rücklaufenden Welle  $E_{0r}$  sei. Am Ort  $z = 0$  befinde sich die leitende Oberfläche. Damit dort das elektrische Feld für *beliebige* Zeiten verschwindet muß gelten  $E_0 = E_{0r} = -E_{0i}$ . Damit bekommen wir:

$$E_x(z, t) = -2E_0 \sin kz \cos \omega t \quad (2.1.53)$$

Der Term  $\sin kz$  erzeugt an festgelegten Orten  $z$  Maxima und Minima des elektrischen Feldes. Diese Knoten und Bäuche entsprechen **stehenden Wellen**.

Mit der Rechten-Hand-Regel für das Magnetfeld, wie in Abb. 2.1.6 illustriert, bekommen wir mit

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (2.1.54)$$

als Lösung:

$$B_y(z, t) = -2B_0 \cos kz \sin \omega t \quad (2.1.55)$$

Falls wir eine elektromagnetische Welle nicht nur reflektieren lassen, sondern sie in einem Hohlraum begrenzen, so müssen wir die Randbedingungen

---

<sup>5</sup>Die Abstrahlung von Atomen wird nur durch Übergänge zwischen einzelnen Niveaus erzeugt. Die Bewegung eines Elektrons auf seiner Bahn selbst strahlt nicht, das ein quantenmechanischer Zustand ist. Dasselbe gilt auch für die Abstrahlung von supraleitenden Elektronen in einer Supraleiter-Spule. Auch dies ist ein makroskopisch besetzter Quantenzustand, der nicht abstrahlen kann.

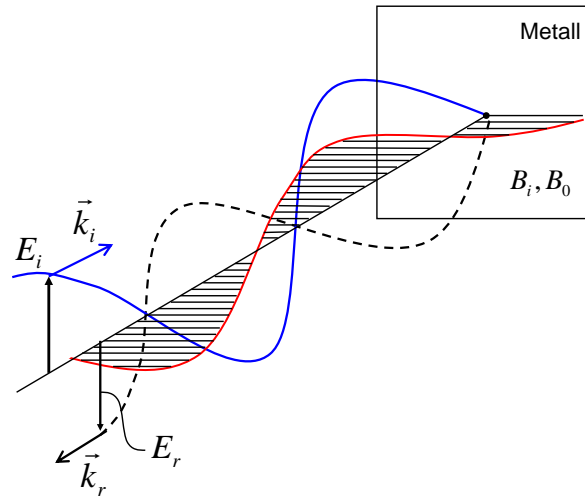


Abbildung 2.1.9: Reflexion einer em-Welle.

an zwei Grenzflächen *gleichzeitig* erfüllen. Damit sind nur noch bestimmte Wellenlängen möglich, die den Wellenvektor festlegen:

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (2.1.56)$$

Wenn der Hohlraum quaderförmig ist, bekommen wir mit den Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  für eine Welle, die in Richtung der Kante  $a$  in den Hohlraum eingepasst ist, die periodische Randbedingung mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$k_x = n \frac{\pi}{a} \quad (2.1.57)$$

Allgemein gilt für den Wellenvektor und damit für die Frequenz in der eine Welle in dem Hohlraum schwingen kann die Bedingung (für ganze Zahlen  $n, m$  und  $q$ ):

$$\omega = ck = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}} \quad (2.1.58)$$

Solche Hohlraumresonatoren für elektromagnetische Schwingungen werden vielfach eingesetzt. Ein bekanntes Beispiel ist jeder Mikrowellenherd in der sich stehende Wellen ausbilden. Damit die Lebensmittel gleichmäßig erwärmt werden muß sich dort immer ein Drehteller befinden, der die Lebensmittel gleichmäßig durch die Schwingungsmaxima bewegt<sup>6</sup>

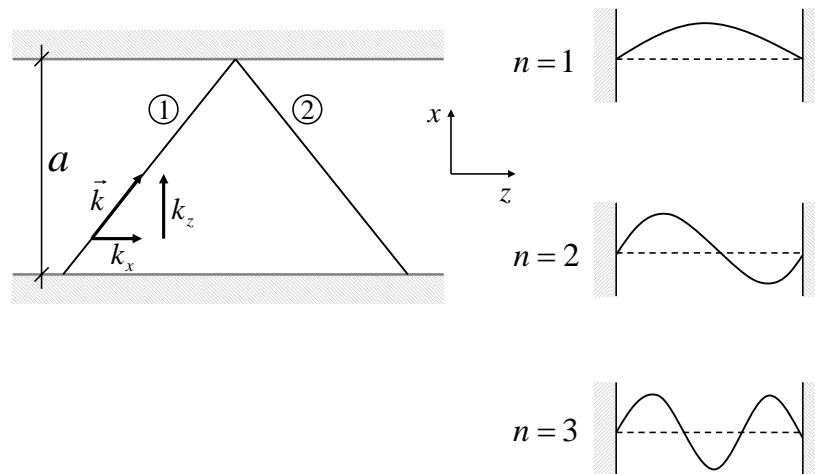
<sup>6</sup>Zum Teil wird die Mikrowellenstrahlung auch noch "verwirbelt", um die Verteilung gleichmäßiger zu gestalten.

## Wellenleiter

In einer leitfähigen Struktur lassen sich elektromagnetische Wellen auch führen. Betrachten wir dazu eine elektromagnetische Welle zwischen zwei leitenden Wänden. Diese Welle möge sich in  $x$ - und in  $z$ -Richtung fortbewegen. In Analogie zur Betrachtung der Reflexion einer Welle in einer Dimension bekommen wir in zwei Dimensionen:

$$E_y = E_0 \sin(\omega t - k_x x - k_z z) - E_0 \sin(\omega t + k_x x - k_z z) \quad (2.1.59)$$

$$= -2E_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z) \quad (2.1.60)$$



**Abbildung 2.1.10:** Ausbreitung einer em-Welle in einem Hohlleiter. In  $x$ -Richtung ergeben sich stehende Wellen, sog. Transversalmoden.

Für die Wellenzahl in  $x$ -Richtung gelten jetzt periodische Randbedingungen der Form:

$$k_x = n \frac{\pi}{a} \quad (2.1.61)$$

Was ist jetzt die Phasengeschwindigkeit dieser Welle in  $z$ -Richtung. Diese ist definiert als:

$$v_{Phase}|_z = \frac{\omega}{k_z} \quad (2.1.62)$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle selbst ist die Lichtgeschwindigkeit, für die gilt:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \quad (2.1.63)$$

Wenn wir beide Ansätze vergleichen, erkennen wir, daß die Phasengeschwindigkeit in z-Richtung sogar größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

$$v_{Phase} = \frac{c}{k_z} \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \geq c \quad (2.1.64)$$

Dies ist noch kein Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie, die besagt, daß sich Information nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Für letzteres gilt die Gruppengeschwindigkeit der Form:

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{dk_z} = c \frac{2k_z}{2\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{c^2}{\omega} k_z = \frac{c^2}{v_{Phase}} < c \quad (2.1.65)$$

Die leitende Struktur in der sich die Welle ausbreitet wird oft als **Hohlleiter** bezeichnet. Es existieren mehrere transversale Moden, die sich hinsichtlich der Zahl der Knoten in x-Richtung unterscheiden.

Es ist allerdings auch möglich elektromagnetische Wellen entlang sehr viel einfacherer Strukturen zu transportieren. Betrachten wir dazu zwei Drähte, die in einem Abstand  $a$  parallel zueinander gespannt sind und am Ende kurzgeschlossen sind (siehe Abb. 2.1.11). Falls wir einen Wechselstrom in die Leitung einprägen, so bekommen wir eine oszillierende Verteilung der Ladungsträgerdichte. Diese erzeugt ein oszillierendes elektrisches Feld *zwischen* den beiden Leitungen. Falls der Abstand der beiden Leitungen klein ist, so liegen sich die Maxima und Minima der Stromverteilung direkt gegenüber. Bei größerem Abstand ergeben sich entsprechende Phasenverschiebungen.

Diese oszillierenden Ströme und Spannungen lassen sich abstrakter darstellen als eine bestimmte Ladungsmenge und ein elektrisches Potential, das sich auf einem Abschnitt der Doppelleitung kontinuierlich ändert (siehe Abb. 2.1.9). Die Änderung der Spannung über einen Abschnitt wird durch die Stromänderung induziert. Gemäß dem Induktionsgesetz ist diese Änderung:

$$\Delta U = U(z + \Delta z) - U(z) = -\hat{L} \Delta z \frac{dI}{dt} \quad (2.1.66)$$

mit  $\hat{L}$  der Induktivität pro Länge. D.h. wir bekommen

$$\frac{dU}{dz} = -\hat{L} \frac{dI}{dt} \quad (2.1.67)$$

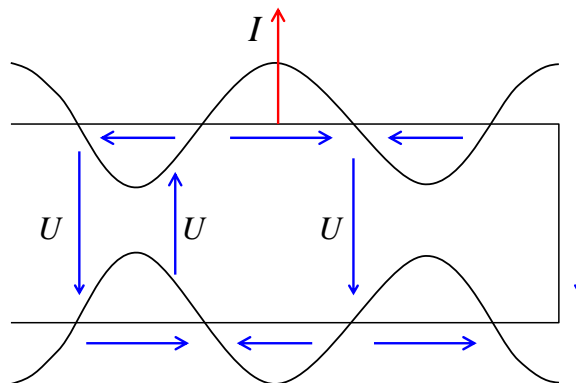


Abbildung 2.1.11: Lecherleitung.

Der Strom ändert sich durch die zu- und abfließende Ladung auf einem Abschnitt  $\Delta z$  der Doppelleitung. Die Fähigkeit diese Ladung auf einem Abschnitt zu speichern wird allerdings von der Kapazität pro Meter bestimmt und man bekommt:

$$\Delta I = I(z + \Delta z) - I(z) = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta t} \Delta U \hat{C} \Delta z \quad (2.1.68)$$

bzw.

$$\frac{dI}{dz} = -\hat{C} \frac{dU}{dt} \quad (2.1.69)$$

Wenn wir jetzt Gl. 2.1.67 und 2.1.69 kombinieren, so erhalten wir eine Wellengleichung der Form:

$$\boxed{\frac{d^2 I}{dz^2} = \hat{L} \hat{C} \frac{d^2 I}{dt^2}} \quad (2.1.70)$$

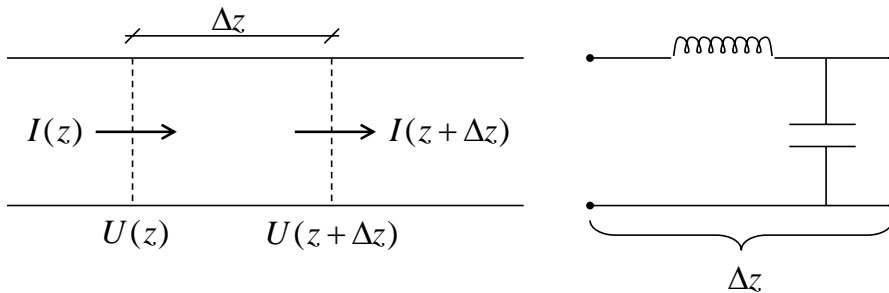
Diese Gleichung bezeichnet man auch als **Telegrafengleichung**. Die Wellenausbreitung auf zwei parallelen Drähten bezeichnet man als **Lecherleitung**. Eine identische Gleichung läßt sich für die Spannung  $U$  ableiten. Die Phasengeschwindigkeit ist:

$$v_{phase} = \frac{1}{\sqrt{\hat{L} \hat{C}}} \quad (2.1.71)$$

Man bekommt einen symmetrischen Ausdruck zur Resonanzfrequenz ei-



nes Serien- oder Parallelschwingkreises!<sup>7</sup> Dies ist sofort einsichtig, da ein Ersatzschaltbild eines Leitungsabschnittes der Länge  $\Delta z$  genau der Serienschaltung einer Induktivität und eines Kondensators entspricht. Die ganze Leitung selbst ist dann eine unendliche Aneinanderreihung von Serienschwingkreisen und die Wellenausbreitung eine Folge der Kopplung dieser Schwingkreise untereinander.



**Abbildung 2.1.12:** Ableitung der Telegraphengleichung: eine Parallelleitung kann als Abfolge von Serienschwingkreisen interpretiert werden. Diese sind gekoppelt und ermöglichen so die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen.

Aus der Lösung der Wellengleichung bekommen wir das Verhältnis für Strom und Spannung der Form:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{\hat{L}}{\hat{C}}} \quad (2.1.72)$$

Dies bezeichnet man als **Wellenwiderstand**.

Signale in physikalischen Experimenten werden in der Regel in Wellenleitern transportiert, wobei die häufigste Anordnung das Koaxialkabel ist. Durch die Überlagerung der Felder des Inneren mit dem äußeren Draht ist, die Abstrahlung in den Außenraum minimiert. Der Wellenwiderstand dieser Kabel ist oftmals auf  $Z = 50\Omega$  spezifiziert.

## 2.1.6 Licht

Elektromagnetische Wellen sind eine spezielle Lösung der Maxwellgleichungen im Vakuum. Sie werden durch beschleunigte Ladungen erzeugt, wobei

<sup>7</sup>Bei der Resonanzfrequenz bekommt man als Einheit  $s^{-1}$ . Hier ergibt sich eine Geschwindigkeit, da  $\hat{L}$  und  $\hat{C}$  als Induktivitäten und Kapazitäten *pro Meter* eingeführt wurden.

Bezeichnung	Frequenz [Hz]	Wellenlänge [m]	Energie [eV]
Radiowellen	$10^4 \dots 10^8$	$10^4 \dots 1$	$10^{-10} \dots 10^{-6}$
Mikrowellen	$10^8 \dots 10^{11}$	$1 \dots 10^{-3}$	$10^{-6} \dots 10^{-4}$
Infrarot	$10^{11} \dots 10^{14}$	$10^{-3} \dots 10^{-6}$	$10^{-4} \dots 1$
Sichtbar	$10^{15}$	$10^{-6}$	1
UV	$10^{15} \dots 10^{17}$	$10^{-6} \dots 10^{-8}$	$1 \dots 10^2$
Röntgen	$10^{17} \dots 10^{20}$	$10^{-8} \dots 10^{-11}$	$10^2 \dots 10^5$
$\gamma$	$>10^{20} \dots 10^{20}$	$>10^{-11}$	$>10^5$

**Tabelle 2.1:** Licht wird je nach Frequenz und Wellenlänge unterschiedlich bezeichnet. Die Zahlenwerte sind keine scharfen Grenzen, sondern geben nur die typische Größenordnung an.

es unerheblich ist, ob diese Beschleunigung makroskopisch wie in einem Beschleuniger oder mikroskopisch wie in einem Atom oder in einem Atomkern erfolgt. Diese elektromagnetischen Wellen werden allgemein als **Licht** bezeichnet.

### Frequenzspektrum

Der Ausdruck *Licht* bezieht sich nicht grundsätzlich auf den sichtbaren Anteil, sondern ist eine *alternative* Bezeichnung für elektromagnetische Wellen. Je nach Frequenz und Wellenlänge wird das Licht unterschiedlich bezeichnet, wie in Tabelle 2.1 aufgeführt ist. Als Umrechnung von Wellenlänge  $\lambda$  in Frequenz  $f$  verwendet man die Dispersion von Licht im Vakuum:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (2.1.73)$$

Einer Wellenlänge läßt sich auch eine Energie zuordnen, da Licht nach der Quantenphysik aus einzelnen Quanten, den Photonen, besteht. Die Energie eines solchen Photons ist mit dem Planck'schen Wirkungsquantum  $\hbar$  gegeben als:

$$E = \hbar\omega \quad (2.1.74)$$

Mit der Dispersion im Vakuum  $\omega = ck$  ergibt sich die Beziehung zwischen Wellenlänge und dieser Energie zu:

$$\lambda[\text{nm}] = \frac{1239.8[\text{nm}]}{E[\text{eV}]} \quad (2.1.75)$$

## Messung der Lichtgeschwindigkeit

Licht breitet sich unabhängig von der Wellenlänge und Frequenz im Vakuum immer mit der Lichtgeschwindigkeit aus. Die experimentelle Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit wurde schon früh realisiert, wie mit folgenden Methoden illustriert wird.

- **Mondfinsternis Jupitermond Io**

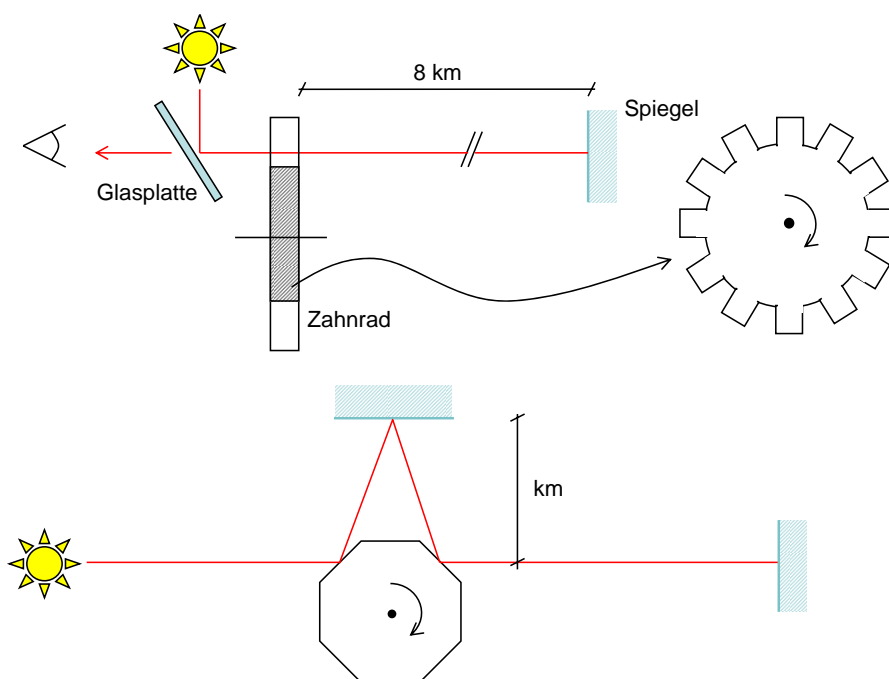
1675 stellte Rømer fest, daß die Jupiter-Finsternis (Dauer 42.5 h) des Jupitermondes Io unterschiedlich lange dauert, je nachdem ob sich die Erde auf ihrer Umlaufbahn vom Jupiter entfernt oder sich ihm nähert. Er konnte diesen Zusammenhang zwanglos erklären, in dem er forderte, daß die Geschwindigkeit des Lichtes endlich ist. Er leitete einen Zahlenwert in der Größe  $10^8 \text{ ms}^{-1}$  ab.

- **Zahnradmethode von Fizeau**

Die erste terrestrische Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit stammt von Fizeau 1849. Er verwendete ein rotierendes Zahnrad durch das ein Lichtstrahl periodisch geteilt wird; ein Lichtpuls entsteht. Dieser Lichtpuls fällt auf einen Spiegel in einer Entfernung von 8.6 km und wird zurück geworfen. Bei der richtigen Umdrehungsgeschwindigkeit des Zahnrads, kann dieser Lichtpuls wieder den nachfolgenden Zahn des Zahnrads passieren. Fizeau variierte solange die Geschwindigkeit des Zahnrads bis er ein klares Abbild des Lichtpulses bekam (siehe Abb. 2.1.13). Aus der Geschwindigkeit in der zwei Zahnradlücken aufeinander folgen und der Wegstrecke, die das Licht in der Zeit zurücklegen mußte ( $2 \times 8.6 \text{ km}$ ) ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit.

- **Spiegelmethode von Foucault**

In einer ähnlichen Anordnung hat Foucault 1858 die Lichtgeschwindigkeit über Reflexion eines Lichtstrahls an einem rotierenden Spiegle ermittelt. Der Lichtstrahl durchläuft nach einer ersten Reflexion eine lange Strecke ( $\simeq \text{km}$ ), wird an einem Spiegel reflektiert und auf den rotierenden Spiegel zurück geworfen. Nach einer zweiten Reflexion trifft er auf einen Leuchtschirm (siehe Abb. 2.1.13). Falls die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels synchron mit der Zeitspanne ist, die das Licht für die zurückgelegte Strecke zwischen den beiden Reflexionen benötigt, so steht das Abbild des Lichtpunktes und man kann aus der Rotationsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit berechnen.



**Abbildung 2.1.13:** Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau über ein rotierendes Zahnrad und nach Foucault über einen rotierenden Spiegel.

## 2.2 Elektromagnetische Wellen in Materie

### 2.2.1 Der Brechungsindex

Wenn elektromagnetische Wellen durch Materie laufen, überlagert sich eine Primärwelle mit Sekundärwellen, die durch **Streuung** der Primärwelle an den Atomrümpfen entsteht. Bei dieser Streuung tritt allerdings eine kleine Zeitverzögerung auf, da wie bei einer erzwungenen Schwingung die anregende Kraft (Primärwelle) und die resultierende Amplitude (Sekundärwelle) in der Resonanz um  $90^\circ$  gegeneinander verschoben sind. Überlagert man die Primärwelle und alle Sekundärwellen miteinander, so erscheint einem die Lichtausbreitung im Medium *verlangsamt*, wie in Abb. 2.2.1 an der kürzeren Wellenlänge ersichtlich. Dies bedeutet allerdings *nicht*, daß die Lichtgeschwindigkeit eines Photons sich reduziert. Die Verlangsamung ist nur scheinbar, da sie durch die Absorption und Emission von Lichtteilchen bei der Streuung der Wellen an den Atomen verursacht wird.<sup>8</sup> Die Verlangsamung der Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. der Phasengeschwindigkeit wird durch den **Brechungsindex** ausgedrückt. Dieser ist definiert als:

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Materie}}} = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (2.2.1)$$

Formal kann man dies auch erhalten indem man die Phasengeschwindigkeit einer Lichtwelle mit den Ersetzungen

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0\epsilon \quad (2.2.2)$$

$$\mu_0 \rightarrow \mu_0\mu \quad (2.2.3)$$

wie folgt definiert:

$$c_{\text{Vakuum}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (2.2.4)$$

$$c_{\text{Materie}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu\epsilon_0\epsilon}} \quad (2.2.5)$$

Der Brechungsindex ist mit der relativen Dielektrizitätskonstante und der Permeabilität verknüpft wie:

---

<sup>8</sup>Es ist sogar gelungen *langsames Licht* in besonderen Formen von Materie, den Bose-Einstein-Kondensaten, zu erzeugen, bei denen die Lichtgeschwindigkeit bis auf 17 Meter pro Sekunde reduziert wurde.

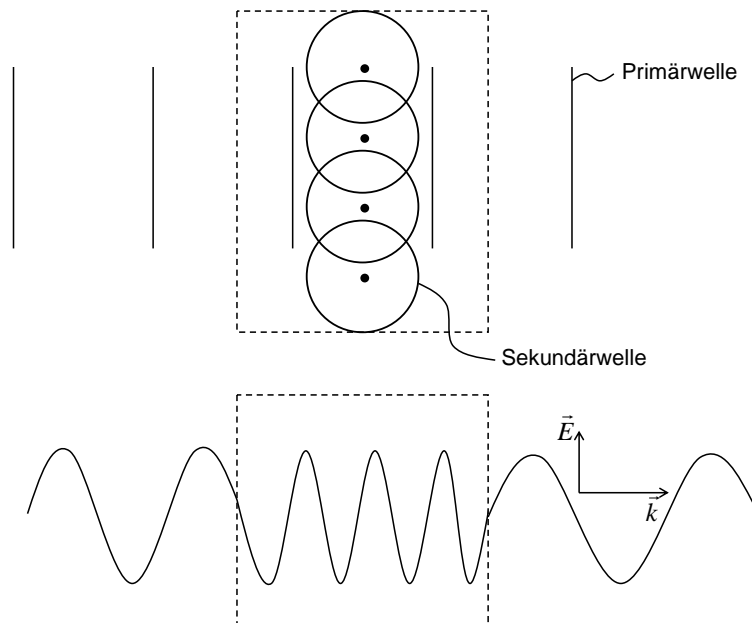
$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (2.2.6)$$

In der Regel sind die meisten Materialien der Optik unmagnetisch, so daß  $\mu \simeq 1$  gilt. In diesem Fall reduziert sich dieser Zusammenhang zu:

$$\boxed{n = \sqrt{\epsilon}} \quad (2.2.7)$$

Die Tatsache, daß sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit verringert, läßt sich in der Formulierung einer ebenen Welle einfach einführen indem man die Phasenlage  $\vec{k}\vec{r}$  mit dem Brechungsindex  $n$  multipliziert.

$$E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \rightarrow E_0 e^{i(\omega t - n\vec{k}\cdot\vec{r})} \quad (2.2.8)$$



**Abbildung 2.2.1:** Die Ausbreitung von Wellen in Materie ist eine Überlagerung von Primärwellen und Sekundärwellen.

Das Konzept des Brechungsindex ist allerdings noch leistungsfähiger. Bisher hatten wir die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit betrachtet und nicht die Möglichkeit der Abschwächung des Lichtes durch Absorption. Dies kann berücksichtigt werden in dem man den Brechungsindex formal als komplexe Zahl  $\tilde{n}$  definiert:

$$\boxed{\tilde{n} = n - i\kappa} \quad (2.2.9)$$

wobei der Realteil  $n$  die Änderung der Phasengeschwindigkeit und der Imaginärteil  $\kappa$  die Absorption beschreibt. Letzteres wird einsichtig, wenn wir die Abnahme der Intensität des Lichtes beim Durchgang durch ein Medium ansehen. Wenn wir für das elektrische Feld formal einen Ansatz mit einem komplexen Brechungsindex  $\tilde{\mathbf{n}}$  wählen bekommen wir:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{\mathbf{n}}kz)} = E_0 e^{i(\omega t - nkz)} e^{-\kappa kz} \quad (2.2.10)$$

D.h. die Amplitude enthält jetzt einen *reellen* Exponentialterm  $e^{-\kappa kz}$ , der die Dämpfung der Amplitude auf einer Wegstrecke  $z$  beschreibt und einen *imaginären* Anteil der die Phasenverschiebung durch die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit ausdrückt.

In einer Messung wird immer die **Intensität** auf einem Detektor nachgewiesen. Die Abschwächung der Intensität beim Durchgang durch ein Material der Dicke  $\Delta z$  ist dabei definiert als:

$$\boxed{I = I_0 e^{-\alpha \Delta z}} \quad (2.2.11)$$

Dies bezeichnet man als das **Lambert-Beer'sche Gesetz**<sup>9</sup>.  $\alpha$  bezeichnet den sog. **Absorptionskoeffizienten** in der Einheit  $m^{-1}$ .

Wie ist jetzt  $\alpha$  mit  $\kappa$  verknüpft? Die Intensität war:

$$I = c\epsilon_0 E^2 \quad (2.2.12)$$

Wenn wir den Ansatz für  $E = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{\mathbf{n}}k\vec{r})}$  einsetzen und die Gleichungen vergleichen erkennen wir daß:

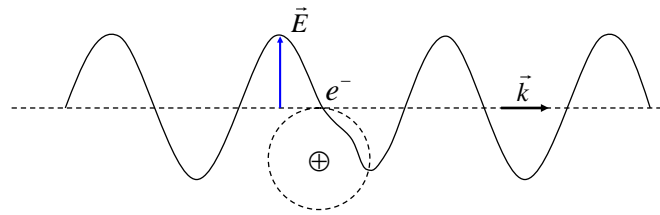
$$\boxed{\alpha = 2\kappa k = \frac{4\pi}{\lambda} \kappa} \quad (2.2.13)$$

## 2.2.2 Dispersion und Absorption

### Mikroskopische Beschreibung des Brechungsindex

Der komplexe Brechungsindex beschreibt mit seinem Realteil die Änderung der Phasengeschwindigkeit. Dies bezeichnet man als **Dispersion**. Der Imaginärteil beschreibt die Abschwächung des elektrischen Feldes beim Durchgang durch Materie, die **Absorption**. Im folgenden wollen wir untersuchen, wie die beiden Anteile Dispersion und Absorption sich mit der Frequenz bzw. Wellenlänge der elektromagnetischen Wellen für einige Materialien ändern.

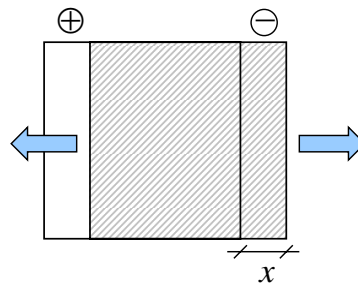
<sup>9</sup>Es gilt nicht bei Vielfachreflexionen in dünnen Filmen! Hier müssen die Wellenpakete kohärent überlagert werden (siehe unten).



**Abbildung 2.2.2:** Ein Elektron in einem Material wird durch eine vorbeilaufende elektromagnetische Welle beschleunigt.

- *freie Elektronen*

Betrachten wir zunächst die freien Elektronen in einem Festkörper. Sie seien nicht an die Atomrümpfe gebunden, können aber den Festkörper auch nicht verlassen. D.h. verschiebt man die Gesamtheit der Elektronen gegenüber den Atomrümpfen entsteht eine Polarisationsladung an den Oberflächen, die die Elektronen wieder zurück treibt (siehe Abb. 2.2.3). Diese Abhängigkeit kann man mit einer Federkonstanten  $c$  ausdrücken. D.h. die Beschleunigung eines Elektrons geschieht im elektrischen Feld der em-Welle, wobei die Bewegung wieder von dem elektrischen Feld durch die Ausbildung von Oberflächenladungen gebremst wird:



**Abbildung 2.2.3:** Die Plasmaschwingung von Elektronen in einem Festkörper. Durch eine Auslenkung  $x$  im Vergleich zu den Atomrümpfen entstehen Oberflächenladungen, die ein elektrisches Feld erzeugen, das der Auslenkung entgegen wirkt.

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = qE - cx \quad (2.2.14)$$

Dies läßt sich zu einer Schwingungsgleichung umformen und man be-



kommt:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m \omega_0^2 x = q E_0 \cos \omega t \quad (2.2.15)$$

mit  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ . Die Lösung ist von der Form  $x = x_0 \cos \omega t$  mit  $E = E_0 \cos \omega t$ :

$$x(t) = \frac{q}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 \cos \omega t \quad (2.2.16)$$

Die gesamte Polarisierung, die sich durch die Verschiebung der Ladungsträger einstellt, ist mit  $P = np$  gegeben als ( $p = qx$ ):

$$P = \frac{q^2 n}{\omega_0^2 - \omega^2} E \quad (2.2.17)$$

Aus  $\epsilon_0 \epsilon E = \epsilon_0 E + P$  bekommen wir den Ausdruck für die Dielektrizitätskonstante von:

$$\epsilon = 1 + \underbrace{\frac{q^2 n}{m_e \epsilon_0}}_{\omega_p^2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.2.18)$$

Mit  $\omega_p$  der sogenannten **Plasmafrequenz**:

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{q^2 n}{m_e \epsilon_0}} \quad (2.2.19)$$

Nachdem  $\tilde{n}^2 = \epsilon$  gilt, müssen wir aus Gleichung 2.2.18 die Wurzel ziehen, um den Brechungsindex zu bestimmen. Dabei kann der Brechungsindex komplex werden und beschreibt so gleichzeitig mit Real- und Imaginärteil *Dispersion* und *Absorption*.

- *gebundene Elektronen*

Betrachten wir Elektronen in einem Material, die an ein Atom gebunden sind. Auch dies läßt sich im einfachsten Modell als Federkonstante beschreiben. Zusätzlich wollen wir aber annehmen, daß die Schwingung der Elektronen gemäß einer Konstante  $b$  gedämpft wird. Man bekommt somit:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = qE - cx - b \frac{dx}{dt} \quad (2.2.20)$$

Wenn wir dies auf die bekannte Form einer Schwingungsgleichung umformen, bekommen wir:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_o \cos \omega t \quad (2.2.21)$$

mit der Lösung gemäß  $x = x_0 e^{i\omega t}$  bekommt man:

$$x(t) = \frac{\frac{qE}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.2.22)$$

Aus diesem Ausdruck läßt sich das Dipolmoment  $p = qx$  und die Polarisation  $P = np$  ableiten. Damit ergibt sich (analog zu oben) die Dielektrizitätskonstante zu

$$\epsilon = 1 + \omega_p^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.2.23)$$

Dieses einfache Modell läßt sich für die Anwendung auf viele Materialien elegant erweitern indem man mehrere Arten der Bindung eines Elektrons in einem Festkörper oder Atom überlagert. Diese unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Bindungsstärke, ihrer jeweiligen Dichte und ihrer Resonanzfrequenz. Dies wird durch eine Summe über  $j$  Bindungstypen eingeführt und man bekommt:

$$\epsilon = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega} \quad (2.2.24)$$

Die Resonanzfrequenz wird durch  $\omega_{0j}$  berücksichtigt und die jeweilige Dichte und Stärke einer Bindung durch sie sog. **Oszillatorstärke**  $f_j$ .

Falls wir ein sehr dichtes Medium haben, so müssen wir berücksichtigen, daß auf ein einzelnes Elektron nur das **lokale** Feld wirkt, das sich aus dem äußeren und dem durch die Polarisationsladungen zusammensetzt. Dies wurde durch die Clausius-Mosotti-Gleichung (1.1.123) beschrieben und wir bekommen:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega} \quad (2.2.25)$$

Falls die Medien sehr dünn sind (z.B. Gase) gilt  $\tilde{\mathbf{n}} \simeq 1$ . In dieser Näherung lassen sich der Real- und Imaginärteil des Brechungsindex aus  $\tilde{\mathbf{n}}^2 = \epsilon$  annähern zu:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{q^2 n}{m_e \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (2.2.26)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{q^2 n}{m_e \epsilon_0} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (2.2.27)$$

Ein typischer Frequenzverlauf des Real- und Imaginärteils des Brechungsindex ist in Abb. 2.2.4 gezeigt. Man erkennt, daß der Brechungsindex mit zunehmender Frequenz kleiner wird. An den Absorptionsfrequenzen eines Materials wie bei Rotationen von freien Molekülen (Mikrowelle), bei der Schwingung von Molekülen und Festkörpern (Infrarot), bei optischen Anregungen der Valenzelektronen (sichtbares Licht) und bei der Anregung von Elektronen innerer Atomschalen (Röntgenbereich) entstehen charakteristische Verläufe des Realteils des Brechungsindex und entsprechende Peaks im Imaginärteil des Brechungsindex.

Prinzipiell sind Imaginärteil und Realteil des Brechungsindex noch subtiler verknüpft durch das *Kausalitätsprinzip*, das besagt, daß ein Atom/Molekül/Festkörper nur dann polarisiert werden kann *nachdem* eine em-Welle mit ihm in Wechselwirkung trat. Dies klingt trivial, erzeugt aber eine zusätzliche Beziehung zwischen  $n$  und  $\kappa$ , die **Kramers-Kronig-Beziehungen**<sup>10</sup>.

Die Brechungsindex nimmt mit steigender Frequenz immer kleiner und erreicht den Wert 1 bei unendlich hohen Frequenzen. Dies läßt sich mit einem mechanischen Analogon verstehen: bei sehr hohen Frequenzen erfolgt die Oszillation des elektrischen Feldes der Lichtwelle so schnell, daß die Elektronen aufgrund ihrer Trägheit dieser Oszillation nicht mehr folgen können. D.h. sie nehmen auch keine Energie aus der Welle auf und die em-Welle kann ungehindert passieren. Im Limes "sieht" die em-Welle also die Materie gar nicht mehr und der Brechungsindex muß dann 1 sein. Bei niedrigeren Frequenzen können diejenigen Anregungen an der Verzögerung der sich ausbreitenden Lichtwelle teilnehmen, die der Oszillation der Welle "folgen" können. D.h. im sichtbaren Bereiche können die Valenzelektronen aber auch der inneren Schalelektronen folgen. Der Brechungsindex ist im sichtbaren Licht durch die Absorption der Valenzelektronen bestimmt; der Verlauf des

<sup>10</sup>Für Details sehen sie bitte im Skript "Schichtdiagnostik in der Plasmatechnik"

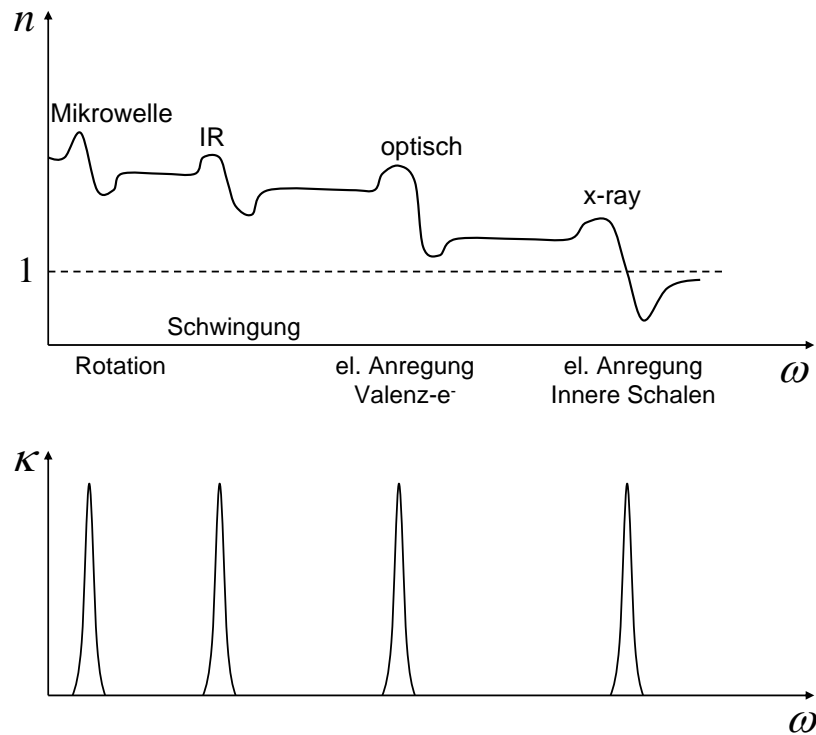


Abbildung 2.2.4: Realteil und Imaginärteil des Brechungsindex.

Brechungsindex ist allerdings um einen gewissen Betrag gegenüber 1 verschoben nach oben verschoben, da im sichtbaren ein Untergrund existiert, der durch die Verzögerung der em-Welle durch die Wechselwirkung mit den inneren Schalenelektronen hervorgerufen wird. Analog dazu beinhaltet, der Brechungsindex für die Anregung im Infraroten einen Untergrund, der durch die Valenzelektronen und die inneren Schalenelektronen erzeugt wird.

Im Bereich der Absorption läßt sich zudem ein Material künstlich erzeugen (photonische Kristalle) dessen Brechungsindex negativ wird, sog. **Metamaterialien**. Diese Materialien haben außerordentliche Eigenschaften hinsichtlich der Lichtbrechung.

### Normale und anormale Dispersion

Die Ausbreitung von Wellen in Medien wird durch zwei Geschwindigkeiten charakterisiert: (i) die **Phasengeschwindigkeit** bezeichnet die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines definierten Wellenberges; (ii) die **Gruppengeschwindigkeit** die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines ganzen Wellenpaketes. Beide Geschwindigkeiten sind definiert als:

$$v_{Phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (2.2.28)$$

$$v_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_{Phase}k) \quad (2.2.29)$$

Nachdem wir Geschwindigkeiten betrachten ist hier immer der Realteil des Brechungsindex zu verwenden. Wir bekommen den allgemeine Zusammenhang von:

$$v_{Gruppe} = v_{Phase} + k \frac{dv_{Phase}}{dk} \quad (2.2.30)$$

Im Vakuum ändert sich die Phasengeschwindigkeit nicht mit der Wellenzahl ( $v_{Phase} = c$ ) und Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit sind identisch. Formt man somit ein Wellenpaket (um zum Beispiel Information bei der optischen Nachrichtenübertragung zu kodieren), so bleibt ein solches Wellenpaket über lange Zeit erhalten. In einem Medium allerdings kann sich die Phasengeschwindigkeit mit der Wellenlänge ändern und Gruppen- und Phasengeschwindigkeit unterscheiden sich. D.h. wenn man ein Wellenpaket erzeugt, so läuft dies mit der Zeit auseinander und eine ursprünglich kodierte Information geht verloren. Dies hat eine große Auswirkung auf die Realisierung der optischen Nachrichtentechnik.

Wie beeinflusst jetzt der Brechungsindex das Verhältnis zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit? Dazu formen wir die Gleichung um:

$$\begin{aligned} v_{Gruppe} &= v_{Phase} + k \frac{d}{dk} \left( \frac{c}{n} \right) \\ &= v_{Phase} - k \frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk} \\ &= v_{Phase} - k \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\omega} \underbrace{\frac{d\omega}{dk}}_{v_{Gruppe}} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

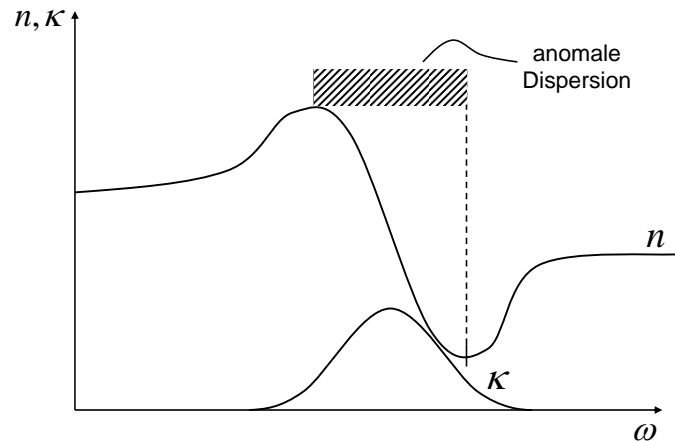
$$(2.2.32)$$

Und lösen mit  $\omega = \frac{kc}{n}$  nach der Gruppengeschwindigkeit auf:

$$\boxed{v_{Gruppe} = \frac{v_{Phase}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}} \quad (2.2.33)$$

Falls der Brechungsindex mit der Frequenz steigt ( $\frac{dn}{d\omega} > 0$ ), so ist die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Phasengeschwindigkeit man spricht

von **normaler Dispersion**. Falls der Brechungsindex mit der Frequenz sinkt ( $\frac{dn}{d\omega} < 0$ ), so ist die Gruppengeschwindigkeit größer als die Phasengeschwindigkeit und man spricht von **anormaler Dispersion** (siehe Abb. 2.2.5).



**Abbildung 2.2.5:** Im Bereich der Absorption tritt anomale Dispersion auf, d.h. der Brechungsindex sinkt mit der Frequenz des Lichtes.

In der Nachrichtentechnik wird die anomale Dispersion geschickt genutzt, da man aus einer Kombination unterschiedlicher Materialien die Unterschiede in den Phasengeschwindigkeiten einzelner Frequenzanteile ausgleichen kann und so Wellenpakete erzeugt, die nicht mit der Zeit auseinanderlaufen.<sup>11</sup>

### 2.2.3 Wellen in dichten Medien

Im folgenden wollen wir Wellen in sehr dichten Medien wie Isolatoren und Metallen betrachten. Zunächst wird die Materie berücksichtigt durch die Ersetzung von  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$  bzw.  $\mu_0 \rightarrow \mu_0 \mu_r$ . Aus der Dispersion für Wellen im Vakuum

$$\omega = ck_0 \quad (2.2.34)$$

mit  $k_0$  der Wellenzahl im Vakuum wird

$$\tilde{n}\omega = ck \quad (2.2.35)$$

mit  $k$  der Wellenzahl im Medium und  $\tilde{n}$  dem komplexen Brechungsindex. Aus dem Vergleich der Gleichungen sieht man sofort, dass gelten muss

<sup>11</sup>Erzeugung von Solitonen.

$$k = nk_0 \quad (2.2.36)$$

d.h. die Wellenlänge verkürzt sich im Vergleich zur Welle im Vakuum.

### Isolatoren

Die Wellengleichung für die Ausbreitung von Wellen in Isolatoren erhalten wir einfach durch die formalen Ersetzungen der Permeabilität und der Dielektrizitätskonstanten.

$$\Delta \vec{E} = \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.2.37)$$

In der Verknüpfung zwischen Magnetfeld und elektrischem Feld müssen wir jetzt zudem auch den komplexen Brechungsindex einsetzen. Aus

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k}_0 \times \vec{E}) \quad (2.2.38)$$

im Vakuum wird

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{\omega} (\tilde{\mathbf{n}} \vec{k}_0 \times \vec{E}) \quad (2.2.39)$$

im Medium. Da der Brechungsindex  $\tilde{\mathbf{n}}$  im Allgemeinen eine komplexe Zahl ist, erkennt man, daß dann magnetisches und elektrisches Feld nicht mehr in Phase schwingen müssen.

### Metalle

Bei der Betrachtung von leitfähigen Materialien ist der Ausgangspunkt zur Ableitung der Wellengleichung hingegen durch die Stromdichte  $\vec{j}$  modifiziert.

$$\mathbf{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{j} + \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.2.40)$$

Wenn wir beide Seiten nach der Zeit ableiten und das Induktionsgesetz  $\mathbf{rot} \vec{E} - \dot{\vec{B}}$  einsetzen, erhalten wir als Wellengleichung:

$$\mathbf{rot} (-\mathbf{rot} \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \mu \vec{j} + \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2.41)$$

Wir setzen das Ohm'sche Gesetz als Verknüpfung zwischen Stromdichte und elektrischem Feld ein  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  und erhalten:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.2.42)$$

Wir erkennen eine Schwingungsgleichung bei der zusätzlich die erste Ableitung des Feldes nach der Zeit auftritt. Dies ist ein Dämpfungsterm, der proportional zur Leitfähigkeit des Materials ist:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\nu} \quad (2.2.43)$$

mit  $n$  der Elektronendichte,  $m$  der Elektronenmasse und  $\nu$  der Stoßfrequenz. Wenn wir aus der Wellengleichung wieder den Brechungsindex ableiten, erkennt man daß die Dämpfungskonstante  $\gamma$  identisch mit der Stoßfrequenz  $\nu$  ist.

$$\gamma \equiv \nu \quad (2.2.44)$$

In Analogie zur Ableitung des Brechungsindex für die Wechselwirkung von Licht mit gebundenen Elektronen, deren Bewegung mit einer Konstanten  $\gamma$  gedämpft ist, bekommt man:

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2} \frac{1}{-\omega^2 + i\nu\omega} \quad (2.2.45)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \frac{1}{-\omega^2 + i\nu\omega} \quad (2.2.46)$$

Wir können jetzt zwei Fälle unterscheiden.

- **schwache Dämpfung**  $\omega \gg \nu$

Falls die Wellen in leitenden Materialien nur schwach gedämpft werden, kann man den Term  $\gamma\omega$  gegen  $\omega^2$  vernachlässigen. Damit ergibt sich der Brechungsindex zu:

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \frac{1}{-\omega^2 + i\nu\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2.2.47)$$

bzw. mit der Formulierung der Leitfähigkeit  $\sigma$  zu:

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = 1 - \frac{ne^2}{\nu m \epsilon_0 \omega^2} \frac{\nu}{-\omega^2 + i\nu\omega} = 1 - \frac{\sigma \nu}{\epsilon_0 \omega^2} \quad (2.2.48)$$

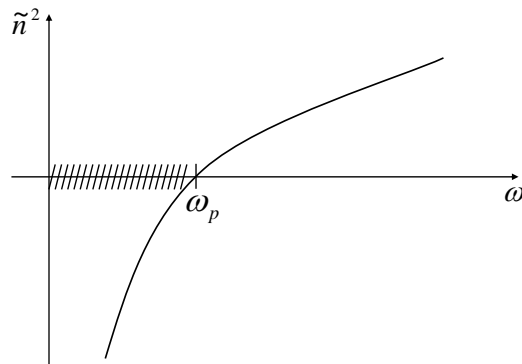
Man erkennt, daß unterhalb der Plasmafrequenz  $\tilde{\mathbf{n}}^2 < 0$  wird. D.h.  $\tilde{\mathbf{n}}$  wird imaginär und die Wellen können nicht mehr propagieren sondern



werden reflektiert. Diese Reflexion für Licht einer Frequenz unterhalb der Plasmafrequenz wird an mehreren Phänomenen sichtbar:

– **Farben der Metalle**

Bei den meisten Metallen liegt die Plasmafrequenz im Bereich des Ultravioletten. D.h. die UV-Strahlung kann einen Metallfilm durchdringen, während sichtbares Licht komplett reflektiert wird. Damit erscheint eine Metalloberfläche *metallisch weiß* glänzend. Es existieren aber einige Metalle, bei denen die Plasmafrequenz im Bereich des Sichtbaren Lichts liegt, wie Kupfer und Gold. Hier wird der blaue Anteil durchgelassen und erst der rote und gelbe Anteil im Spektrum reflektiert. D.h. diese Schichten erscheinen in Reflexion rötlich bzw. golden und in Transmission (wenn der Film sehr dünn) ist bläulich.



**Abbildung 2.2.6:** Unterhalb der Plasmafrequenz reflektieren Metalle.

– **Radiolangwellen**

Die Plasmafrequenz bestimmt zudem die Transmission von Radiowellen an der Ionosphäre. Bei der Verbreitung von Radiowellen nutzt man die Eigenschaft aus, daß Radiowellen wegen ihrer niedrigen Frequenz an der Ionosphäre reflektiert werden und so über Vielfachreflexionen in der Atmosphäre um die Erde laufen können. Für die Kommunikation mit Satelliten bzw. Raumschiffen muß man kurze Wellenlängen bzw. höhere Frequenzen verwenden, da nur hier die Ionosphäre transparent wird.

• **starke Dämpfung**  $\omega \ll \nu$

Falls die Dämpfung sehr stark ist, bekommen wir:

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega\omega} = 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.2.49)$$

Wenn wir jetzt den Realteil und Imaginärteil des Brechungsindex bestimmen bekommen wir:

$$\tilde{\mathbf{n}}^2 = (n - i\kappa)^2 = n^2 - \kappa^2 - i2n\kappa = 1 - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.2.50)$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert:

$$n^2 - \kappa^2 = 1 \quad (2.2.51)$$

$$-2n\kappa = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.2.52)$$

Für Metalle in diesem Frequenzbereich gilt oftmals  $n, \kappa \gg 1$ . D.h. aus  $n^2 - \kappa^2 = 1$  folgt sofort  $n \simeq \kappa$  und man kann aus dem Vergleich der Imaginärteile schließen:

$$\kappa = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} \quad (2.2.53)$$

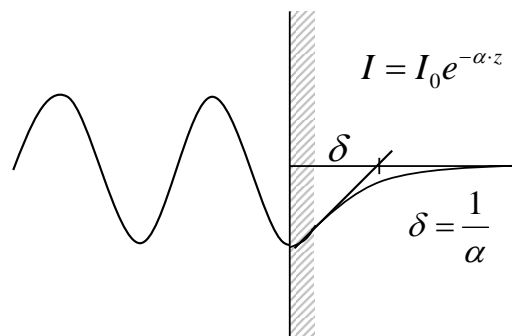
Der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  wird zu:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\omega\sigma}{\epsilon_0 c^2}} \quad (2.2.54)$$

D.h. eine elektromagnetische Welle niedriger Frequenz kann nicht beliebig tief in ein Metall eindringen. Dies hat eine große Bedeutung für Hochfrequenzströme, die nur an der Oberfläche von Metallen sich ausbreiten. Diese Ströme fließen innerhalb einer Schicht der Dicke  $\delta$ :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 c^2}{2\omega\sigma}} \quad (2.2.55)$$

die als sog. **Skintiefe** bezeichnet wird. D.h. mit steigender Leitfähigkeit sinkt die Skintiefe  $\delta$ . Aus diesem Grund werden für die Stromführung von Hochfrequenzströmen oftmals silberbeschichtete Kabel mit großer Oberfläche verwendet.



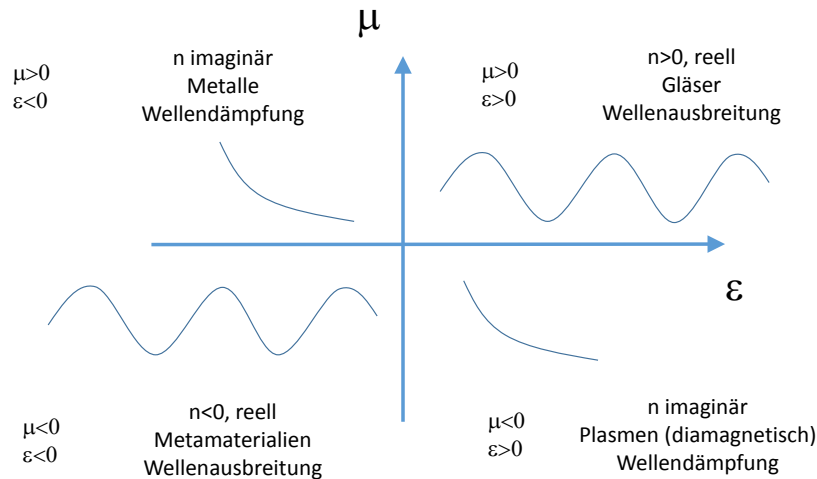
**Abbildung 2.2.7:** Elektromagnetische Wellen dringen in ein Metall nur innerhalb der sog. Skintiefe ein.

### 2.2.4 Metamaterialien (Vertiefung)

Im folgenden wollen wir besondere Materialien kurz betrachten, die so genannten Metamaterialien. Der Brechungsindex leitet sich aus der Phasengeschwindigkeit des Lichts in Materie ab und ist von allgemeiner Form gegeben als:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (2.2.56)$$

Die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die Permeabilität  $\mu$  hängen von der Wahl des Materials ab und können sowohl positiv wie negativ sein, wie in Abb. 2.2.8 illustriert ist. Falls  $\epsilon$  und  $\mu$  größer als Null sind, bekommt man eine reelle Zahl für  $n$  und damit normale Lichtausbreitung wie in vielen Gläsern. Falls  $\epsilon$  negativ wird und  $\mu$  aber positiv bleibt, bekommt man einen komplexen Wert für  $n$  und somit gedämpfte Wellen. Ein Beispiel ist die Lichtausbreitung in Metallen für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz. Umgekehrt kann aber auch  $\epsilon$  positiv sein und dafür  $\mu$  negativ werden. Auch hier erhält man einen komplexen Wert für  $n$  und damit gedämpfte Wellen. Ein typischer Fall sind magnetisierte Plasmen, die immer diamagnetisch sind ( $\mu < 0$ ). Ein besonderer Fall liegt allerdings vor, wenn sowohl  $\epsilon$  als auch  $\mu$  negativ sind. Jetzt wird  $n$  wieder eine reelle Zahl, die allerdings negativ ist. Wellenausbreitung ist möglich, man spricht von Metamaterialien. Die Verknüpfung von Magnetfeld und elektrischem Feld aus dem Induktionsgesetz ergibt:



**Abbildung 2.2.8:** Je nach Vorzeichen von  $\epsilon$  und  $\mu$  bekommt man Wellenausbreitung bzw. -dämpfung im Medium.

$$\omega \vec{B} = n \vec{k} \times \vec{E} \quad (2.2.57)$$

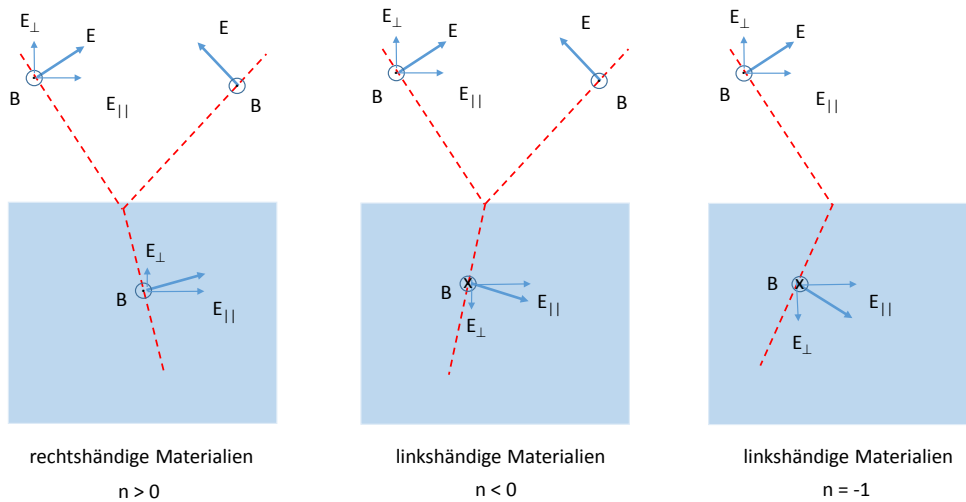
Mit negativem  $n$  dreht sich die Richtung von  $\vec{B}$  bezogen auf  $\vec{k} \times \vec{E}$  um. Aus der Rechten-Hand-Regel für die Beziehung zwischen  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  wird damit die Linke-Hand-Regel. Aus diesem Grund bezeichnet man Metamaterialien auch als linkshändige Medien. Durch diesen negativen Brechungsindex ändert sich auch die Lichtbrechung, wie in Abb. 2.2.9 gezeigt ist. Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zwischen einem Medium 1 mit  $\epsilon_1$  und  $\mu_1$  sowie einem Medium 2 mit  $\epsilon_2$  und  $\mu_2$  für die parallelen ( $\parallel$ ) und senkrechten ( $\perp$ ) Komponenten des Magnetfeldes und des elektrischen Feldes sind (siehe unten):

$$E_{1,\parallel} = E_{2,\parallel} \quad (2.2.58)$$

$$\epsilon_1 E_{1,\perp} = \epsilon_2 E_{2,\perp} \quad (2.2.59)$$

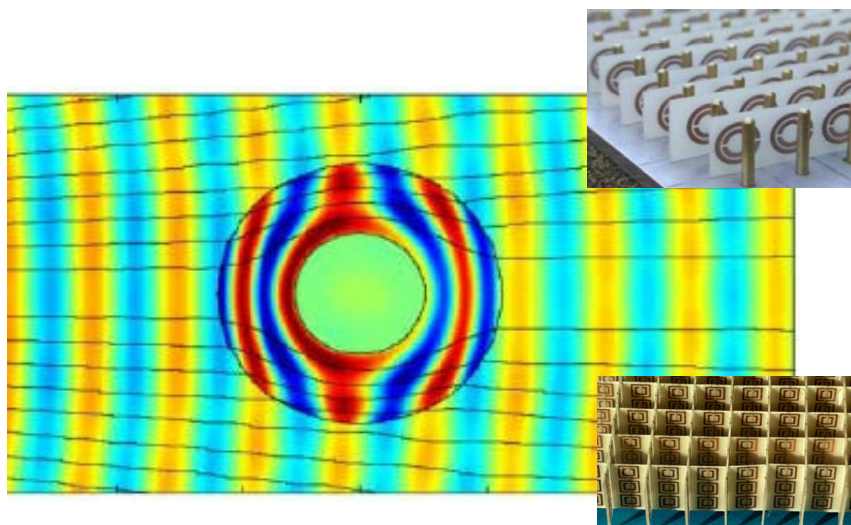
$$\frac{1}{\mu_1} B_{1,\parallel} = \frac{1}{\mu_2} B_{2,\parallel} \quad (2.2.60)$$

$$B_{1,\perp} = B_{2,\perp} \quad (2.2.61)$$



**Abbildung 2.2.9:** Durch den negativen Brechungsindex ändert sich die Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls im Medium. Insbesondere bei  $n = -1$  wird kein Lichtstrahl mehr reflektiert.

Ein Spezialfall bekommt man, falls  $n$  genau  $-1$  wird. An Hand der Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche sieht man sofort, dass der reflektierte Strahl verschwindet. Damit wird aus einer einfachen Platte aus einem Metamaterial eine perfekten Linse, da alle Strahlen, die von einem Objekt ausgehen auf einen Bildpunkt in dem Metamaterial fokussiert werden, unabhängig von dem Winkel mit denen sie auf die Oberfläche dieses Metamaterials treffen. Das Licht lässt sich einfach "um die Ecke" führen. Durch diese Eigenschaft lässt sich auch eine perfekte "Tarnkappe" realisieren, wie in Abb. 2.2.10 veranschaulicht ist: eine ebene Wellenfront trifft auf einen Hohlzylinder aus einem Metamaterial. Die Wellen werden in den Wänden dieses Zylinders um den Kern herum gelenkt und fügen sich hinter dem Zylinder wieder zu einer ebenen Wellenfront zusammen. D.h. jemand der von außen in die Richtung dieses Zylinders blickt, sieht nur eine ungestörte ebene Welle, der Zylinder ist unsichtbar. Im Innern des Zylinders ließe sich jetzt ein beliebiger Gegenstand verstecken.



**Abbildung 2.2.10:** Durch die besondere Form der Wellenausbreitung lässt sich sogar eine "Tarnkappe" aus Metamaterialien realisieren. Eine ebene Welle fällt auf einen Hohlzylinder aus einem Metamaterial. In dem Mantel dieses Zylinders wird die ebene Welle herum gelenkt und fügt sich dahinter wieder als ebene Welle zusammen, d.h. für einen Betrachter wird der Zylinder unsichtbar und es lässt sich ein beliebiger Gegenstand im Innern des Zylinders verstecken. Inset: technische Realisierung von Metamaterialien auf der Basis von diskreten Bauelement-Kombinationen aus Stäben und Spulen.

Die Herstellung von Metamaterialien ist allerdings nicht einfach, da die beiden Eigenschaften  $\mu < 0$  und  $\epsilon < 0$  gleichzeitig erfüllt sein müssen. Man verwendet dazu diskrete Bauelemente, wie zum Beispiel kleine Metallstäbe, für die  $\epsilon < 0$  unterhalb der Plasmafrequenz gilt, in Kombination mit kleinen Spulen, die die einfachste Form eines Diamagneten sind und damit  $\mu < 0$  sicherstellen. Fertigt man diese Kombination aus einem Stab und einer Spule sehr viel kleiner als die Wellenlänge des Lichts, kann man die Ausbreitung durch ein Array von solchen Stab-Spule-Kombinationen mit den normalen Gesetzen der Optik betrachten. Deshalb wurden erste Versuche mit Mikrowellen durchgeführt an Materialien, die aus diskreten Bauelementen aus der Elektronik bestanden. Inzwischen ist man schon in den Bereich des mittleren Infraroten vorgedrungen durch Verwendung sehr viel kleinerer Strukturen hergestellt mit Methoden der Mikrostrukturtechnik. Eine weitere Hürde bei der Realisierung von Metamaterialien ist der enge Wellenlängen- bzw. Frequenzbereich für den  $n < 0$  gilt.

### 2.2.5 Brechung und Reflexion

Bislang haben wir die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen innerhalb von Medien betrachtet. Beim Übergang von Wellen zwischen verschiedenen Medien können allerdings **Brechung** und **Reflexion** auftreten.

#### Grenzfläche zwischen zwei Medien

Betrachten wir dazu eine Transversalwelle, die unter einem Winkel  $\alpha$  zur Oberflächennormalen auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien 1 und 2 einfällt mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$ . Es entsteht eine Welle, die reflektiert wird und die Oberfläche unter einem Winkel  $\alpha'$  zur Oberflächennormalen verläßt, sowie ein Teil der Welle der die Grenzfläche durchdringt dabei aber gebrochen wird und sich in eine Richtung mit einem Winkel  $\beta$  zur Oberflächennormalen ausbreitet. Die Lichtstrahlen des einfallenden, reflektierten und gebrochenen Lichtes liegen alle in einer Ebene, der **Einfallebene**. Die elektrischen Felder der einzelnen Transversalwellen können unterteilt werden in einen Anteil parallel zur Einfallsebene (Index  $p$ ) und einen senkrecht zur Einfallsebene (Index  $s$ ). Im folgenden werden nur die Gleichungen zur Beschreibung der parallelen Komponenten der einfallenden ( $E_e$ ), der reflektierten ( $E_r$ ) und der gebrochenen Welle ( $E_g$ ) abgeleitet. Wir setzen ebene Wellen an, die sich durch ihre Amplituden ( $A_e, A_r, A_g$ ), ihre Frequenzen ( $\omega_e, \omega_r, \omega_g$ ) und ihre Wellenvektoren ( $\vec{k}_e, \vec{k}_r, \vec{k}_g$ ) unterscheiden können:

$$E_e = A_e^{i(\omega_e t - \vec{k}_e \vec{r})} \quad (2.2.62)$$

$$E_r = A_r^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})} \quad (2.2.63)$$

$$E_g = A_g^{i(\omega_g t - \vec{k}_g \vec{r})} \quad (2.2.64)$$

Die Vektoren des elektrischen und magnetischen Feldes seien wie in Abb. 2.2.11 orientiert. Die Bedingungen für elektrische und magnetische Felder an der Grenzfläche zweier Medien hatten wir schon in der Elektrostatik und Magnetostatik abgeleitet. Diese besagten:

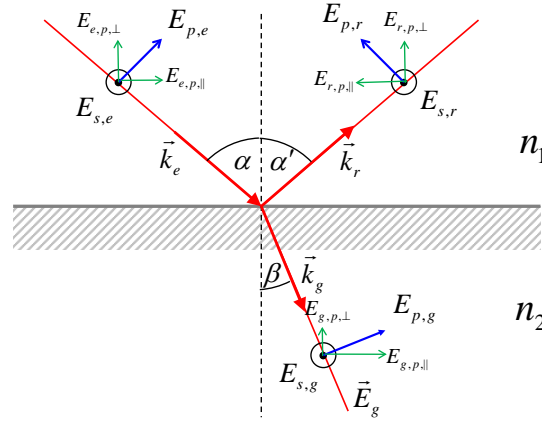
$$E_{\parallel,1} = E_{\parallel,2} \quad (2.2.65)$$

$$B_{\perp,1} = B_{\perp,2} \quad (2.2.66)$$

$$\epsilon_1 E_{\perp,1} = \epsilon_2 E_{\perp,2} \quad (2.2.67)$$

$$\frac{B_{\parallel,1}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel,2}}{\mu_2} \quad (2.2.68)$$





**Abbildung 2.2.11:** Elektrische Felder parallel und senkrecht zu einer Einfallsebene.

Hierbei beziehen sich die Indizes  $\parallel$  und  $\perp$  auf die Komponente bezüglich der *Grenzfläche*, während sich die Indizes  $p$  und  $s$  auf die Komponenten bezüglich der *Einfallsebene* beziehen.

- **Frequenz und Einfalls- bzw. Ausfallswinkel**

Die Komponenten des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche müssen außerhalb und innerhalb der Grenzfläche gleich sein. Wenn wir mit  $E_e$  die Komponente der einfallenden Welle, mit  $E_r$  die Komponente der reflektierten Welle und mit  $E_g$  die Komponente der gebrochenen Welle bezeichnen, bekommen wir als Randbedingung:

$$E_{e,\parallel} + E_{r,\parallel} = E_{g,\parallel} \tag{2.2.69}$$

Die Beitrag der Amplituden der Welle parallel zur Oberfläche ist:

$$A_{e,\parallel} e^{i(\omega_e t - \vec{k}_e \vec{r})} + A_{r,\parallel} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \vec{r})} = A_{g,\parallel} e^{i(\omega_g t - \vec{k}_g \vec{r})} \tag{2.2.70}$$

Die komplexe Exponentialfunktion beschreibt die Aufspaltung des elektrischen Feldes in Real- und Imaginärteil. Damit Gleichung 2.2.70 für einen Ort auf der Grenzfläche immer erfüllt ist, müssen wir zwei Bedingungen fordern:

– **unabhängig von  $t$**

Wir wählen einen bestimmten Ort  $\vec{r} = 0$  auf der Grenzfläche. Auch jetzt muß Gleichung 2.2.70 für alle Zeiten  $t$  gelten. Daher müssen wir für die Frequenzen der drei Anteile der Welle fordern:

$$\omega_e = \omega_r = \omega_g \quad (2.2.71)$$

D.h. die *Frequenz der Welle ändert sich nicht* (die Farbe des Lichtes bleibt gleich). Es ändert sich lediglich die Wellenlänge, wie oben schon eingeführt, bei der Betrachtung von Primär und Sekundärwellen.

– **unabhängig von  $\vec{r}$  innerhalb der Grenzfläche**

Eine ähnlich Betrachtung können wir auch für die Phasen der Wellen anstellen. Wenn wir mit  $\vec{k}_e$ ,  $\vec{k}_r$  und  $\vec{k}_g$  die entsprechenden Wellenvektoren bezeichnen, so müssen die Phasen für alle Ort  $\vec{r}$  innerhalb der Grenzfläche für  $t = 0$  gleich sein. D.h. es muß gelten:

$$\vec{k}_e \vec{r} = \vec{k}_r \vec{r} = \vec{k}_g \vec{r} \quad (2.2.72)$$

Das Skalarprodukt zwischen den Wellenvektoren und dem Ortsvektor  $\vec{r}$  ergibt:

$$|\vec{k}_e| \sin \alpha = |\vec{k}_r| \sin \alpha' = |\vec{k}_g| \sin \beta \quad (2.2.73)$$

Nachdem der Wellenvektor über  $k = n \frac{c}{\omega}$  mit dem Brechungsindex verknüpft ist, bekommen wir:

$$n_1 \sin \alpha = n_1 \sin \alpha' = n_2 \sin \beta \quad (2.2.74)$$

D.h. man erkennt sofort daß

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \quad (2.2.75)$$

gilt: *Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel*. Zusätzlich ergibt sich auch das sog. **Snellius'sche Brechungsgesetz**:

$$\boxed{n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta} \quad (2.2.76)$$

Das Snellius'sche Brechungsgesetz als berühmtestes Ergebnis der Optik wurde zunächst empirisch gefunden. Alternativ kann man es auch nach dem **Fermat'sches Prinzip** ableiten:

Ein Lichtstrahl nimmt immer den schnellsten Weg durch ein optisches System.

Betrachten wir dazu die Abbildung 2.2.12. Die Zeit  $\Delta t$ , die Licht von Punkt A nach Punkt B benötigt ist:

$$\Delta t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} \quad (2.2.77)$$

In den jeweiligen Medien ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechend dem Brechungsindex:

$$c_1 = \frac{c}{n_1} \quad (2.2.78)$$

$$c_2 = \frac{c}{n_2} \quad (2.2.79)$$

Damit bekommen für die Zeitspanne  $\Delta t$  den Ausdruck:

$$\Delta t = \frac{n_1}{c} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (2.2.80)$$

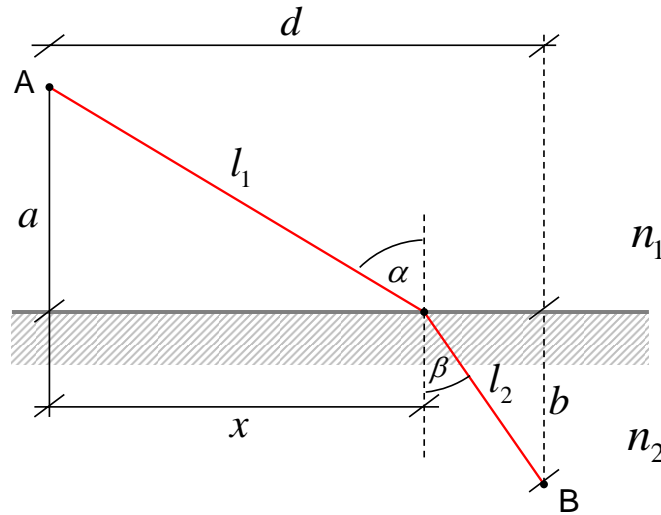


Abbildung 2.2.12: Prinzip von Fermat.

Die minimale Zeitspanne ergibt sich aus der Suche nach dem Minimum für  $\Delta t$  nach dem Extremalprinzip. D.h. die erste Ableitung setzen wir zu Null, was gleichbedeutend mit der Bedingung:

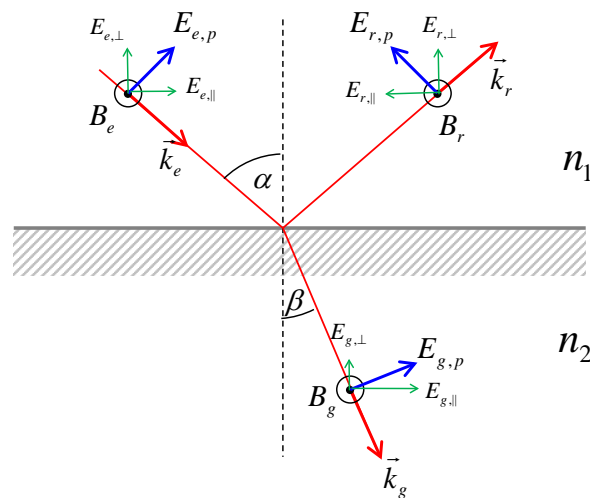
$$\frac{n_1}{c} \underbrace{\frac{d}{dx} \sqrt{a^2 + x^2}}_{\sin \alpha} = - \frac{n_2}{c} \underbrace{\frac{d}{dx} \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}_{-\sin \beta} \quad (2.2.81)$$

ist. Daraus ergibt sich wieder das Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (2.2.82)$$

### • Amplituden

Als nächstes wollen wir das Verhältnis der Amplituden des Lichtes betrachten. Hierzu betrachten wir eine Polarisation des Lichtes parallel zur Einfallsebene. Die Komponenten des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche müssen erhalten bleiben. D.h. die Komponenten außerhalb und innerhalb des Mediums ergeben die Bedingung aus Gl. 2.2.70.



**Abbildung 2.2.13:** Elektrische und magnetische Felder für elektromagnetische Wellen, die in der Einfallsebene polarisiert sind.

$$A_{e,p} \cos \alpha - A_{r,p} \cos \alpha = A_{g,p} \cos \beta \quad (2.2.83)$$

Das Minuszeichen vor dem zweiten Term der linken Seite berücksichtigt die Orientierung der Feldstärkevektoren, wie in Abb. 2.2.13 illustriert.

Das magnetische Feld zeigt aus der Blattebene heraus, d.h. der Vergleich der Vektoren ist in diesem Fall einfach und man bekommt als Bedingung:

$$\frac{B_e}{\mu_1} + \frac{B_r}{\mu_1} = \frac{B_g}{\mu_2} \quad (2.2.84)$$

für den Fall, daß das Material unmagnetisch ( $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ) ist, vereinfacht sich dieser Zusammenhang zu:

$$B_e + B_r = B_g \quad (2.2.85)$$

Die Amplituden des magnetischen Feldes und des elektrischen Feldes sind über den Brechungsindex miteinander verknüpft gemäß:

$$|B| = \frac{n}{c}|E| \quad (2.2.86)$$

D.h. die Randbedingung aus der Betrachtung des magnetischen Feldes läßt sich umschreiben zu:

$$n_1 A_{e,p} + n_1 A_{r,p} = n_2 A_{g,p} \quad (2.2.87)$$

Wir definieren den **Reflexions-**  $r_p$  und **Transmissionskoeffizienten**  $t_p$  als das Verhältnis der Amplituden des elektrischen Feldes des reflektierten/gebrochenen zum einfallenden Licht:

$$r_p = \frac{A_{r,p}}{A_{e,p}} \quad (2.2.88)$$

$$t_p = \frac{A_{g,p}}{A_{e,p}} \quad (2.2.89)$$

Wenn wir diese neuen Größen einsetzen, bekommen wir zwei Gleichungen für zwei Unbekannte  $r_p$  und  $t_p$ . Diese ergeben:

$$\cos \alpha - r_p \cos \alpha = t_p \cos \beta \quad (2.2.90)$$

$$n_1 + r_p n_1 = n_2 t_p \quad (2.2.91)$$

Wenn wir diese auflösen, erhalten wir schließlich die sogenannten **Fresnel-Gleichungen** für die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der elektrischen Feldstärken, die parallel zur Einfallsebene orientiert sind.

$$r_p = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \quad (2.2.92)$$

sowie

$$t_p = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \quad (2.2.93)$$

Aus einer ähnlichen Ableitung lassen sich die Reflexionskoeffizienten für Licht, das *senkrecht* zur Einfallsebene polarisiert ist, ableiten:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \quad (2.2.94)$$

sowie

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \quad (2.2.95)$$

Die Fresnelkoeffizienten beschreiben in korrekter Weise das Verhältnis der Amplituden für transmittiertes und reflektiertes Licht. Die Vorzeichen beziehen sich auf die Konvention in der die Vektoren in Abb. 2.2.13 eingezeichnet wurden. Bei senkrechtem Einfall zum Beispiel wird  $r_p$  für Licht, das parallel zur Einfallsebene polarisiert ist, zu:

$$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (2.2.96)$$

D.h.  $r_p$  ist positiv. Die Vektoren des einfallenden und des reflektierenden Lichtes zeigen allerdings in die *entgegen gesetzte* Richtung, d.h. das Licht erleidet für den Fall das  $n_2 > n_1$  gilt, einen **Phasensprung** von  $\pi$ . Dies gilt in gleicher Weise für die Komponente die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist. Hier würden die Feldstärkevektoren in Abb. 2.2.13 aus der Ebene heraus zeigen. Der Fresnelkoeffizient wird:

$$r_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (2.2.97)$$

für  $n_2 > n_1$  negativ, d.h. die Richtung des Feldstärkevektors dreht sich um, d.h. das Licht erleidet wieder einen Phasensprung von  $\pi$ .

Dieser Zusammenhang läßt sich zusammenfassen in der Aussage, das Licht bei der Reflexion an einem dichteren Medium unter senkrechtem Einfall ein Phasensprung von  $\pi$  auftritt.

### Reflexion, Transmission

Aus den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten lassen sich jetzt die Faktoren für die Intensitäten, die sog. **Reflexion** und **Transmission**, berechnen, die man mit einem Detektor misst.

Die Intensität im Vakuum war definiert als:

$$I = \epsilon_0 c E^2 \quad (2.2.98)$$

Daraus wird die Intensität in Materie via:

$$I = \epsilon_0 \epsilon \frac{c}{n} E^2 \quad (2.2.99)$$

mit  $n$  und  $\epsilon$  als den Materialkonstanten. Die Reflexion  $R$  ist das Verhältnis aus reflektierter zu einfallender Intensität. Durch die Verwendung einer komplexen Formulierung für die Feldstärke wird der Ausdruck  $E^2 \rightarrow EE^*$ :

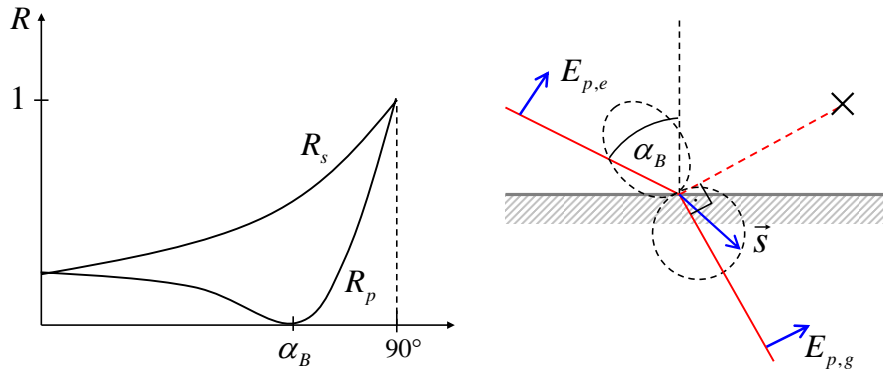
$$R = \frac{I_{\text{reflektiert}}}{I_{\text{einfallend}}} = \frac{E_r E_r^*}{E_e E_e^*} \quad (2.2.100)$$

Wir setzen die Reflexionskoeffizienten ein  $\left(r = \frac{E_r}{E_e}\right)$  und bekommen für die beiden Orientierungen parallel und senkrecht zur Einfallsebene:

$$R_s = r_s r_s^* \quad (2.2.101)$$

$$R_p = r_p r_p^* \quad (2.2.102)$$

Die Reflexion in Abhängigkeit vom Einfallswinkel ist in Abb. 2.2.14 gezeigt. Man erkennt, daß die Reflexion  $R_s$  senkrecht zur Einfallsebene, mit dem Einfallswinkel  $\alpha$  ansteigt. Die Reflexion  $R_p$  parallel zur Einfallsebene, hingegen, wird an einem bestimmten Winkel, dem **Brewsterwinkel**, gleich Null. Dieser Winkel ergibt sich aus der Forderung, daß zwischen der Richtung des reflektierten Lichtes und des gebrochenen Lichtes jeweils  $90^\circ$  liegen. In



**Abbildung 2.2.14:** Abhängigkeit der Reflexion vom Einfallswinkel. Für Licht das in der Einfallsebene polarisiert ist entsteht beim sog. Brewsterwinkel  $R_p = 0$ .

diesem Fall müssten die Dipole, die im Material durch das einfallende Licht angeregt werden, genau entlang der Dipolachse emittieren. In diese Richtung ist die abgestrahlte Intensität allerdings gleich Null (siehe Diskussion zum Hertz'schen Dipol). Damit wird kein Licht reflektiert. Dies ist in Abb. 2.2.14 illustriert. Der Grenzwinkel bei dem die Reflexion verschwindet ist gegeben durch:

$$180^\circ - \alpha_B - \beta = 90^\circ \quad (2.2.103)$$

mit  $\alpha_B + \beta = 90^\circ$  und  $n_1 \sin \alpha_B = n_2 \sin \beta$  folgt die Vorschrift zur Brechung des Brewsterwinkel von:

$$\boxed{\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}} \quad (2.2.104)$$

Bei der Berechnung der Transmission müssen wir berücksichtigen, daß wir die Intensität in zwei unterschiedlichen Medien betrachten, und daß die Richtung des Energieflusses sich ändert. Die unterschiedlichen Materialien werden durch  $\epsilon$  und  $n$  berücksichtigt. Die Faktoren  $\cos \beta$  und  $\cos \alpha$  projizieren die Ausbreitungsrichtung auf die Grenzflächennormale.

$$T = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 \frac{c}{n_2} E_g E_g^* \cos \beta}{\epsilon_0 \epsilon_1 \frac{c}{n_1} E_e E_e^* \cos \alpha} \quad (2.2.105)$$

Damit bekommen wir für die Transmission:

$$T = \frac{n_2 \cos \beta E_g E_g^*}{n_1 \cos \alpha E_e E_e^*} \quad (2.2.106)$$



Mit dem Verhältnis  $t = \frac{E_g}{E_e}$  ergibt sich schließlich:

$$T_s = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} t_s t_s^* \quad (2.2.107)$$

$$T_p = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} t_p t_p^* \quad (2.2.108)$$

Vergleicht man die Formeln für Reflexion und Transmission, so kann man ableiten:

$$\boxed{T_s + R_s = 1} \quad (2.2.109)$$

### Totalreflexion

Fällt das Licht auf eine Grenzfläche von einer Seite auf der das Medium einen höheren Brechungsindex besitzt als auf der anderen Seite, so kann man eine Situation konstruieren, bei der das gebrochene Licht genau in Richtung der Grenzfläche abgelenkt würde, d.h.  $\beta = 90^\circ$ :

$$n_1 \sin \alpha_g = \sin 90^\circ n_2 \quad (2.2.110)$$

In einem solchen Fall kann das Licht nicht in das andere Medium übertreten, sondern es tritt **Totalreflexion** auf, d.h. das Licht wird *nur* reflektiert. Diese Totalreflexion wird in vielen Anwendungen für das Führen von Licht in transparenten Strukturen ausgenutzt. Der Grenzwinkel  $\alpha_g$ , ab dem Totalreflexion auftritt, ist gegeben als:

$$\boxed{\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1}} \quad (2.2.111)$$

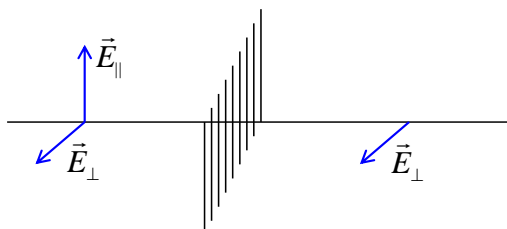
## 2.2.6 Polarisation

Durch optische Materialien läßt sich jetzt der Polarisationszustand von Licht manipulieren. Hierfür existieren zahlreiche Methoden.

### Polarisation durch Absorption

Eine einfache Methode um polarisiertes Licht zu erzeugen ist die Verwendung einer Struktur mit geometrischer Vorzugsrichtung wie ein lineares Gitter, ein gestrecktes Polymer etc (siehe Abb. 2.2.15). Nur linear polarisiertes Licht, daß in einer Richtung senkrecht zu dieser Vorzugsrichtung polarisiert ist, kann diesen Polarisator ungehindert passieren. Licht, das parallel zur der

Vorzugsrichtung polarisiert ist, wird bevorzugt absorbiert. D.h. das elektrische Feld der Lichtwelle kann zum Beispiel an die Polymermoleküle anknüpfen und wird dabei absorbiert.



**Abbildung 2.2.15:** Polarisation von Licht bei der Transmission durch einen Gitter- oder Folienpolarisator.

Materialien, deren Absorption von der Richtung in der das elektrische Feld polarisiert ist, abhängt, bezeichnet man als **dichroitisch**.

### Polarisation durch Reflexion

Eine der einfachsten Methoden zur Manipulation der Polarisation ist die Ausnutzung der Gesetz für Lichtbrechung. Wie oben gezeigt, ist das Licht, das unter dem Brewsterwinkel reflektiert wird, senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, während das transmittierte Licht beide Anteile parallel und senkrecht polarisiert enthält. Dies wird oftmals ausgenutzt, wie an zwei Beispielen illustriert wird:

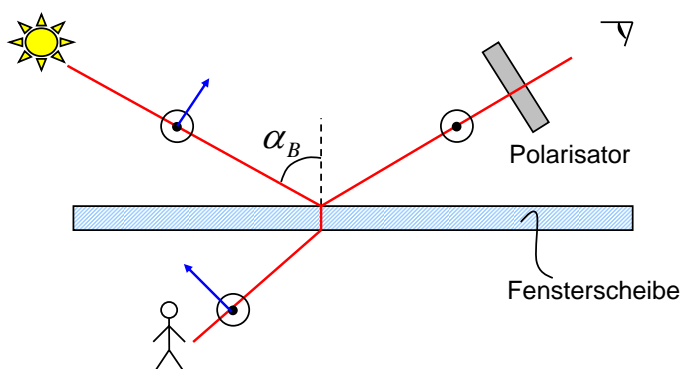
- **Fenster für Gaslaser**

Bei der Konstruktion von Lasern zur Lichtverstärkung wird Licht zwischen zwei Spiegeln reflektiert und in einem Lasermedium verstärkt. Dieses Lasermedium ist eine Gasentladung in einem Entladungsrohr, das mit Fenster abgeschlossen ist. Damit die Transmission durch diese Fenster *verlustfrei* stattfindet, werden sie gemäß dem Brewsterwinkel schräg auf dem Entladungsrohr angeordnet. Dadurch wird das Licht das parallel zur Einfallsebene angeordnet ist, durch diese Fenster nicht reflektiert sondern vollständig transmittiert. Gerade diese Polarisationsrichtung wird bevorzugt verstärkt. Damit wird allerdings auch das emittierte Laserlicht polarisiert.

- **Fotografieren durch Fensterscheiben**

Will man durch eine Fensterscheibe in einen dunkleren Raum fotografieren, wird das Bild oft durch die Reflexion des Umgebungslichtes

überstrahlt. Hier kann man es sich zunutze machen, daß das reflektierte Licht teilweise polarisiert ist. Wenn man durch eine Fensterscheibe fotografiert, positioniert man sich so, daß die Reflexion des Umgebungslichtes unter dem Brewsterwinkel erfolgt (siehe Abb. 2.2.16). Ein Polarisator der, senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, *unterdrückt* diesen Reflex, während das Licht senkrecht zur Einfallsebene, das von einem Objekt hinter der Fensterscheibe stammt, zum Beobachter gelangt.



**Abbildung 2.2.16:** Durch einen Polarisator kann man die Reflexion des Umgebungslichtes bei dem Fotografieren durch eine Fensterscheibe unterdrücken.

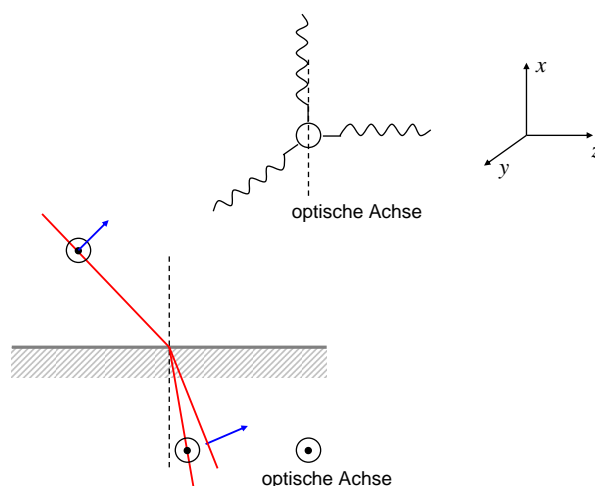
### Polarisation durch Doppelbrechung

Der Brechungsindex eines Materials wurde bisher als *isotrope* Größe betrachtet. Allerdings hängt er in vielen Materialien von der Ausbreitungsrichtung ab, da die elektrischen Dipolmomente, die das Licht verzögern gemäß den Bindungen in einem Festkörper auch unterschiedlich sein können. Licht, das durch solch ein Material fällt erfährt je nach Polarisationsrichtung eine unterschiedliche Verzögerung.

Betrachten wir ein sog. *uni-axiales* Material, bei der eine Kristallrichtung (z.B. x-Richtung) durch stärkere Bindungen ausgezeichnet ist. Diese Richtung bezeichnet man als **optische Achse**, da eine Transversalwelle mit ihrer Feldstärke in  $yz$ -Richtung ( $E_y$  oder  $E_z$ ) diesen geänderte Bindungsstärke in  $x$ -Richtung nicht "sieht". Licht, das sich hingegen in  $y$ -Richtung ausbreitet, kann eine Komponenten des elektrischen Feldes in  $x$ -Richtung besitzen. Diese Komponente  $E_x$  "sieht" ein Material mit unterschiedlichem Brechungsindex.

Warum bezeichnet man dies als Doppelbrechung? Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall eines Lichtstrahls, der auf eine Oberfläche

einfällt. Wir betrachten zunächst den Sonderfall, daß die optische Achse gemäß Abb. 2.2.17 parallel zur Oberfläche und zur Einfallsebene orientiert ist: d.h. senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht "sieht" einen anderen Brechungsindex  $n_{ao}$  durch die größere Bindungsstärke der Festkörperatome untereinander. Man bezeichnet diesen als **außerordentlichen Strahl** mit Index  $ao$ . Das Licht das parallel zur Einfallsebene orientiert ist, "sieht" nur den normalen Brechungsindex  $n_o$ , der auch für die  $y$ - und  $z$ -Richtung maßgeblich ist. Diesen Strahl bezeichnet man als den **ordentlichen Strahl** mit Index  $o$ . Nachdem der Brechungsindex für beide Anteile unterschiedlich ist, bekommt man eine unterschiedliche Brechung und in dem Material entstehen *zwei* Lichtstrahlen. Man spricht von **Doppelbrechung**.

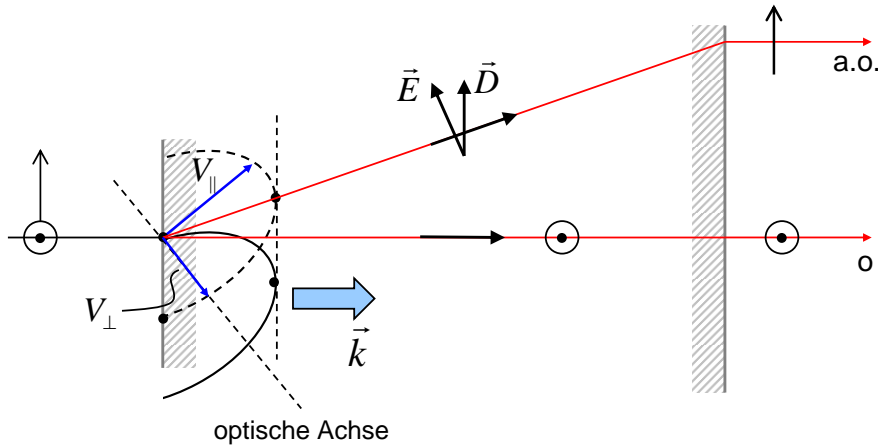


**Abbildung 2.2.17:** Bei einem Material dessen optische Achse parallel zur Oberfläche und senkrecht zur Einfallsebene orientiert ist, "sehen" beide Polarisationsrichtungen unterschiedliche Brechungsindizes! Die senkrechte Polarisation, sieht den geänderten Brechungsindex der  $x$ -Richtung und wird dabei anders abgelenkt als die parallele Polarisation. Das Snelliuss'sche Brechungsgesetz läßt sich für diesen Spezialfall anwenden. Es entstehen zwei Lichtstrahlen, die senkrecht zueinander polarisiert sind.

Diese Doppelbrechung kann man ausnutzen um polarisiertes Licht zu erzeugen, wobei man einen Strahl geometrisch blockiert und so der verbleibende Lichtstrahl vollständig polarisiert ist.

Die Betrachtung der Doppelbrechung wird komplizierter für den allgemeinen Fall einer optischen Achse, die beliebig zur Grenzfläche orientiert ist. Hier hilft allerdings das Huygens'sche Prinzip wie es in Abb. 2.2.18 illustriert ist. Nachdem die Ausbreitungsgeschwindigkeit in die einzelnen Kristallrich-

tungen unterschiedlich ist, werden aus den Kugelwellen eines isotropen Materials Ellipsoide mit Hauptachsen entsprechend den Hauptrichtungen in dem Kristall. Wir benutzen zwei Geschwindigkeiten  $v_{\perp}$  für den Fall, daß das elektrische Feld der Welle senkrecht zur optischen Achse steht und somit der Brechungsindex  $n_o$ , die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt. Für den Fall, daß das elektrische Feld parallel zur optischen Achse orientiert ist bekommen wir einen Brechungsindex  $n_{ao}$ . Aus der Überlagerung der Ellipsoide nach Abb. 2.2.18 erkennt man zwar, daß die Orientierung der Wellenfronten immer noch parallel zur Oberfläche erfolgt, daß aber die Ausbreitungsrichtung der Welle unter einer anderen Richtung. Diese Richtung läßt sich konstruieren, wenn man diejenigen Punkt ermittelt an denen die Ellipsoide am weitesten von der Grenzfläche entfernt sind (siehe Abb. 2.2.18). D.h. in anisotropen Medien ist der Wellenvektor und die Ausbreitungsrichtung nicht mehr kollinear!



**Abbildung 2.2.18:** Falls die optische Achse unter beliebigem Winkel zur Oberfläche orientiert ist, kann man die Richtungen des ordentlichen und außerordentlichen Strahls aus dem Huygens'schen Prinzip ableiten. Das einfache Snellius'sche Brechungsgesetz ist nicht mehr anwendbar.

Aus der Abb. 2.2.18 wird auch deutlich, daß wir eine Ablenkung des außerordentlichen Lichtstrahls bekommen, der bei einem dünnen doppelbrechenden Material zu einem *Versatz* des Lichtes führt. Bei solchen Materialien ist es zudem nicht mehr möglich das Snellius'sche Brechungsgesetz einfach anzuwenden (Dies ist nur für den obigen Sonderfall möglich). In den bisherigen Fällen war die Verknüpfung zwischen D-Feld und E-Feld durch eine skalare Größe,  $\epsilon$  gegeben ( $\vec{D} = \hat{\epsilon}\epsilon_0\vec{E}$ ). Bei anisotropen Materialien wird aus  $\epsilon$  ein Tensor  $\hat{\epsilon}$ . Entsprechend aufwändig ist die Behandlung der Maxwellgleichungen für diesen Fall.

Mit doppelbrechenden Materialien lassen sich auch Polarisationszustände manipulieren. Eine der häufigsten Anwendungen sind  $\lambda/2$ - und  $\lambda/4$ -**Plättchen**. Betrachten wir zwei Achsen in dem Material, die eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. Brechungsindex besitzen. Man unterscheidet wieder den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl.

- **$\lambda/2$ -Plättchen**

Die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Komponenten beim Durchgang durch ein Plättchen der Dicke  $d$  ist:

$$\Delta\varphi_{\lambda/2\text{-Plättchen}} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{ao} - n_o) d = \pi \quad (2.2.112)$$

Falls diese Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = \pi$  ist, spricht man von einem  $\lambda/2$ -Plättchen. Läßt man linear polarisiertes Licht auf dieses Plättchen fallen, das in eine Richtung von  $45^\circ$  zur optischen Achse polarisiert ist, so wird eine der beiden Komponenten im Verhältnis zur anderen um  $\pi$  (bzw. die halbe Wellenlänge) verzögert. Nach dem Durchgang des Lichtes durch den Polarisator entsteht wieder linear polarisierte Licht, allerdings ist jetzt die Polarisationsrichtung der *linearen Polarisation* um  $90^\circ$  *gekippt*.

- **$\lambda/4$ -Plättchen**

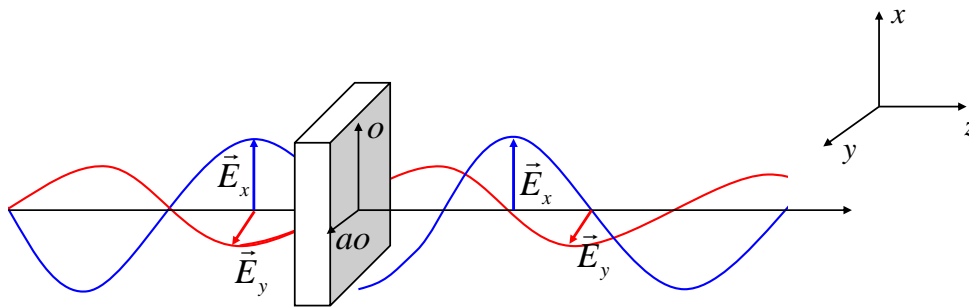
Die Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Komponenten beim Durchgang durch ein Plättchen der Dicke  $d$  ist:

$$\Delta\varphi_{\lambda/4\text{-Plättchen}} = \frac{2\pi}{\lambda} (n_{ao} - n_o) d = \pi/2 \quad (2.2.113)$$

Falls diese Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = \pi/2$  ist, spricht man von einem  $\lambda/4$ -Plättchen. Läßt man wieder linear polarisiertes Licht auf dieses Plättchen fallen, das in eine Richtung von  $45^\circ$  zu der optischen Achse polarisiert ist, so wird eine der beiden Komponenten im Verhältnis zur anderen um  $\pi/2$  bzw. eine viertel Wellenlänge verzögert. Nach dem Durchgang durch den Polarisator entsteht *zirkular polarisiertes Licht*.

## Polarisation durch optisch aktive Substanzen

Als letzten Fall wollen wir die Polarisation durch optisch aktive Substanzen betrachten. Hierbei wird die Polarisationsrichtung durch Absorption und Emission langsam aber *vollständig* gedreht. Bekanntestes Beispiel ist die **Flüssigkristallanzeige**. Hierbei ist die optisch aktive Substanz ein



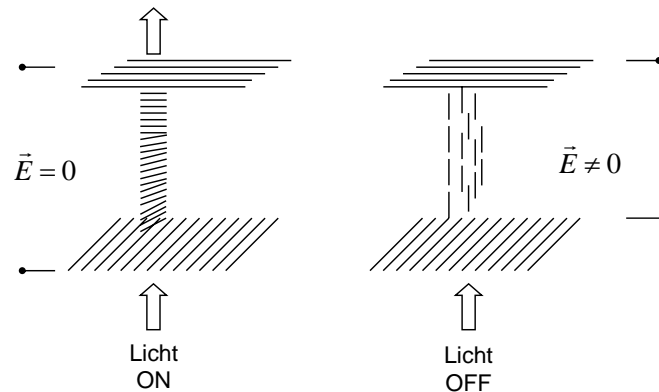
**Abbildung 2.2.19:** Mit einem  $\lambda/4$ -Plättchen läßt sich linear polarisiertes Licht in zirkular polarisiertes Licht umwandeln.

Flüssigkristall, dessen Moleküle versuchen sich durch ihre Wechselwirkung untereinander parallel auszurichten. Die Flüssigkristalle befinden sich zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren. An den beiden Grenzflächen befinden sich Gräben in denen sich die Moleküle auf den Oberflächen ausrichten. Diese Gräben sind um  $90^\circ$  gegeneinander verkippt. Die Wechselwirkung der Flüssigkeitsmoleküle untereinander erzeugt eine Helix, wie in Abb. 2.2.20 illustriert ist. Diese Helix führt das Licht und ändert dabei die Polarisationsrichtung des Lichtes. Licht der Hintergrundbeleuchtung kann so die beiden gekreuzten Polarisatoren passieren und das Display erscheint hell. Legt man eine elektrische Spannung an diese Zelle an, so richten sich alle Flüssigkeitsmoleküle linear aus, und die optische Aktivität wird unterdrückt, das Display erscheint dunkel.

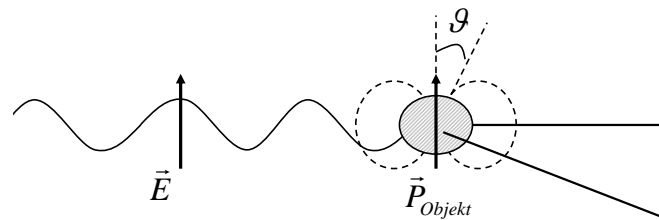
## 2.2.7 Lichtstreuung

Abschließend betrachten wir die Streuung von Licht an einzelnen Objekten, die in ihrem Durchmesser von kleinen Molekülen bis zu großen Tropfen reichen. Man unterscheidet unterschiedliche Klassen von Streuprozessen je nach dem Verhältnis von Wellenlänge  $\lambda$  zum Durchmesser  $a$  des Objektes an dem gestreut wird: falls  $\lambda \gg a$  ist, gilt Rayleigh-Streuung; falls  $\lambda \simeq a$  ist, gilt Mie-Streuung; falls  $\lambda \ll a$  werden die Gesetze der geometrischen Optik für die Berechnung der Streuung wichtig.

Die Streuung führt allgemein zu einer Ablenkung des Lichtes in eine bestimmte Richtung, wobei, je nach Streuprozess, die Winkelverteilung der Streuung unterschiedlich ist.



**Abbildung 2.2.20:** In Flüssigkristallanzeigen wird Licht durch die Flüssigkristallmoleküle gedreht und kann so zwei gegeneinander gekreuzte Polarisatoren passieren.



**Abbildung 2.2.21:** Streuung von Licht an einem Objekt.

### Raleigh-Streuung, $\lambda \gg a$

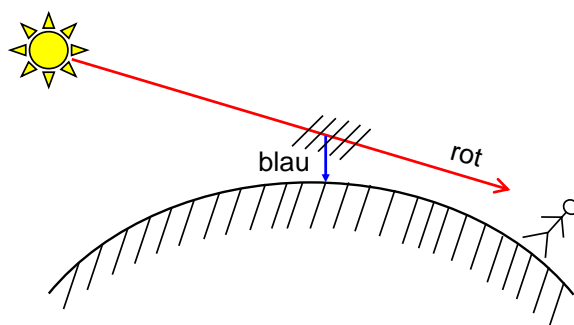
Raleigh-Streuung tritt bei der Lichtstreuung an sehr kleinen Objekten wie einzelnen Molekülen auf. Die Effizienz der Streuung skaliert dabei wie:

$$P_{Dipol} = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \vartheta \quad (2.2.114)$$

Man erkennt eine dominante Abhängigkeit zu  $\omega^4$ . D.h. blaues Licht wird stärker gestreut als rotes Licht. Dies wird eindrucksvoll sichtbar bei der Betrachtung des Himmels. Am Tag wird Sonnenlicht in der oberen Atmosphäre gestreut und gerade der blaue Anteil erreicht den Erdboden. Bei Sonneneun-tergang, wenn man in die Sonne blickt, wird der **blaue Anteil** jeweils vom Beobachter weg gestreut und es verbleibt der rote Anteil. Dies ist in Abb. 2.2.22 dargestellt.

Die Aufteilung in den roten und blauen Anteil hängt stark von der Lauf-





**Abbildung 2.2.22:** Durch die frequenzabhängigen Streuung von Licht in der Atmosphäre erscheint der Himmel blau und die untergehende Sonne rot.

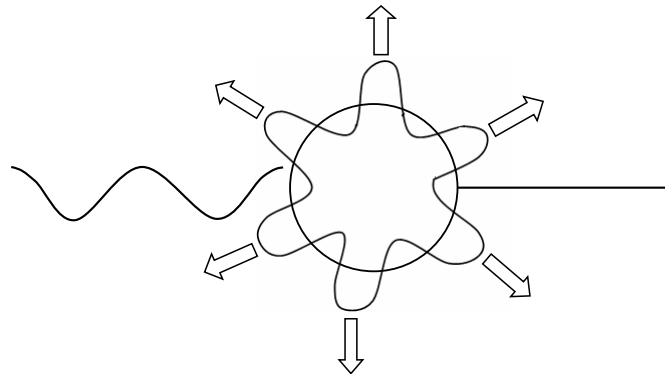
strecke des Lichtes durch die streuende Atmosphäre ab. Steht die Sonne im Zenit ist die Trennung von blau und rot nur sehr schwach und die Sonne erscheint nahezu gelb<sup>12</sup>.) Steht die Sonne über dem Horizont muß das Licht eine lange Strecke durch die Atmosphäre laufen dementsprechend nimmt der Rot-ton gerade in der Nähe zum Horizont stark zu.

### Mie-Streuung, $\lambda \simeq a$

Bei der Mie-Streuung ist die Größe des Objektes im Bereich der Wellenlänge. Für die Berechnung der Streuverteilung betrachtet man die Gesetze der Elektro- und Magnetostatik in sphärischen Koordinaten für eine kugelförmige Grenzfläche. Daraus läßt sich ableiten, daß die Streuung insbesondere in diejenige Richtung maximal erfolgt, die einer periodischen Bedingung für die Wellenlänge um den Umfang entspricht, wie in Abb. 2.2.23 illustriert. Insbesondere die Intensität für Vorwärts- als auch für Rückwärtsstreuung ist sehr groß.

Die Winkelabhängigkeit wird an vielen optischen Phänomenen der Atmosphäre sichtbar (siehe Abb. 2.2.24): (i) ein **Halo** entsteht im Umkreis um ein leuchtendes Objekt, wenn Lichtstrahlen von Tropfen in der Nachbarschaft diesen hellen Objektes gestreut werden; (ii) eine **Glorie** entsteht durch denselben Vorgang nur in Rückwärtsrichtung.

<sup>12</sup>Die Oberflächentemperatur der Sonne ist 6000 K, was vom Farbeindruck eher ein weißglühend ist. D.h. vom Weltraum aus betrachtet wirkt die Sonne eher weiß statt gelb



**Abbildung 2.2.23:** Falls das streuende Element eine Größe im Bereich der Wellenlänge besitzt ansteht Mie-Streuung.

### Streuung gemäß geometrischer Optik, $\lambda \ll a$

Falls das Objekt sehr viel größer als die Wellenlänge des Lichtes wird, gelten die normalen Gesetze der geometrischen Optik zur Beschreibung der Lichtstreuung (siehe unten).

Betrachten wir einen Lichtstrahl, der in einem Abstand  $z$  zur Tropfenmitte in einen Tropfen hinein gebrochen wird. Dieser Lichtstrahl wird an der Rückseite des Tropfens reflektiert und an der Vorderseite wieder heraus gebrochen (siehe Abb. 2.2.25).

Ein Vergleich der Winkel zeigt:

$$\sin \alpha = \frac{z}{R} \quad n \sin \beta = \frac{z}{R} \quad (2.2.115)$$

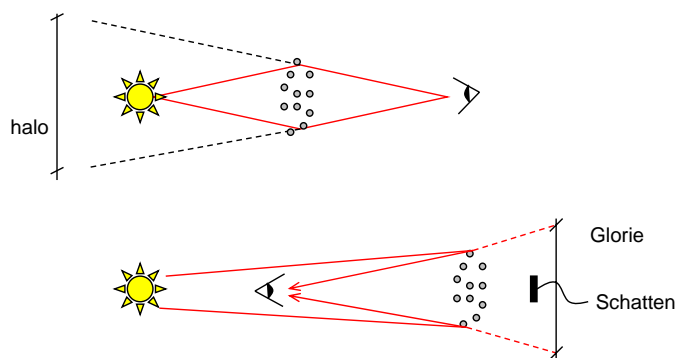
Die Winkel in dem Wassertropfen sind verknüpft wie:

$$\varphi = 4\beta - 2\alpha = 4 \arcsin\left(\frac{z}{nR}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{z}{R}\right) \quad (2.2.116)$$

Die maximale Intensität bekommt man unter einem Winkel  $\varphi$  da Teilstrahlen über einen *weiten Bereich für  $z$*  zu der Emission unter dem Winkel  $\varphi$  beitragen. Dies läßt sich aus einer Forderung gemäß:

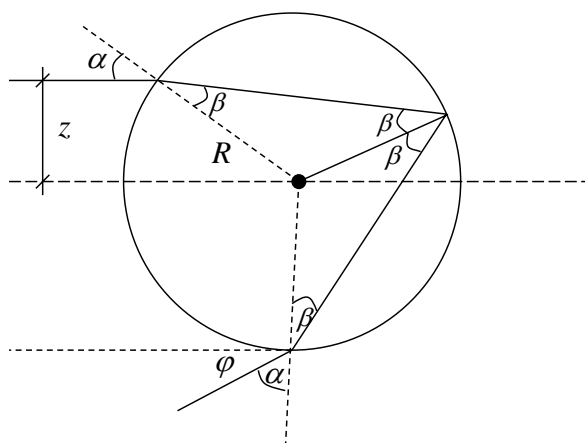
$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad (2.2.117)$$

ableiten. Die genaue Analyse ergibt einen typischen Winkel für maximale Intensität von  $\varphi = 42^\circ$ . Durch diese einfache Reflexion an der Rückwand entsteht ein Bogen mit einem Öffnungswinkel von  $42^\circ$ . Nachdem der Brechungsindex Wellenlängen abhängig ist, entsteht nicht nur ein Lichtbogen,

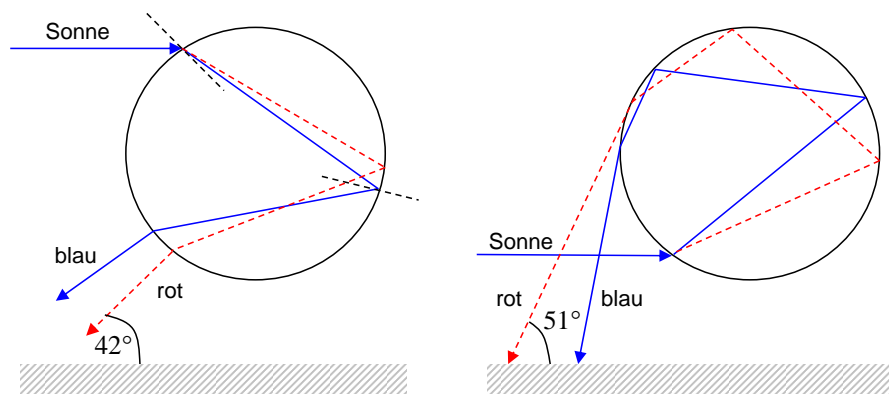


**Abbildung 2.2.24:** Bei der Mie-Streuung dominiert Vorwärts- und Rückwärtsstreuung: betrachtet man einen hellen Körper so entsteht ein Halo falls zwischen Beobachter und Objekt entsprechend Tröpfchen vorhanden sind; in Rückwärtsrichtung entsteht um den eigenen Schatten eine Glorie.

sondern vielmehr eine spektrale Aufspaltung, ein Regenbogen, wie in Abb. 2.2.26 illustriert ist. Bei einer zweifachen Reflexion entsteht ein entsprechend schwächerer Lichtbogen, der diesmal aber einen größeren Öffnungswinkel besitzt.



**Abbildung 2.2.25:** Bei der Brechung eines Lichtstrahl in einem Tropfen findet die Reflexion im Innern unter jeweils dem gleichen Winkel  $\beta$  statt, da alle Oberflächennormalen durch den Mittelpunkt des Tropfens gehen.



**Abbildung 2.2.26:** Bei einem Regenbogen entsteht eine Aufspaltung der Farben unter ganz bestimmten Winkeln im Vergleich zur Richtung zur Sonne.

## 2.3 Geometrische Optik

### 2.3.1 Axiome

Zur Beschreibung von optischen Systemen wie Mikroskopen, Fernrohren etc. wird die geometrische Optik benutzt. Diese ist anwendbar, wenn drei Axiome erfüllt sind:

- *Lichtstrahlen sind gerade.*

Die geradlinige Lichtausbreitung gilt nur für den Fall, daß Beugungsphänomene keine Rolle spielen. Ansonsten ist das Huygens'sche Prinzip exakt anzuwenden. D.h. dieses Axiom fordert, daß die Ausdehnung des optischen System sehr viel größer als die Wellenlänge  $\lambda$  ist.

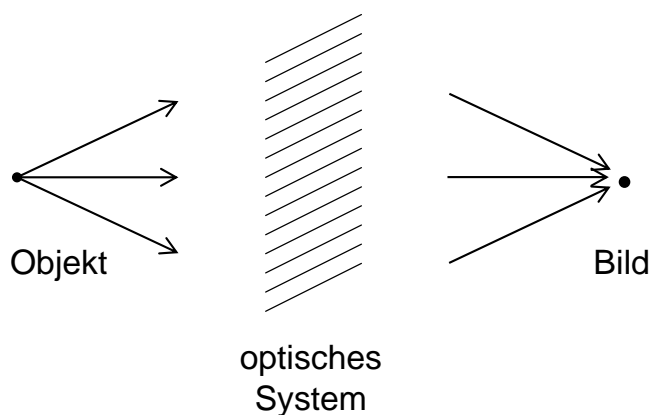
- *keine Wechselwirkung der Lichtstrahlen untereinander*

Lichtstrahlen können untereinander Wechselwirkung im Sinne von positiver und destruktiver Interferenz. Auch dieser Fall soll ausgeschlossen werden. Positive und destruktive Interferenz fordert, daß die Phase zwischen zwei Lichtwegen eine eindeutige Größe ist. Diese Phase bleibt allerdings nur über eine bestimmte Länge, der Kohärenzlänge, erhalten (siehe unten). Bei normalem weißen Licht (kein Laserlicht) ist die Kohärenzlänge in der Regel kleiner als die Ausdehnung der optischen Systeme und die Wechselwirkung der Lichtstrahlen untereinander kann vernachlässigt werden. Ein Gegenbeispiel sind dünne optische Systeme, wie z.B. Seifenblasen bei denen Interferenzeffekte durch unterschiedliche Farben sichtbar werden.

- *Das Snellius'sche Brechungsgesetz gilt*

Ein optisches System muß die Lichtstrahlen zusammenfassen und wieder an einem Ort bündeln. Für die Beschreibung dieser Ablenkung von Lichtstrahlen soll das Snellius'sche Brechungsgesetz gelten. D.h. doppelbrechende Materialien werden nicht betrachtet.

In der geometrischen Optik wird in der Regel eine **Abbildung** beschrieben, bei der Lichtstrahlen, die von einem **Objekt** in alle Richtungen ausgehen, durch ein **optisches System** gebrochen und wieder zu einem **Bild** zusammengeführt werden. Dies ist in Abb. 2.3.1 verdeutlicht.



**Abbildung 2.3.1:** Ein optisches System bildet ein Objekt auf ein Bild ab, d.h. alle Lichtstrahlen die von einem Punkt des Objektes ausgehen werden in eindeutiger Weise an einem Punkt P des Bildes zusammengeführt.

### 2.3.2 Optische Abbildungen, Linsen

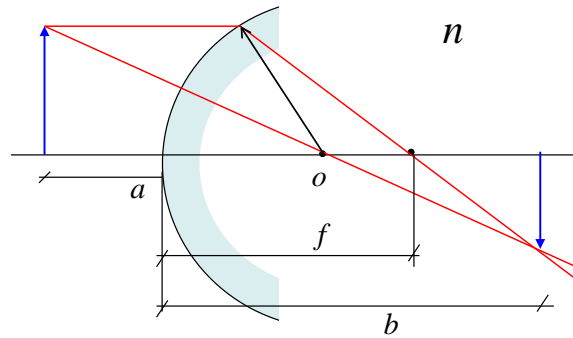
Zur Berechnung der Abbildungseigenschaften von zum Beispiel einer Grenzfläche, benötigen wir mehrere Kenngrößen (siehe Abb. 2.3.2): zum einen den Abstand  $a$  des Objektes von der Grenzfläche an der die ausgehenden Lichtstrahlen gebrochen werden und der Abstand  $b$  des erzeugten Bildes von der Grenzfläche. Als Grenzflächen betrachten wir im folgenden nur *sphärische* Grenzflächen, die durch eine Radius  $R$  gekennzeichnet sind. Diese sphärischen Grenzflächen haben eine große Bedeutung, da sie technisch mit entsprechenden Schleifvorrichtungen leicht herzustellen sind. Allerdings besitzen sie bei genauerer Betrachtung Abbildungsfehler, wie unten noch erläutert wird.

Alle optischen Elemente werden entlang einer Achse angeordnet, der **optischen Achse**, die durch die Scheitelpunkte der sphärischen Grenzflächen geht. Man unterscheidet prinzipiell zwischen **konkaven** und **konvexen** Grenzflächen. Bei konkaven Grenzflächen zeigt die Krümmung dem Lichtstrahl entgegen, bei konvexen umgekehrt.

Fällt ein Lichtstrahl parallel zur optischen Achse auf die Grenzfläche, so wird er in der Linse gebrochen und schneidet danach die optische Achse an einem charakteristischen Punkt, dem **Brennpunkt**. Den Abstand dieses Punktes zu der Grenzfläche bezeichnet man als **Brennweite**.

Ein Bild läßt sich leicht geometrisch konstruieren indem man zunächst zwei Strahlen konstruiert: (i) den Mittelpunktstrahl durch den Mittelpunkt des Kreises, der senkrecht durch die Grenzflächen geht und somit nicht gebrochen wird. (ii) einen achsen-parallelen Strahl, der an der Grenzfläche ge-

brochen wird und die Symmetrieachse des optischen System am Brennpunkt schneidet. Am Schnittpunkt dieser beiden Strahlen befindet sich das Bild des Objektes. Dies ist in Abb. 2.3.2 illustriert.



**Abbildung 2.3.2:** Kenngrößen einer optischen Abbildung:  $a$  Abstand Objekt – Grenzfläche;  $b$  Abstand Grenzfläche – Bild;  $f$  Brennweite;  $n$  Brechungsindex;  $R$  Krümmungsradius Grenzfläche.

Für die Berechnung der Abbildungseigenschaften benötigen wir jetzt eine Vorschrift zur Berechnung der Brennweite in Abhängigkeit von der Form des optischen Systems, sowie einen Zusammenhang zwischen Objekt- und Bildweite und dieser Brennweite.

### Abbildung einer gekrümmten Grenzfläche

Betrachten wir zunächst eine gekrümmte, sphärische Grenzfläche, die zwei Medien mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  trennt. Im folgenden wollen wir den Brennpunkt bestimmen und konstruieren einen achsen-nahen parallelen Strahl. Gemäß der Zeichnung 2.3.3 können wir die Winkel setzen:

$$h = R \sin \alpha \simeq f \sin \gamma \quad (2.3.1)$$

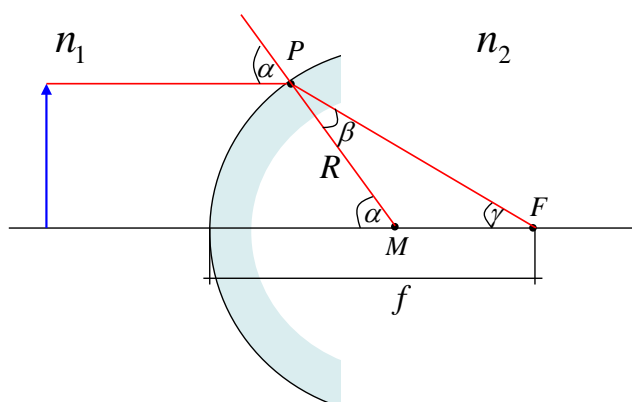
Die Winkel stehen in einem Zusammenhang von:

$$\beta + \gamma + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ \quad (2.3.2)$$

Für die Brechung an der Grenzfläche gilt:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (2.3.3)$$

Somit haben wir drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Da wir annehmen, daß alle Strahlen sehr nahe an der optischen Achse



**Abbildung 2.3.3:** Gekrümmte Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$ .

verlaufen können wir für kleine Winkel immer  $\sin x \rightarrow x$  nähern und erhalten schließlich:

$$f = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad (2.3.4)$$

In einem zweiten Schritt benötigen wir einen Zusammenhang zwischen der Objektweite und der Bildweite. Dazu betrachten wir Abbildung 2.3.4. Wir können die Winkel in zwei Dreiecken bestimmen. Die Winkelsumme im Dreieck  $AMP$  ergibt:

$$\epsilon + (180^\circ - \alpha) + \delta = 180^\circ \quad (2.3.5)$$

sowie im Dreieck  $MPB$ :

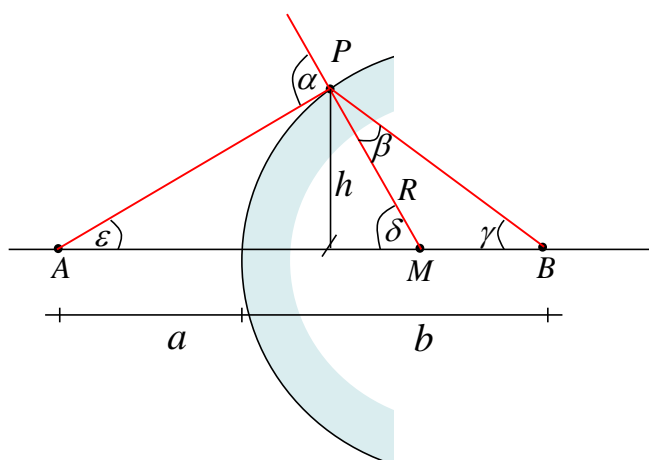
$$\beta + \gamma + (180^\circ - \delta) = 180^\circ \quad (2.3.6)$$

Nachdem wir achsennahe Strahlen betrachten sind alle Winkel sehr klein und wir können immer  $\sin x \rightarrow x$  setzen und bekommen eine vereinfachte Form des Brechungsgesetzes von:

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (2.3.7)$$

Die Höhe  $h$  des Punktes  $P$  an der Grenzfläche an der gebrochen wird ist  $\sin \epsilon \alpha$ . Auch hier wird  $\sin x \rightarrow x$  ersetzt und wir bekommen den Zusammenhang:





**Abbildung 2.3.4:** Abbildung eines Punktes A auf einen Punkt B durch Brechung am Punkt P der Grenzfläche.

$$\epsilon a = \gamma b = \delta R \quad (2.3.8)$$

Wir bekommen wieder 4 Gleichungen für vier unbekannte Winkel, die wir auflösen können zu:

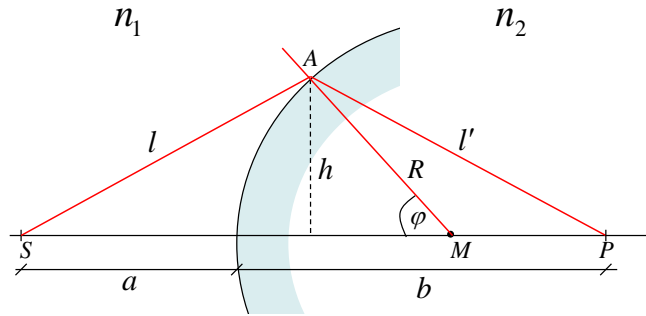
$$\boxed{\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f}} \quad (2.3.9)$$

Als alternative Ableitung des Abbildungsgesetz wollen wir das **Fermat'sche Prinzip** benutzen, das wir schon bei der Ableitung des Snellius'schen Brechungsgesetzes eingeführt haben. Es besagt, daß das Licht denjenigen Weg durch ein optisches System wählt, auf dem es am schnellsten von Punkt A zu Punkt B gelangt. Bei dem einfachen Brechungsgesetz entsteht genau *ein* Weg. Bei einer optischen Abbildung, hingegen, laufen alle Lichtstrahlen, die vom Objekt ausgehen, wieder beim Bild zusammen. D.h. *alle Wege* müssen dem Fermat'schen Prinzip gleichzeitig genügen und das Licht benötigt auf *allen* Wegen die *gleiche minimale Laufzeit*.

Auf der Basis dieser Überlegung wollen wir die Abbildungseigenschaften einer gekrümmten Grenzfläche noch einmal betrachten. Wir konstruieren die Abbildung mit der Forderung, daß das Licht alle Wege vom Objekt zum Bild in gleicher Zeit durchläuft!<sup>13</sup> D.h. die optische Weglänge muß *unabhängig* vom

<sup>13</sup>Dies legt an sich auch die Form der Grenzfläche fest, wie am Beispiel der asphärischen Spiegel später erläutert wird.

Ort der Brechung auf der Linsenoberfläche sein. Diese optische Weglänge  $s$  ist gemäß Abb. 2.3.5 gegeben als:



**Abbildung 2.3.5:** Ableitung der Abbildung eines Punktes nach dem Fermat'schen Prinzip.

$$s = n_1 l + n_2 l' \quad (2.3.10)$$

Die einzelnen Teilstrecken  $l$  und  $l'$  sind:

$$l = [R^2 + (a + R)^2 - 2R(a + R) \cos \varphi]^{1/2} \quad (2.3.11)$$

$$l' = [R^2 + (b - R)^2 - 2R(b - R) \cos \varphi]^{1/2} \quad (2.3.12)$$

Die optische Weglänge darf sich mit dem Ort auf der Grenzfläche, an der das Licht gebrochen wird, nicht ändern. Somit muß die Weglänge unabhängig vom Winkel  $\varphi$  sein bzw. die erste Ableitung Null ergeben:

$$\frac{d(n_1 l + n_2 l')}{d\varphi} = 0 \quad (2.3.13)$$

Daraus bekommen wir die Beziehung

$$\frac{n_1 R(a + R) \sin \varphi}{2l} - \frac{n_2 R(b - R) \sin \varphi}{2l'} = 0 \quad (2.3.14)$$

was sich wieder auflöst zu:

$$\frac{n_1}{l} + \frac{n_2}{l'} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2 b}{l'} - \frac{n_1 a}{l} \right) \quad (2.3.15)$$

für achsennahe Strahlen gilt wieder  $l \simeq a$  und  $l' \simeq b$  und wir bekommen wieder das Abbildungsgesetz:

Größe	Randbedingung
a	⊕ falls $a$ links von der Grenzfläche
b,f	⊕ falls $b, f$ rechts von der Grenzfläche
R	⊕ falls Mittelpunkt $R$ rechts von der Grenzfläche

**Tabelle 2.2:** Vorzeichen im Abbildungsgesetz. Falls eine Randbedingung nicht erfüllt ist, wird jeweils das Vorzeichen umgedreht

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2.3.16)$$

Dieses Brechungsgesetz kann sehr allgemein verwendet werden, allerdings müssen dabei die Vorzeichen beachtet werden. Alle Vorzeichen sind positiv, falls die Abbildung so wie in Abb. 2.3.5 konstruiert wurde. Falls die Bild- und Objektweite auf der jeweils anderen Seite der Grenzfläche liegen, drehen sich die Vorzeichen um. Dies ist in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

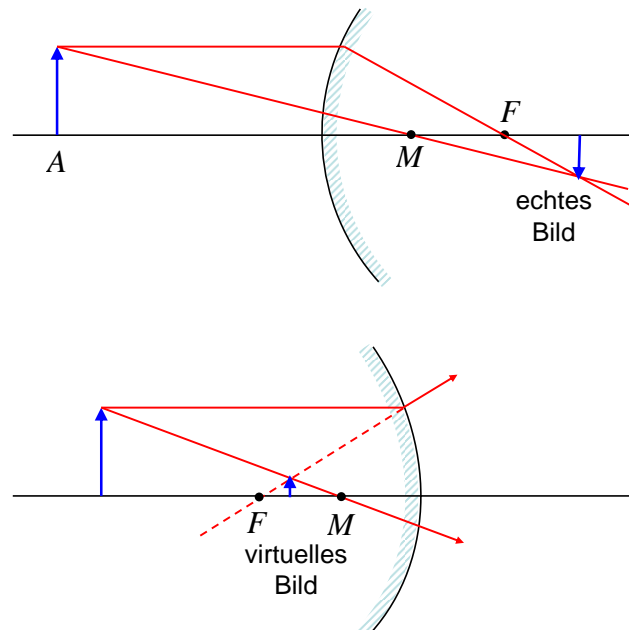
Die Leistungsfähigkeit der Vorzeichen-Konvention ist an der Abbildung einer konkaven Fläche illustriert. Hier wird der Krümmungsradius negativ, was eine negative Bildweite  $b$  bedingt. D.h. das Bild entsteht links von der Grenzfläche. Dies ist in Abb. 2.3.6 illustriert. Dieses Bild ist allerdings ein **virtuelles** Bild, da es nur ein Betrachter wahrnimmt, der von der rechten Seite durch die Zerstreungslinse blickt. Bei einem virtuellen Bild im Gegensatz zu einem reellen Bild ist es nicht möglich einen Schirm oder Photopapier an diese Stelle zu platzieren um das Bild aufzunehmen<sup>14</sup>.

## Dünne Linsen

Betrachten wir jetzt eine dünne Linse die durch zwei gekrümmte Grenzflächen im Abstand  $d$  zueinander gebildet wird. Zeigen die Krümmungen zueinander sprich von einer **Sammellinse**, zeigen sie entgegen gesetzt, sprich von einer **Zerstreuungslinse**. Im folgenden wollen wir zunächst eine Sammellinse betrachten (siehe Abb. 2.3.7). Für die Konstruktion des Bildes müssen wir das Abbildungsgesetz zweimal hintereinander anwenden. Betrachten wir zunächst die erste Grenzfläche. Der Brechungsindex der Umgebung sei 1, während der der Linse gleich  $n$  ist. Wir bekommen somit ein Bild am Ort  $b'$

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b'} = \frac{n - 1}{R_1} \quad (2.3.17)$$

<sup>14</sup>Bei der Betrachtung durch eine Lupe entsteht auch ein virtuelles Bild allerdings wird dies durch das menschliche Auge des Betrachter wieder auf ein reelles Bild auf der Netzhaut abgebildet (siehe unten).



**Abbildung 2.3.6:** Geometrische Konstruktion der Abbildung eines Objektes am Ort A. Bei einer konvexen Fläche entsteht ein reelles Bild, bei einer konkaven Fläche ein virtuelles.

Für die zweite Abbildung durch die zweite Grenzfläche müssen wir die Vorzeichen-Konvention beachten. Der Objektpunkt  $b'$  liegt jetzt rechts von der Grenzfläche (zusätzlich ist der Mittelpunkt des Radius der sphärischen Grenzfläche auf der linken Seite). Entsprechend wird das negative Vorzeichen gewählt und wir bekommen:

$$-\frac{n}{b' - d} + \frac{1}{b} = \frac{1 - n}{R_2} = -\frac{n - 1}{R_2} \quad (2.3.18)$$

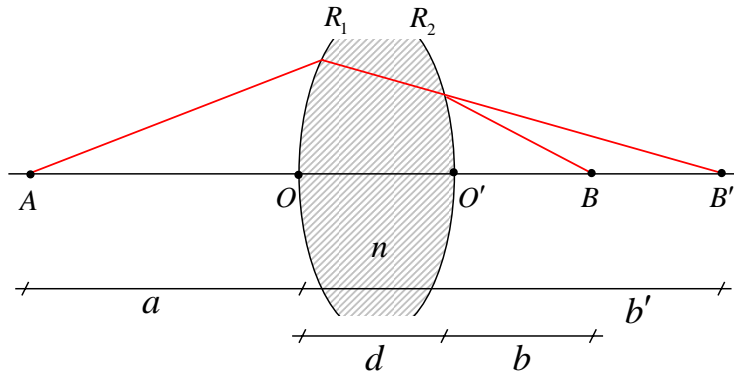
Wir addieren beide Gleichungen und bekommen:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b'} - \frac{n}{b' - d} + \frac{1}{b} = \frac{n - 1}{R_1} - \frac{n - 1}{R_2} \quad (2.3.19)$$

Dies läßt sich vereinfachen zu:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{nd}{b'(b' - d)} \quad (2.3.20)$$

Bei dünnen Linsen ist  $d \ll b, b'$  und wir bekommen:



**Abbildung 2.3.7:** Abbildung eines Objektes am Ort A durch eine dünne Linse auf eine Bild am Ort B.

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (2.3.21)$$

Die Brennweite läßt sich einfach ableiten, wenn man den Objektpunkt  $a$  ins Unendliche verlegt. Man bekommt:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.3.22)$$

Als Beispiel berechnen wir eine dünne Linse mit dem Krümmungsradius  $R_1 = 10$  cm und  $R_2 = -15$  cm. Man beachte, daß  $R_2$  negativ gesetzt werden muß, da der Mittelpunkt links von der Grenzfläche liegt. Für einen Brechungsindex von 1.5 bekommen wir dann eine Brennweite von  $f = 12$  cm.

Zusammenfassend bekommen wir für dünne Linsen mit Brechungsindex  $n$  in Atmosphäre ( $n_{Umgebung} = 1$ ) die **Abbildungsgleichung für dünne Linsen**:

$$\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}} \quad (2.3.23)$$

Nachdem man sowohl  $a$  als auch  $b$  ins Unendliche legen kann, erkennt man daß die Brennweite  $f$  auf *beiden* Seiten der Linse *identisch* ist.

Diese gleiche Brennweite einer Linse auf beiden Seiten gilt nicht mehr für den Fall, daß unterschiedliche Medien auf beiden Seiten der Linse vorliegen<sup>15</sup>. Wir betrachten noch einmal den obigen Fall einer dünnen Linse mit

<sup>15</sup>Bekanntestes Beispiel ist das Aug, bei der die Linse auf einer Seite von Atmosphäre, aber auf der anderen Seite von dem Glaskörper im Innern des Auges begrenzt ist.

Brechungsindex  $n_2$ , diesmal aber mit einem Brechungsindex  $n_1$  und  $n_3$  der Medien vor und nach der Linse. Die Abbildung durch die erste Grenzfläche in Abb. 2.3.6 liefert wieder:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (2.3.24)$$

Die Abbildung durch die zweite Grenzfläche liefert:

$$-\frac{n_1}{b' - d} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3 - n_2}{R_2} \quad (2.3.25)$$

Wir addieren wieder beide Gleichung und bekommen:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_3}{b} = \left( \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} \right) + \frac{n_2 d}{b'(b' - d)} \quad (2.3.26)$$

bzw. für  $d \ll b'$

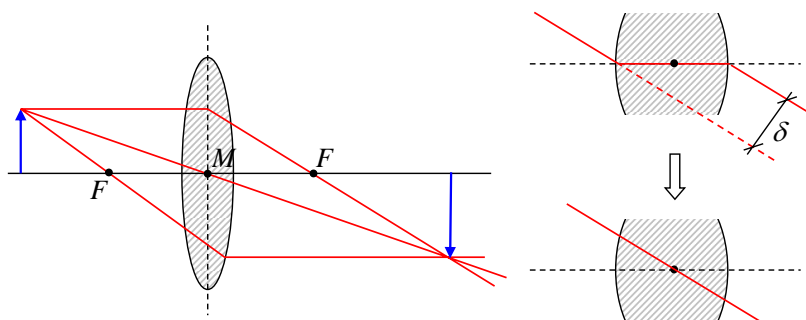
$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_3}{b} = \left( \frac{n_2 - n_1}{R_1} - \frac{n_2 - n_3}{R_2} \right) \quad (2.3.27)$$

Wenn man jetzt wieder  $n_1 = n_3 = 1$  setzt, bekommt man wieder Gl. 2.3.21. Allerdings ist die Brennweite der Linse vor und hinter der Linse *nicht mehr* gleich, da für  $b \rightarrow \infty$  und  $a \rightarrow \infty$  jeweils unterschiedliche Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  resultieren.

Die Abbildungseigenschaften einer Linse in einer gleichförmigen Umgebung ( $n_{Umgebung} = \text{const.}$ ) lassen sich geometrisch ermitteln. Hierzu konstruiert man zunächst eine **Mittalebene** in der dünnen Linse. Vom Objekt gehen jetzt drei Strahlen aus, die am Ort des Bildes in charakteristischer Weise wieder zusammenlaufen. Diese drei Strahlen werden am Beispiel einer *Sammellinse* illustriert:

- **Mittelpunktstrahl:** Ein Lichtstrahl geht direkt durch Mitte der Linse. Bei genauer Betrachtung wird ein solcher Strahl allerdings an den beiden Grenzflächen gebrochen und dabei parallel versetzt, wie in Abb. 2.3.8 illustriert ist. Diese Versetzung ist gerade bei dünnen Linsen vernachlässigbar. Falls die Linse auf beiden Seiten durch unterschiedlichen Materialien begrenzt ist, ist die Anwendung des Mittelpunktstrahl nicht mehr möglich, da nicht nur ein Versatz des Mittelpunktstrahls beim Durchgang durch die Linse auftritt sondern auch eine Brechung! In diesem Fall können nur die nächsten beiden Strahlen benutzt werden.

- **achsen-paralleler Strahl:** Ein Lichtstrahl geht parallel zur optischen Achse bis zur Mittelebene und von dort durch den *hinteren* Brennpunkt.<sup>16</sup>



**Abbildung 2.3.8:** Konstruktion der Abbildung durch die Verwendung der Mittelebene einer dünnen Linse. Der parallele Versatz  $\delta$  des Lichtstrahls beim Durchgang durch die Mitte der Linse kann vernachlässigt werden.

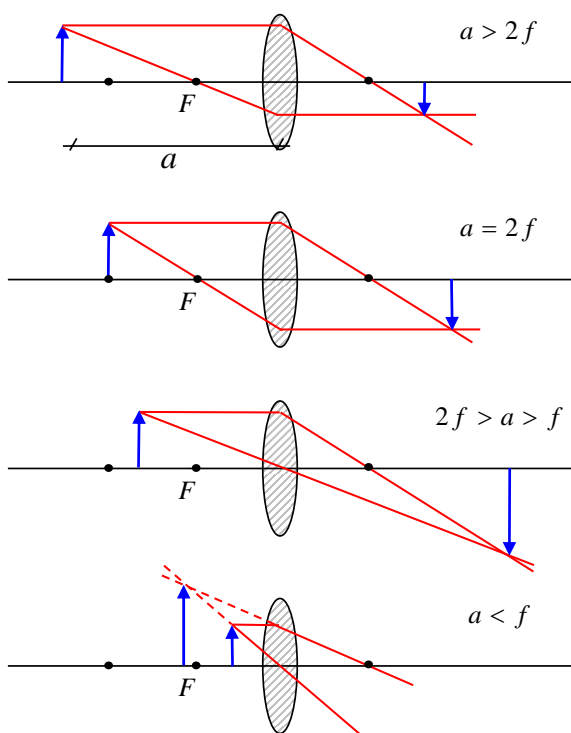
- **Brennpunktstrahl:** Ein Lichtstrahl geht durch den *vorderen* Brennpunkt und von dort zur Mittelebene. Danach wird dieser zu einem achsenparallelen Strahl

Alle drei Strahlen treffen sich wieder in einem Punkt und legen so den Ort der Abbildung fest.

Wie läßt sich jetzt die Vergrößerung/Verkleinerung bei der Abbildung beschreiben? Betrachten wir dazu zunächst das prinzipielle Verhalten in Abhängigkeit vom Abstand  $a$  des Objektes zur Linse mit Brennweite  $f$ , wie wir es von einer Konstruktion der Abbildung ableiten können (siehe Abb. 2.3.9): ( $a \gg f$ ) falls  $a$  sehr viel größer als  $f$  ist, wird das Objekt verkleinert; ( $a = 2f$ ) falls  $a$  doppelt so groß wie  $f$  ist, wird das Objekt 1:1 dargestellt; ( $2f > a > f$ ) falls  $a$  zwischen  $f$  und  $2f$  liegt, wird das Objekt vergrößert. ( $a < f$ ); falls  $a$  kleiner als  $f$  wird, entsteht ein vergrößertes virtuelles Bild. Dieser Fall ist in jeder Lupe realisiert bei der das Objekt immer innerhalb der Brennweite liegt und der Betrachter ein vergrößertes *virtuelles* Bild beobachtet.

Der Vergrößerungs- bzw. Verkleinerungsfaktor ergibt sich aus einer quantitativen Überlegung. Die Objektweite und die Bildweite seien gemäß Abb. 2.3.10:

<sup>16</sup>Die Bezeichnung vorne und hinten bezieht sich explizit auf eine Sammellinse (siehe unten).



**Abbildung 2.3.9:** Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Bildes je nach Abstand  $a$  des Objektes von der Linse mit Brennweite  $f$ . Falls  $a < f$  wird entsteht nur ein virtuelles Bild (optische Anwendung Lupe).

$$a = x + f \quad (2.3.28)$$

$$b = x' + f \quad (2.3.29)$$

$$(2.3.30)$$

Nach dem Abbildungsgesetz ergibt sich:

$$\frac{1}{x + f} + \frac{1}{x' + f} = \frac{1}{f} \quad (2.3.31)$$

Dies läßt sich umformen

$$(x'f)f + (x + f)f = (x + f)(x' + f) \quad (2.3.32)$$

und man bekommt schließlich

$$\boxed{f^2 = xx'} \quad (2.3.33)$$



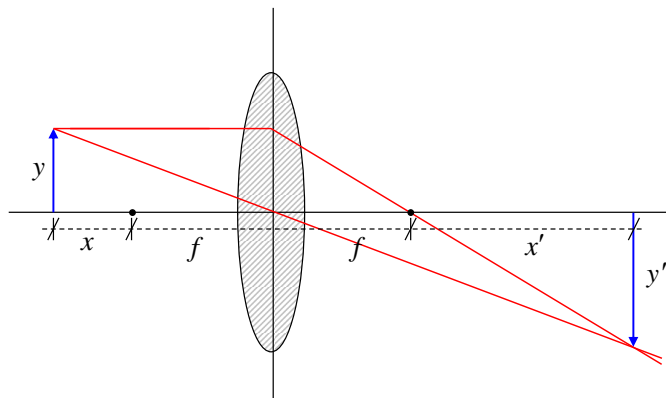
Dies bezeichnet man als **Newton'sche Abbildungsgleichung**. Die Vergrößerung läßt sich aus dem Strahlensatz ableiten, wenn man zwei Dreiecke (siehe Abb. 2.3.10) betrachtet:  $y$  bezeichnet die Ausdehnung des Objektes im Abstand  $a$ , während  $y'$  die Ausdehnung des Bildes im Abstand  $b$  bezeichnet:

$$\frac{y}{|y'|} = \frac{a}{b} \quad (2.3.34)$$

Man definiert die **Vergrößerung  $M$  der Abbildung** gemäß:

$$M = \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} = \frac{f}{f-a} = -\frac{f}{x} \quad (2.3.35)$$

Falls  $M$  negativ ist, wird das Bild bei der Abbildung umgedreht.



**Abbildung 2.3.10:** Vergrößerung eines Objektes der Ausdehnung  $y$  bei der Abbildung durch eine Linse der Brennweite  $f$  auf ein Bild der Ausdehnung  $y'$ .

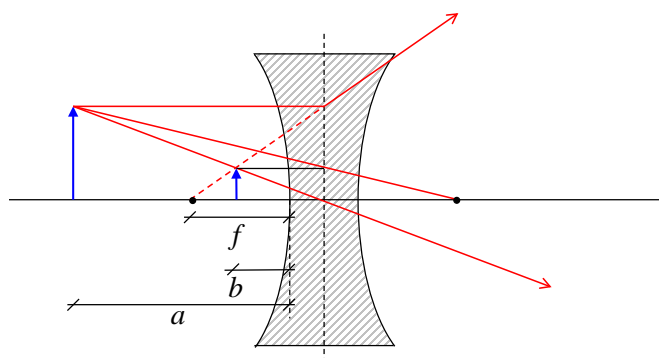
Zur Illustration der Abbildungsgesetze ist in Abb. 2.3.11 noch einmal eine Zerstreuungslinse gezeigt. Die Berechnung der Brennweite ergibt:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.3.36)$$

Wir betrachten den Fall, daß beide Radien gleich sein sollen. Der Mittelpunkt von Krümmungsradius  $R_1$  liegt allerdings *links* von der Grenzfläche und wir müssen  $R_1 = -|R|$  einsetzen. Der Mittelpunkt vom Krümmungsradius  $R_2$  liegt rechts von der Grenzfläche und wir können  $R_2 = |R|$  setzen. Damit bekommen wir:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( -\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) = -(n - 1) \frac{2}{R} \quad (2.3.37)$$

D.h. die Brennweite wird *negativ*, damit liegt der Brennpunkt *links* von der Grenzfläche. Mit diesem Brennpunkt, können wir jetzt wieder die Abbildung konstruieren: Dabei führen wir einen achsenparallelen Strahl bis zur Mittelebene der Linse und von dort zum Brennpunkt<sup>17</sup> Der Mittelpunktstrahl geht durch den Mittelpunkt der Linse. Am Schnittpunkt dieser beiden Geraden entsteht das Bild des Objektes. Dieses Bild ist ein *virtuelles Bild*, wie in Abb. 2.3.11 veranschaulicht ist. Auch der dritte Strahl läßt sich konstruieren: dabei gehen wir von dem Objekt zu dem zweiten Brennpunkt, der jetzt aber *rechts* von der Zerstreuungslinse liegt. Am Schnittpunkt dieses Strahl mit der Mittelebene, konstruieren wir einen achsen-parallel Strahl der die ersten beiden Strahlen wieder am selben Punkt schneidet!



**Abbildung 2.3.11:** Beispiel der Abbildung durch eine Zerstreuungslinse.

Die Vergrößerung ist durch das Verhältnis aus Bild zu Objektweite gegeben. Aus der Abb. 2.3.11 erkennt man, daß die Bildweite links von der Linse liegt, d.h.  $b = -|b|$ . Damit wird die Vergrößerung:

$$M = -\frac{b}{a} = \frac{|b|}{|a|} > 0 \quad (2.3.38)$$

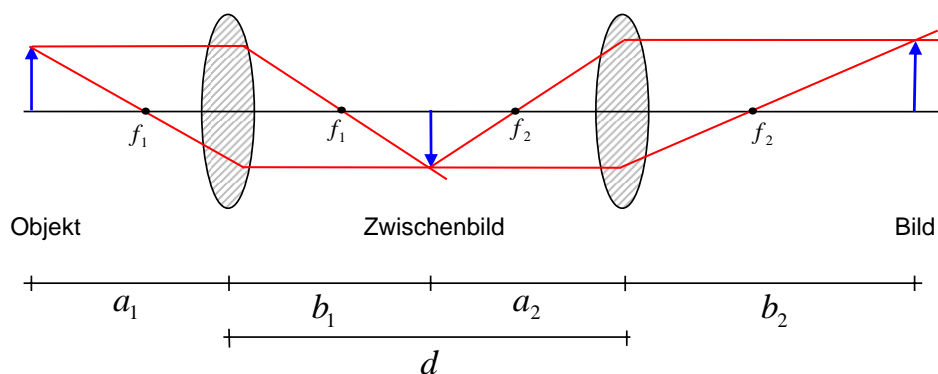
größer als Null und das Bild bleibt *aufrecht*.

<sup>17</sup>Dies ist im Gegensatz zu einer Sammellinse bei der der Strahl zu einem hinteren Brennpunkt, hinter der Linse, lief.

## Kombination von Linsen

In einer Optik werden in der Regel mehrere Linsen kombiniert. Zur Konstruktion der entsprechenden Abbildung müssen wir das Abbildungsgesetz mehrfach anwenden. Betrachten wir dazu zwei Linsen mit den Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$ , die den Abstand  $d$  voneinander entfernt sind (siehe Abb. 2.3.12). Für die Konstruktion der Abbildung verwenden wir den achsenparallelen Strahl und den Brennpunktstrahl für jede der beiden Linsen separat. Mit der Abbildung durch die erste Linse konstruieren wir zunächst ein **Zwischenbild**, das dann nachfolgend durch die zweite Linse abgebildet wird. Dies beschreibt nicht die wahre Fortsetzung der beiden Strahlen durch die erste Linse in ihrer Verlängerung durch die zweite Linse. Dies ist aber auch nicht notwendig, da *alle Strahlen* vom Zwischenbild auf das Bild abgebildet werden und man für die Konstruktion, immer die passenden Strahlen wie Mittelpunktstrahl und Brennpunktstrahl wählen kann.<sup>18</sup>

Für die Berechnung der Abbildung können wir mehrere Gleichungen aufstellen:



**Abbildung 2.3.12:** Abbildung eines Objektes durch zwei Linsen im Abstand  $d$  voneinander, wobei der Abstand größer als die Brennweiten ist. Es entsteht ein reelles Zwischenbild, das durch die zweite Linse abgebildet wird.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \quad (2.3.39)$$

<sup>18</sup>Dies bezieht sich auf die Ableitung der Abbildungsgesetze. Der wahre Strahlengang des Lichtes verläuft natürlich immer geradlinig, wobei Strahlen zwar formal das Bild erzeugen, aber in einer realen Optik zum Beispiel die zweite Linse gar nicht mehr erreichen können (Beispiel Vignettierung).

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} \quad (2.3.40)$$

$$b_1 + a_2 = d \quad (2.3.41)$$

Eine Brennweite des Gesamtsystems  $f$  können wir definieren, wenn wir die Objektweite als Abstand von der *ersten* Linse mit der Bildweite als Abstand von der *zweiten* Linse verknüpfen. Formal ergibt dies:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f} \quad (2.3.42)$$

Man kann 4 Gleichungen für 4 Unbekannte  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  und  $b_2$  auflösen und bekommt als Ausdruck für die *gemeinsame* Brennweite  $f$ :

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}} \quad (2.3.43)$$

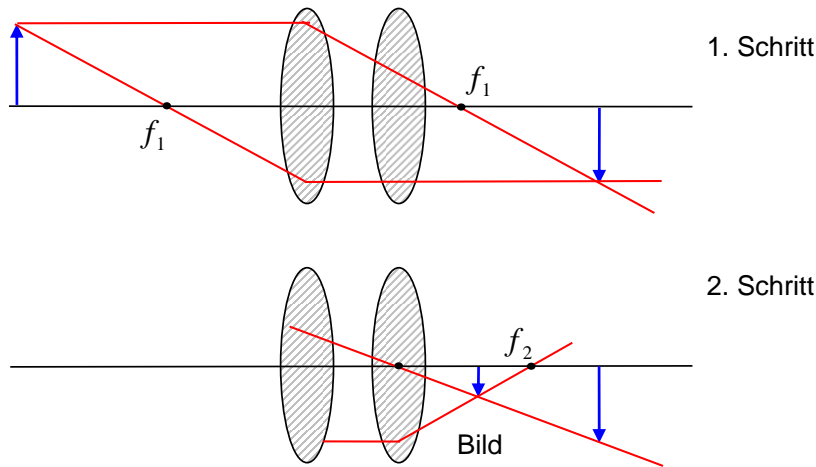
Falls  $d \ll f_1, f_2$  ist, kann der letzte Term vernachlässigt werden und wir bekommen für die gesamte Brennweite für *i* eng benachbarte Linsen:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \sum_i \frac{1}{f_i}} \quad (2.3.44)$$

Die geometrische Konstruktion einer Abbildung bei der die Linsen *eng* zusammen stehen (d.h.  $d \ll f_1, f_2$ ) erfolgt analog. Allerdings muß man die Strahlen geschickt wählen. Zunächst wird in einem ersten Schritt, ein Zwischenbild durch die Abbildung durch Linse 1 erzeugt, wobei Linse 2 vernachlässigt wird. In einem zweiten Schritt werden zwei Strahlen konstruiert, die bei der Abbildung durch Linse 2, zu diesem Zwischenbild führen: dies ist ein Strahl durch den Mittelpunkt der *zweiten Linse* und ein Strahl der zwischen beiden Linsen parallel zur Achse verläuft und danach durch den Brennpunkt der *zweiten Linse* führen muß. Am Schnittpunkt dieser beiden Strahlen entsteht das Bild nach der zweiten Linse. Dieses zweistufige Vorgehensweise ist in Abb. 2.3.13 illustriert.

### Dicke Linsen

Wenn man dicke Linsen betrachtet, ist die Konstruktion der Abbildung auf der Basis einer einzigen Mittelebene nicht mehr richtig, da zum Beispiel der Strahlversatz bei dem Strahl, der durch den Mittelpunkt der Linsen geht nicht mehr vernachlässigbar ist. Stattdessen werden zwei **Hauptebenen** festgelegt, die jeweils als Referenzebene für die Konstruktion der Abbildung



**Abbildung 2.3.13:** Abbildung eines Objektes durch zwei Linsen im Abstand  $d$  voneinander, wobei der Abstand kleiner als die Brennweiten ist. Es entsteht ein virtuelles Zwischenbild.

dienen, wie in Abb. 2.3.14 illustriert ist. Die Entfernung der Hauptebenen von den Linsenoberflächen ist:

$$h_1 = -\frac{(n-1)fd}{nR_2} \quad (2.3.45)$$

$$h_2 = -\frac{(n-1)fd}{nR_1} \quad (2.3.46)$$

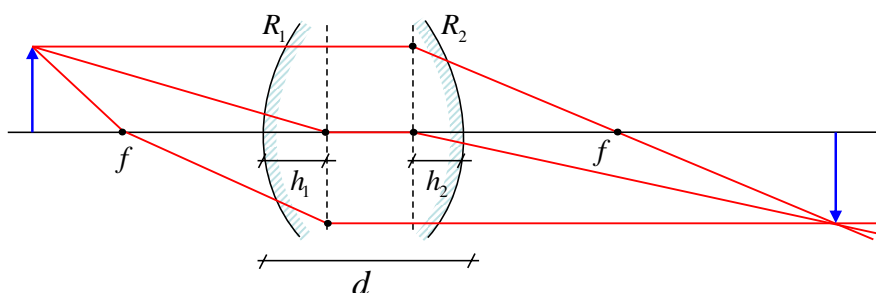
Hier ist zum Beispiel  $h_1$  positiv wenn sich die Hauptebene rechts von der ersten Grenzfläche befindet<sup>19</sup>. Die Brennweite, einer dicken Linse ist gegeben als:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \right] \quad (2.3.47)$$

Im Grenzwert  $d \ll R_1, R_2$  geht diese Gleichung wieder in die Abbildungsgleichung 2.3.21 für dünne Linsen über.

Die mathematische Behandlung dieser Zusammenhänge ist aufwendig und wird hier nicht aufgeführt. Zudem ist es wichtig zu bemerken, dass heutzutage alle optischen Systeme per Computeralgorithmen konstruiert werden und das analytische Berechnen von beliebigen Linsenkonfigurationen keine Rolle

<sup>19</sup>Das negative Vorzeichen in dieser Gleichung hebt sich weg, da  $R_2$  eine konkave Oberfläche beschreibt und demnach negativ ist.



**Abbildung 2.3.14:** Bei dicken Linsen ist die Näherung einer einfachen Mittelebene nicht mehr gültig. Vielmehr werden zwei Hauptebenen berechnet, die entsprechende der Abbildung die geometrische Konstruktion des Bildes erlauben.

mehr spielt. Insofern haben die Berechnungsformeln für dicke Linsen nur historische Bedeutung.

### 2.3.3 Optische Abbildungen, Spiegel

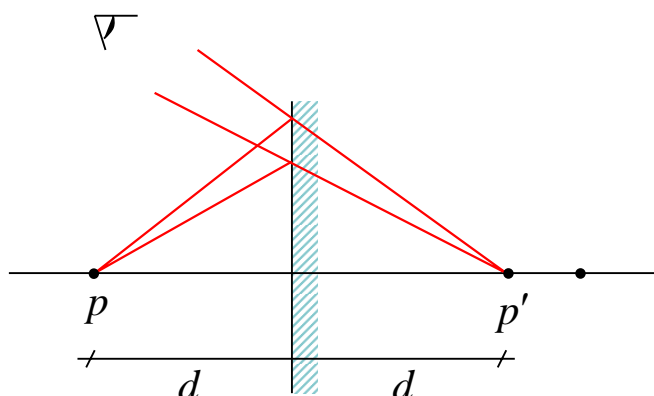
Spiegel sind im Prinzip sehr leistungsfähige optische Systeme, da das Reflexionsgesetz *unabhängig vom Brechungsindex* immer fordert, daß Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel ist. Zudem finden Spiegel immer dann ihren Einsatz, wenn Medien in Transmission zu stark absorbieren (Spiegel für die Abbildung von Röntgenstrahlen). Mit Spiegeln lassen sich auch sehr große und damit lichtstarke optische Systeme realisieren, wie man an den typischen Aufbauten astronomischer Teleskope ablesen kann.

#### Ebene Spiegel

Die einfachste Anordnung ist ein ebener Spiegel. Hierbei sieht der Betrachter ein *virtuelles* Bild, wie in Abb. 2.3.15 verdeutlicht ist. Gleichzeitig ist die Objektweite immer gleich der Bildweite.

#### Sphärische Spiegel

In Analogie zu sphärischen Linsen behandeln wir im folgenden zunächst sphärische Spiegel. Eine konkave Form, der **Hohlspiegel**, ist in Abb. 2.3.14 illustriert. Ein achsen-paralleler Strahl wird am Punkt P eines Spiegels mit Krümmungsradius  $R$  (Mittelpunkt M) reflektiert und trifft die optische Achse bei dem Brennpunkt F. Aus der Skizze ist ersichtlich, daß das Dreieck



**Abbildung 2.3.15:** Ein einfacher Spiegel erzeugt ein virtuelles Bild am Ort  $P'$ .

PFM ein gleichschenkliges Dreieck bildet. Die Strecke  $\overline{FM}$  ist nach dem Cosinussatz:

$$\overline{FM} = R \left( 1 - \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \quad (2.3.48)$$

Für kleine Winkel  $\alpha$  ist  $\cos \alpha \rightarrow 1$ . D.h. es gilt.

$$\overline{FM} = \frac{1}{2}R \quad (2.3.49)$$

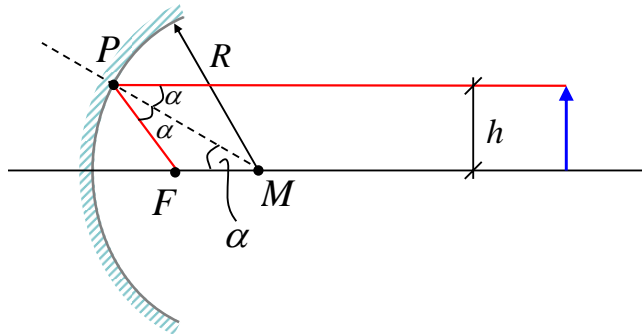
Damit wird auch die Brennweite  $f$ , als der Abstand vom Scheitelpunkt der Grenzfläche zum Brennpunkt, zu:

$$\boxed{f_{\text{Hohlspiegel}} = \frac{R}{2}} \quad (2.3.50)$$

D.h. der Brennpunkt bei sphärischen Hohlspiegeln ist gleich dem halben Radius. Wie entsteht jetzt eine Abbildung?. Dazu betrachten wir Abb. 2.3.17 bei der ein Punkt  $P$  über Reflexion an einem Spiegel auf den Punkt  $P'$  abgebildet werden soll. Diese Reflexion soll in einem Abstand  $h$  von der optischen Achse stattfinden. Gemäß der Abb. 2.3.17 können wir folgende Zusammenhänge ableiten:

$$\tan \gamma = \frac{h}{a} \quad (2.3.51)$$

$$\tan \beta = \frac{h}{b} \quad (2.3.52)$$



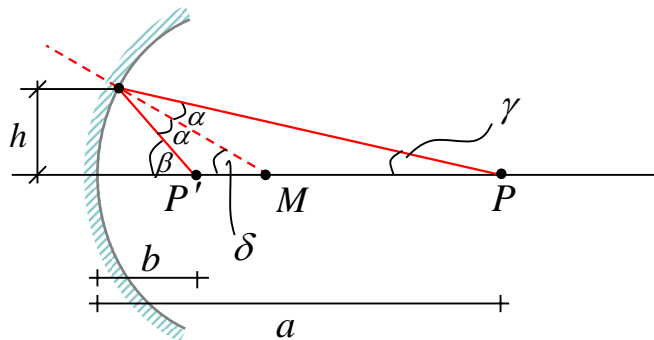
**Abbildung 2.3.16:** Brennpunkt  $F$  für einen Hohlspiegel mit Radius  $R$ .

$$\sin \delta = \frac{h}{R} \quad (2.3.53)$$

$$\gamma + \beta = 2\delta \quad (2.3.54)$$

Dies sind 4 Gleichungen für 4 unbekannte Winkel, die sich lösen lassen. Man bekommt wieder:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad (2.3.55)$$



**Abbildung 2.3.17:** Abbildung eines Objektes durch einen Hohlspiegel mit Radius  $R$ .

D.h. Abbildungsgesetz gilt sowohl für Linsen als auch für Spiegel. Welche Vergrößerung entsteht jetzt durch eine Abbildung in einem Hohlspiegel? Dazu konstruieren wir geometrisch das Bild am Punkt  $P'$ , analog zur Vorgehensweise bei Linsen (siehe Abb. 2.3.18). Die Vergrößerung des Objektes mit Ausdehnung  $y$  zu einem Bild der Ausdehnung  $y'$  ist gemäß dem Strahlensatz:

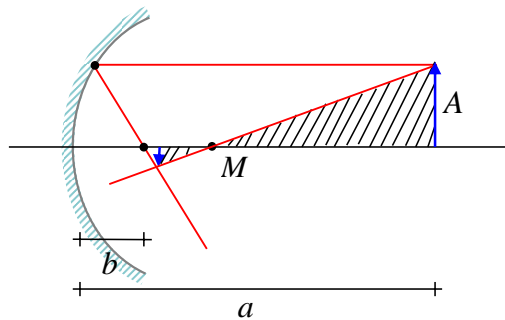


$$\frac{y'}{y} = \frac{R - b}{a - R} \quad (2.3.56)$$

mit Gl. 2.3.55 ergibt sich:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \quad (2.3.57)$$

Das Minuszeichen drückt aus, daß sich das Bild umdreht.



**Abbildung 2.3.18:** Konstruktion des Bildes von einem Objekt vor einem Hohlspiegel.

### Asphärische Spiegel

Bislang hatten wir die Abbildungsgesetze immer für den Fall sphärischer Flächen betrachtet und nur achsen-nahe Strahlen berücksichtigt haben. Wie sieht jedoch eine ideale Fläche aus, die *unabhängig* vom Abstand zur optischen Achse eine ideale Abbildung bewirkt. Hierzu wollen wir das Fermat'sche Prinzip bemühen, das besagt, daß bei einer Abbildung alle optischen Wege gleich sein müssen. Wir betrachten dazu Abb. 2.3.19 und fordern, daß die optische Wegstrecke unabhängig vom Abstand  $h$  zur optischen Achse wird, d.h. alle Strahlen werden auf den Brennpunkt  $F$  fokussiert. Was bedeutet das für die Form der reflektierenden Oberfläche, die wir durch eine Funktion  $y(x)$  beschreiben? Die optische Wegstrecke  $s$  ist:

$$s = \underbrace{f - x}_{s_1} + \underbrace{\sqrt{y^2 + (f - x)^2}}_{s_2} \quad (2.3.58)$$

Gesucht ist eine Funktion  $y(x)$  bei der  $s$  unabhängig von  $h$  wird. Mit dem Ansatz  $y^2 = 4fx$  ergibt sich:

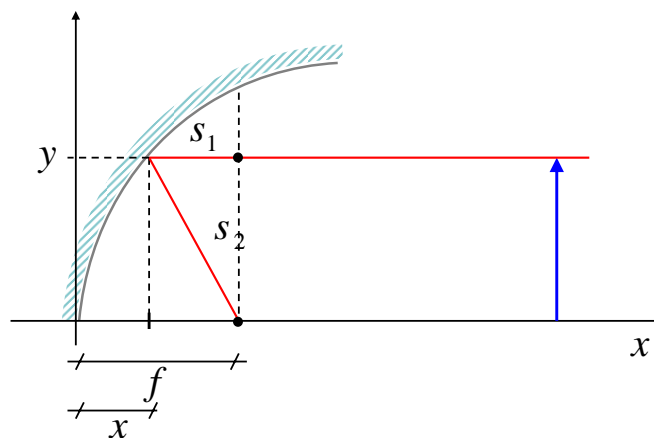
$$s = f - x + \sqrt{4fx + (f - x)^2} \quad (2.3.59)$$

$$= f - x + \sqrt{(f + x)^2} \quad (2.3.60)$$

$$= 2f \quad (2.3.61)$$

D.h. es gilt:

$$x = \frac{1}{4f}y^2 \quad (2.3.62)$$



**Abbildung 2.3.19:** Die ideale Fläche für die Abbildung ist eine Parabel. Die sphärische Form ist nur eine gute Näherung für achsennahe Strahlen.

Wir erkennen, daß die ideale Form der reflektierenden Oberfläche eine **Parabel** im Querschnitt besitzt! Alle größeren optischen Systeme wie Teleskope besitzen demzufolge einen **Parabol-Spiegel**. Die Herstellung eines parabelförmigen optischen Körpers ist aufwendig: zunächst wird auf mechanische Weise eine sphärische Grundform erzeugt, die man nachfolgend schleifen muß, um ihr die asphärische Form (eben die Parabolform) zu geben. Ein elegante Variante einen Parabol-Spiegel zu erzeugen, ist die Ausnutzung der Fliehkräfte in einer rotierenden Flüssigkeit. In diesem Fall entsteht automatisch ein parabelförmiger Querschnitt.

### 2.3.4 Abbildungsfehler

Bei der Betrachtung der Abbildungsgesetze sind wir zunächst von achsennahen Strahlen ausgegangen und haben die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge des Lichtes vernachlässigt. Dies sind im Allgemeinen

unzulässige Vereinfachungen und führen zu Abbildungsfehlern, den **Aberrationen**.

### Chromatische Aberration

Die chromatische Aberration entsteht durch die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge. Betrachten wir zwei Strahlen, die achsenparallel auf eine Linse einfallen. Diese werden in den Brennpunkt gebrochen, der durch

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.3.63)$$

definiert ist. Wie Abb. 2.3.20 illustriert, wird Licht unterschiedlicher Wellenlänge auf unterschiedliche Foci fokussiert. Somit entsteht nur für eine Farbe das Bild scharf, während die anderen Farben unscharf abgebildet werden. Dieser Fehler läßt sich mit einer zweiten Linse kompensieren, die den Fehler der ersten kompensiert. Wie muß diese Linse beschaffen sein? Für die Kombination zweier Linsen gilt:

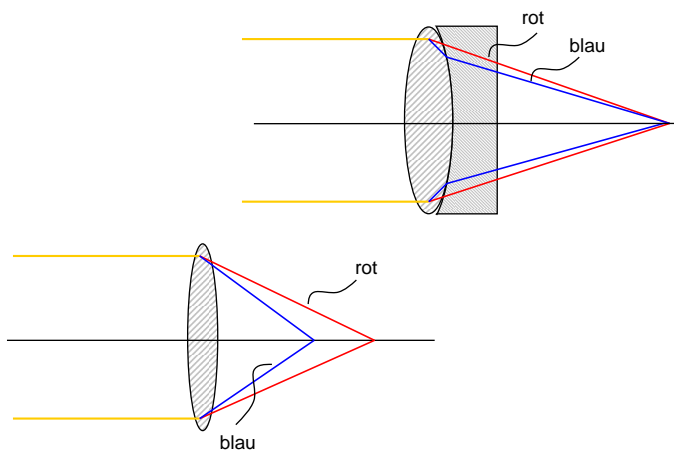


Abbildung 2.3.20: Chromatische Aberration.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (2.3.64)$$

Mit den Brennweiten:

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) \left( \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) = (n_1 - 1) \rho_1 \quad (2.3.65)$$

und

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right) = (n_2 - 1) \rho_2 \quad (2.3.66)$$

Die Radien  $R_{11}$  und  $R_{12}$  sind die vorderen und hinteren Krümmungsradien der ersten Linse (analog dazu die zweite Linse). Hier wurde die Kombination der beiden Krümmungsradien durch eine neue Größe  $\rho$  abgekürzt. Wir betrachten jetzt die Abbildung von z.B. blauem und rotem Licht durch diese Linsenkombination und erhalten für den Fall sehr eng beieinander liegender Linsen ( $d \ll f_1, f_2$ ) folgende Gesamt-Brennweiten.

$$\frac{1}{f_{rot}} = (n_{1,rot} - 1) \rho_1 + (n_{2,rot} - 1) \rho_2 \quad (2.3.67)$$

$$\frac{1}{f_{blau}} = (n_{1,blau} - 1) \rho_1 + (n_{2,blau} - 1) \rho_2 \quad (2.3.68)$$

$$(2.3.69)$$

$n_{1,rot}$  und  $n_{1,blau}$  bezeichnen den Brechungsindex der ersten Linse für rotes bzw. blaues Licht (analog dazu die zweite Linse). Ein sog. **Achromat** ist realisiert falls  $f_{rot} = f_{blau}$  erfüllt ist. D.h. es muß gelten:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = - \frac{n_{2,blau} - n_{2,rot}}{n_{1,blau} - n_{1,rot}} \quad (2.3.70)$$

Wir erkennen, daß das Verhältnis der Differenzen der Brechungsindizes für zwei Wellenlängen (blau im vgl. zu rot) genau dem Negativen des Verhältnis der Größen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  entsprechen. Das Verhältnis der Differenzen der Brechungsindizes ist ein Vergleich der Dispersion der beiden Linsen ( $\frac{dn}{d\omega}$ ). Diese ist in der Regel positiv (d.h.  $n_{2,blau} > n_{2,rot}$  und  $n_{1,blau} > n_{1,rot}$ ). Damit bedeutet das negative Vorzeichen, daß die Größen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  unterschiedliche Vorzeichen besitzen, d.h. eine Sammellinse muß mit einer Zerstreuungslinse kombiniert werden. Zusätzlich ist es notwendig, daß man unterschiedliche Materialien nimmt, da ansonsten das Verhältnis der Differenzen des Brechungsindizes gleich eins wird und damit die abbildende Wirkung der Sammellinse durch die Zerstreuungslinse gleich wieder rückgängig gemacht wird. Dann hat man zwar auch keine chromatische Aberration aber auch keine Abbildung mehr!

### Sphärische Aberration

Die zweite wichtige Aberration ist die **sphärische Aberration**, die ausdrückt, daß insbesondere Strahlen, die weit entfernt von der optischen Achse

einfallen nur bei parabolischen Grenzflächen exakt auf den Brennpunkt fokussiert werden (siehe Abb. 2.3.21). Dieser Effekt ist insbesondere für achsenferne Strahlen dominant bei denen sich der Brennpunkt in Richtung der brechenden Fläche verschiebt.

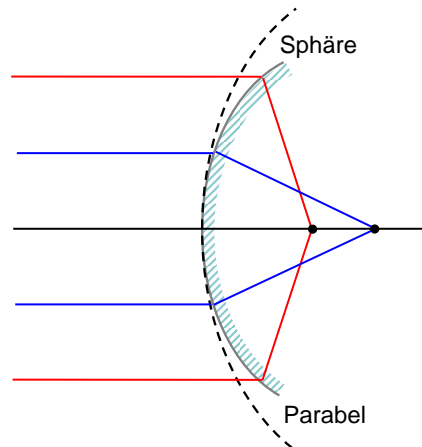


Abbildung 2.3.21: Sphärische Aberration.

Die sphärische Aberration wird heutzutage durch spezielles asphärisches Schleifen der Linsen erzeugt. Bei Kunststofflinsen können die Formwerkzeuge entsprechend bearbeitet werden.

### 2.3.5 Prismen

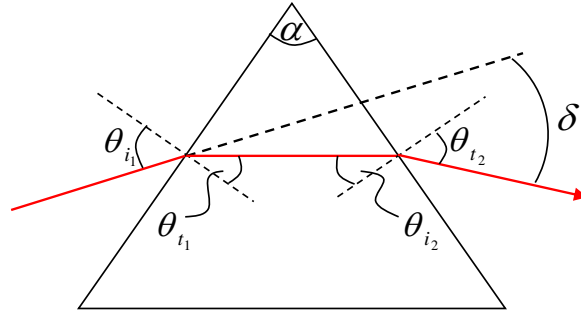
Prismen sind optische Systeme, die zur spektralen Aufspaltung von Licht dienen (Dispersionsprismen) oder die einen Strahlengang umlenken (Reflexionsprismen).

#### Dispersionsprismen

Betrachten wir ein Prisma, wie es in Abb. 2.3.22 gezeigt ist. Ein Strahl fällt unter einem Einfallswinkel  $\Theta_{i1}$  auf eine Seitenfläche und wird unter einem Winkel  $\Theta_{t1}$  ins Prisma gebrochen. Nach der Brechung an der zweiten Grenzfläche verläßt er das Prisma unter einem Winkel  $\delta$  zur ursprünglichen Richtung. Dieser Winkel  $\delta$  läßt sich aus den Einfalls- und Ausfallswinkel an beiden Grenzflächen ableiten zu:

$$\delta = (\Theta_{i1} - \Theta_{t1}) + (\Theta_{t2} - \Theta_{i2}) \quad (2.3.71)$$

Falls das Prisma einen *Keilwinkel*  $\alpha$  besitzt, lassen sich die Winkel zueinander in Bezug setzen und man bekommt aus:



**Abbildung 2.3.22:** Strahlengang in einem Dispersionsprisma.

$$(90^\circ - \Theta_{t1}) + (90^\circ - \Theta_{i2}) + \alpha = 180^\circ \quad (2.3.72)$$

schließlich:

$$\alpha = \Theta_{t1} + \Theta_{i2} \quad (2.3.73)$$

Dies läßt sich in Gl. 2.3.71 einsetzen und der Winkel  $\delta$  wird:

$$\delta = \Theta_{i1} + \Theta_{t2} - \alpha \quad (2.3.74)$$

Der Winkel  $\Theta_{i1}$  und der Winkel  $\alpha$  seien gegeben. Was für ein Winkel  $\Theta_{t2}$  bzw.  $\delta$  ergibt sich dann? Wir nehmen an, daß das Prisma von Luft umgeben ist ( $n_{Umgebung} = 1$ ) und einen Brechungsindex von  $n$  besitzt. Aus dem Brechungsgesetz bekommen wir dann:

$$\sin \Theta_{i1} = n \sin \Theta_{t1} \quad (2.3.75)$$

$$n \sin \Theta_{i2} = \sin \Theta_{t2} \quad (2.3.76)$$

Mit den Beziehungen der Winkel 2.3.73 untereinander erhält man:

$$n \sin (\alpha - \Theta_{t1}) = \sin \Theta_{t1} \quad (2.3.77)$$

$$n \sin \left( \alpha - \sin^{-1} \left[ \frac{1}{n} \sin \Theta_{i1} \right] \right) = \sin \Theta_{t2} \quad (2.3.78)$$

Dies läßt sich schließlich auflösen zu:

$$\delta = \Theta_{i1} - \alpha + \sin^{-1} \left[ \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_{i1}} - \sin \Theta_{i1} \cos \alpha \right] \quad (2.3.79)$$

Man kann zeigen, daß es eine **minimale Ablenkung**  $\delta_m$  gibt, bei der der Strahl innerhalb des Prismas parallel zur Grundfläche verläuft. Damit gilt  $\Theta_{i1} = \Theta_{t2}$ . Für diesen Fall kann man den Brechungsindex ermitteln zu:

$$n = \frac{\sin \left[ (\delta_m + \alpha) \frac{1}{2} \right]}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \quad (2.3.80)$$

Dies stellt gleichzeitig eine Methode dar wie man den Brechungsindex eines unbekanntes Materials sehr genau bestimmen kann: man stellt zunächst ein Prisma her und bestimmt dann die geringste Ablenkung  $\delta_m$  bei bekanntem  $\alpha$ .

### Reflexionsprismen

In einem Reflexionsprisma soll ein Strahl umgelenkt werden, ohne daß Dispersion auftritt. Dazu wird ein Lichtstrahl so umgelenkt, daß er an einer Grenzfläche Totalreflexion erleidet bzw. an einer verspiegelten internen Grenzfläche reflektiert wird. Wir betrachten eine Strahlengang, wie er in Abb. 2.3.23 gezeigt ist. Aus der Symmetrie der Abbildung können wir sofort für die Winkel ableiten:

$$\Theta_{t1} = \Theta_{i2} \quad (2.3.81)$$

$$\Theta_{i1} = \Theta_{t2} \quad (2.3.82)$$

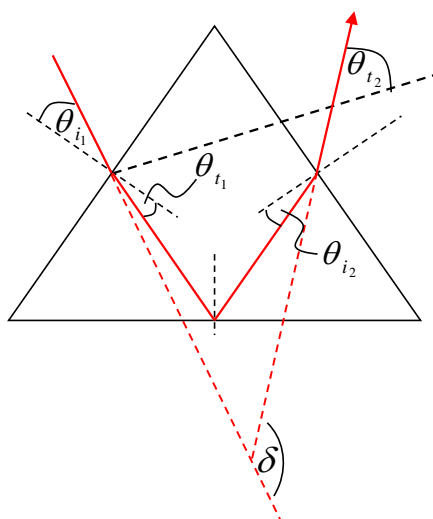
Die Winkelsumme in dem Viereck, das sich durch die Ein- und Austrittspunkte der Lichtstrahlen, die Spitze des Prismas sowie der Schnittpunkte der Verlängerungen der Einfalls- und Ausfallsrichtungen (siehe Abb. 2.3.23) zusammensetzt, ergibt:

$$\alpha + (90^\circ + \Theta_{i1}) + (180^\circ - \delta) + (90^\circ + \Theta_{t2}) = 360^\circ \quad (2.3.83)$$

Daraus folgt für die Strahlablenkung  $\delta$ :

$$\delta = \Theta_{i1} + \Theta_{t2} + \alpha = 2\Theta_{i1} + \alpha \quad (2.3.84)$$

Man erkennt, daß die Ablenkung  $\delta$  *unabhängig* von den Winkeln *innerhalb* des Prismas ist und somit die Reflexion keinerlei Dispersion zeigt. Reflexionsprismen dienen oftmals zur Umlenkung oder Aufrichtung von Bildern bei



**Abbildung 2.3.23:** Strahlengang in einem einfachen Reflexionsprisma.

optischen Instrumenten. Prinzipiell wäre es möglich solche Abbildungen auch mit einer entsprechenden Anordnung ebener Spiegel zu bewerkstelligen. Allerdings ist die Justage solcher Spiegelanordnungen sehr schwierig und deshalb werden hier oftmals Reflexionsprismen verwendet.

### 2.3.6 Optische Instrumente

Optische Instrumente dienen dazu Objekte in der Natur vergrößert bzw. verkleinert darzustellen und abzubilden. Maßstab dafür ist zunächst die natürliche Wahrnehmung, die in unserem Auge stattfindet.

#### Das Auge

Das Auge besteht aus **Hornhaut**, **Linse**, **Glaskörper** und der **Netzhaut** auf der das Bild wahrgenommen wird. Im entspannten Zustand liegt der Brennpunkt auf der Netzhaut und ein Gegenstand im Unendlichen wird scharf abgebildet. Bei Gegenständen, die näher liegen muß die Abbildungseigenschaften physiologisch geändert werden: bei den meisten Säugetieren wird die Krümmung der Linse verändert; bei Fischen ändert sich der Abstand von Linse zu Netzhaut; bei Raubvögeln ändert sich die Krümmung der Hornhaut.

Falls der Brennpunkt im entspannten Zustand des Auges *nicht* auf der Netzhaut liegt, spricht man von **Weitsichtigkeit** oder **Kurzsichtigkeit** (siehe Abb. 2.3.25). Diese Fehlsichtigkeit läßt sich durch eine entsprechende **Bril-**



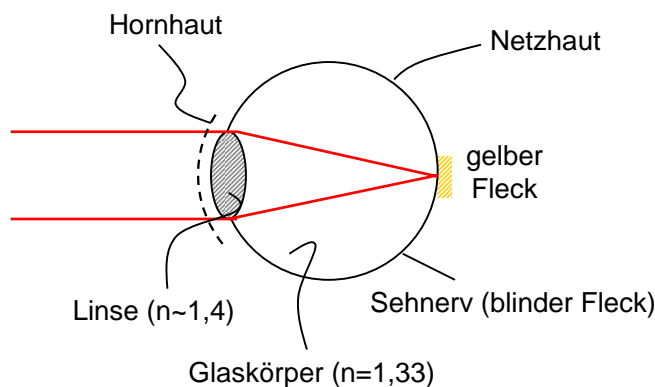


Abbildung 2.3.24: Das Auge.

le korrigieren. Dabei kombiniert man die Brennweite der Augenlinse mit der Brennweite einer Brille:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{\text{Brille}}} + \frac{1}{f_{\text{Auge}}} \quad (2.3.85)$$

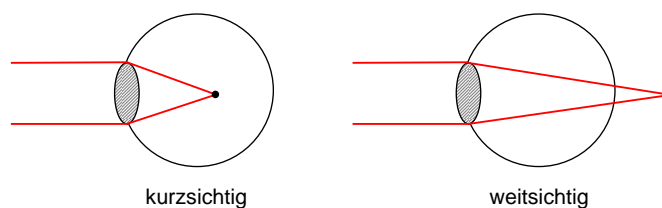
Diese Formel ist nur bei geringem abstand zwischen Brille und Auge zulässig und beschreibt richtigerweise eigentlich Kontaktlinsen.

- **kurzsichtig**

Bei Kurzsichtigkeit liegt der Brennpunkt *vor der Netzhaut*. D.h. die Brennweite der Linse ist zu klein. Das bedeutet, dass der Wert für  $1/f_{\text{Brille}} < 0$  werden muß, damit der Wert für  $f$  größer wird. Damit ist die Brille eine *Zerstreuungslinse*. Kurzsichtige Menschen werden im Alter meist normal sichtig, da mit der Abnahme der Bindegewebespannung auch der Augenmuskel nachlässt und die zu starke Krümmung der Linse im Ruhezustand nicht mehr aufrecht erhalten wird.

- **weitsichtig**

Bei Weitsichtigkeit liegt der Brennpunkt *hinter der Netzhaut*. D.h. die Brennweite der Linse ist zu groß. Das bedeutet, dass der Wert für  $1/f_{\text{Brille}} > 0$  werden muß, damit der korrekte Wert für  $f$  resultiert. Damit ist die Brille eine *Sammellinse*. Viele Menschen werden im Alter weitsichtig, da das Nachlassen der Augenmuskeln den Brennpunkt zu weit nach hinten verlagert.



**Abbildung 2.3.25:** Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit.

Die Brennweiten werden oftmals nicht in Brennweiten direkt gemessen sondern in **Dioptrien**  $D$  angegeben, wobei die Definition gilt:

$$D = \frac{1}{f} \quad (2.3.86)$$

Damit wird Gleichung 2.3.85 zu:

$$D = D_{\text{Auge}} + D_{\text{Brille}} \quad (2.3.87)$$

Die Dioptrien des gesunden menschlichen Auges ist ungefähr  $+58.6$  D, wobei die Hornhaut mit  $43$  D und die Linse mit  $19$  D (von Luft umgeben) beiträgt<sup>20</sup>

Optische Instrumente, die ein Objekt vergrößern, werden mit einem **Vergrößerungsfaktor**  $V$  gekennzeichnet. Dieser Vergrößerungsfaktor vergleicht den Winkel  $\epsilon_0$  unter dem ein Objekt *ohne* optisches Instrument erscheint mit dem Winkel  $\epsilon$  unter dem ein Objekt *mit* dem optischen Instrument erscheint. Unter normalen Bedingungen kann ein Mensch einen Gegenstand bis zu einer **Sehweite**  $s_0$  von  $25$  cm scharf stellen. Fall der Gegenstand eine Ausdehnung von  $y$  besitzt, ist der Öffnungswinkel:

$$\epsilon_0 = \frac{y}{s_0} \quad (2.3.88)$$

Die Vergrößerung  $V$  ist dann als das Verhältnis der Öffnungswinkel definiert:

<sup>20</sup>Man sieht, daß die Summe der Dioptrien von Linse und Hornhaut in diesem Fall nicht  $58$  ergibt, da die Ableitungen oben von der Annahme ausgegangen sind, daß die optischen Elemente von beiden Seiten von Luft begrenzt sind. Dies ist beim Auge nicht der Fall, da die Linse von einer Seite durch den Glaskörper begrenzt wird. Berechnet man die Dioptrien der Linse für den Fall unterschiedlicher Medien auf beiden Seiten der Linse, so erhält man in der Summe tatsächlich  $58$  Dioptrien.

$$\boxed{V = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad (2.3.89)$$

Den genauen Wert der Vergrößerung für einige Instrumente wollen wir uns im folgenden anschauen.

### Die Lupe

Das einfachste optische Instrument ist die Lupe. Der Gegenstand ist in der Regel zwischen Linse und Brennpunkt platziert. Es entsteht ein virtuelles Bild des Objektes im Abstand  $L$ . Damit werden die Winkel unter dem das Bild erscheint zu:

$$\epsilon_0 = \frac{y}{s_0} \quad (2.3.90)$$

$$\epsilon_0 = \frac{y'}{L} \quad (2.3.91)$$

Was eine Vergrößerung bedingt von:

$$V = \frac{y' s_0}{y L} \quad (2.3.92)$$

Für das Verhältnis der Größen des Objektes  $y$  und Bildes  $y'$  bemühen wir den Strahlensatz und bekommen:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \quad (2.3.93)$$

Mit dem Ausdruck

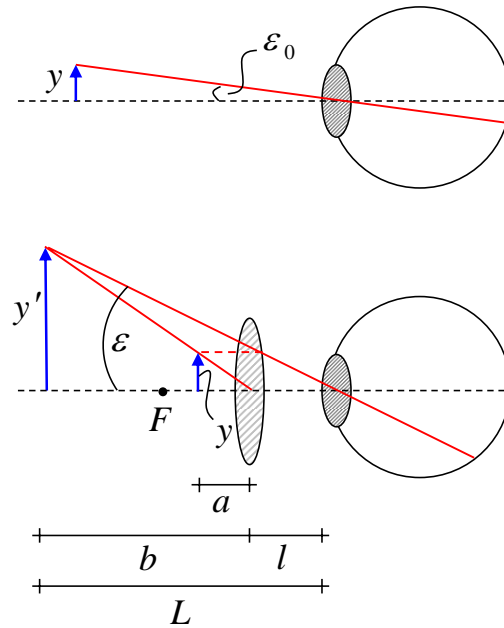
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2.3.94)$$

bekommen wir für die Vergrößerung schließlich:

$$V = \left(1 - \frac{b}{f}\right) \frac{s_0}{L} \quad (2.3.95)$$

Die Lupe befinde sich in einem Abstand  $l$  vom Auge. Die Bildweite ist formal negativ  $b = -(L - l)$ , da sie sich links von der Linse befindet. Mit  $f = \frac{1}{D}$  ergibt sich:

$$V = \frac{s_0}{L} [1 + D(L - l)] \quad (2.3.96)$$



**Abbildung 2.3.26:** Erzeugung eines virtuellen Bildes  $y'$  bei der Betrachtung eines Objektes der Ausdehnung  $y$  durch eine Lupe.

Falls wir das Objekt genau im Brennpunkt platzieren  $a = f$  wird  $L \rightarrow \infty$ , d.h. das virtuelle Bild entsteht im Unendlichen und in das Auge fallen parallele Strahlen ein. Damit kann das Auge entspannt das Bild wahrnehmen und dieser Abstand wird als angenehm empfunden. Für diesen Fall ist das Verhältnis der Vergrößerung:

$$\boxed{V_{Lupe} = s_0 D} \quad (2.3.97)$$

### Das Mikroskop

Bei einer Lupe ist somit die Vergrößerung, unter der das Bild als angenehm wahrgenommen wird festgelegt durch die möglichen Brennweiten, die realisierbar ist. Je größer die Dioptrien bzw. kleiner die Brennweiten sind, desto größer wird das Bild dargestellt. Allerdings wird der Krümmungsradius sehr groß, so daß der Brennpunkt schon innerhalb der Linse liegen müsste, was die Möglichkeiten einer Lupe stark begrenzt. Aus diesem Grund verwendet man für größere Vergrößerungen ein **Mikroskop**, das aus einer Kombination von zwei Linsen besteht, dem **Objektiv** und dem **Okular**. Das Objektiv erzeugt zunächst ein vergrößertes Zwischenbild, das dann mit dem Okular ähnlich

einer Lupe beobachtet wird. Dazu betrachten wir den Strahlengang, wie er in Ab. 2.3.19 illustriert ist. Die Abbildung durch die erste Linse ist:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (2.3.98)$$

Die Öffnungswinkel für das Objekt ohne optisches Instrument und mit optischem Instrument sind:

$$\epsilon = \frac{y'}{f_2} \quad (2.3.99)$$

$$\epsilon_0 = \frac{y}{s_0} \quad (2.3.100)$$

mit

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \quad (2.3.101)$$

Für die Ableitung der Vergrößerung wollen wir die Vorzeichen nicht betrachten und leiten als Öffnungswinkel ab:

$$\epsilon = \frac{yb}{af_2} \quad (2.3.102)$$

Die Vergrößerung beim Mikroskop wird somit:

$$V_{Mikroskop} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{bs_0}{af_2} \quad (2.3.103)$$

Wenn wir das Objekt, wie bei der Lupe, wieder in die Nähe des Brennpunktes des Objektiv setzen und das Zwischenbild in den Brennpunkt der zweiten Linse, bekommen wir mit  $a \simeq f_1$  und  $d = b + f_2$  parallele Strahlen, die in das Auge des Betrachters eintreten.

$$V_{Mikroskop} = \frac{(d - f_2) s_0}{f_1 f_2} \quad (2.3.104)$$

## Das Fernrohr

Bei einem Mikroskop ist der Abstand des Objektes vom Objektiv sehr klein und eine starke Vergrößerung wird angestrebt. Bei einem Fernrohr stellt sich die entgegen gesetzte Fragestellung, da das Objekt sich im Unendlichen befindet: ein Fernrohr oder Teleskop soll einen parallelen Lichtstrahl abbilden. Dazu verwendet man zwei Linsen deren Brennpunkte *zusammenfallen*. Für diese Anordnung existieren im wesentlichen zwei Typen:

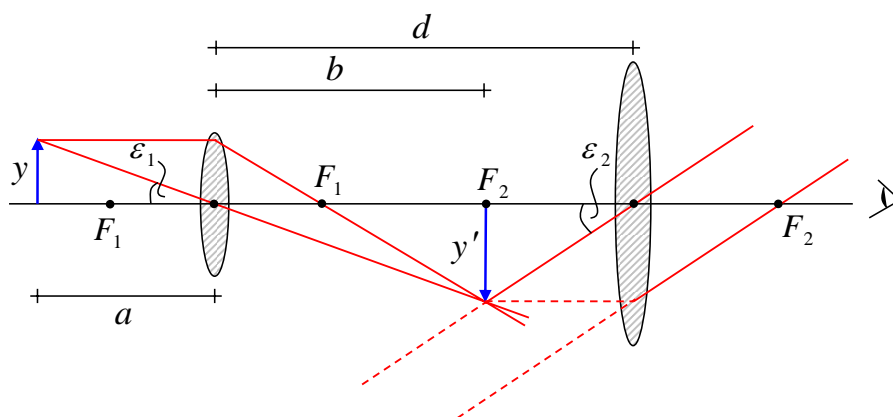
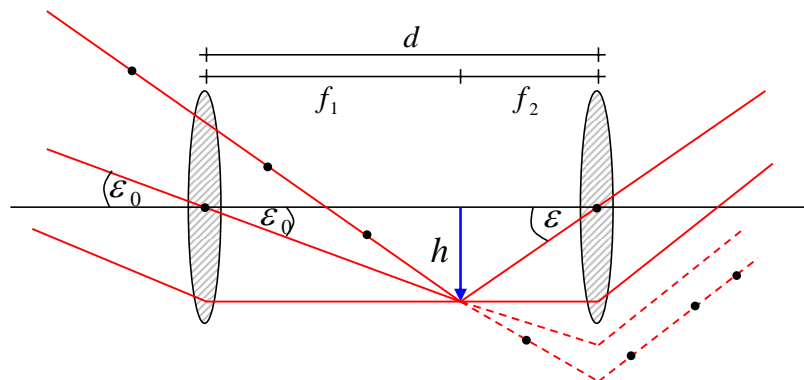


Abbildung 2.3.27: Das Mikroskop.

- Astronomisches Fernrohr, Kepler

Bei einem astronomischen Fernrohr gilt für den Abstand der beiden Linsen (siehe Abb. 2.3.28):

$$d = f_1 + f_2 \quad (2.3.105)$$



**Abbildung 2.3.28:** Das astronomische Fernrohr (Kepler). Die Punkte auf einem Strahl des Strahlengangs illustrieren, daß sich die Orientierung des Bildes umdreht.

Die Größe des Zwischenbildes  $h$  läßt sich mit den beiden Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  verknüpfen wie:

$$\epsilon_0 = \frac{h}{f_1} \quad (2.3.106)$$

$$\epsilon = \frac{h}{f_2} \quad (2.3.107)$$

Man erkennt eine Vergrößerung der Form:

$$V_{\text{Fernrohr}} = \frac{f_1}{f_2} \quad (2.3.108)$$

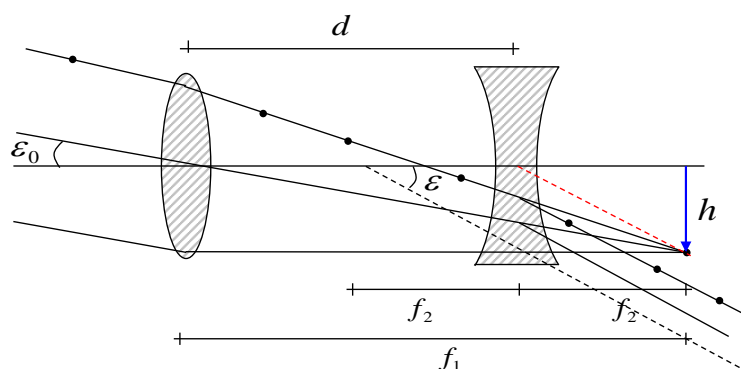
Das entstandene Bild steht allerdings auf dem Kopf, was allerdings für die astronomische Beobachtung kein Nachteil ist.

- **Terrestrisches Fernrohr, Galileo**

Bei einem terrestrischen Fernrohr gilt für den Abstand der beiden Linsen:

$$d = f_1 - f_2 \quad (2.3.109)$$

wobei die zweite Linse eine Zerstreuungslinse ist. Die Vergrößerung ist identisch zu dem des astronomischen Fernrohrs allerdings ist das Bild diesmal aufrecht, wie in Abb. 2.3.29 illustriert ist.



**Abbildung 2.3.29:** Das terrestrische Fernrohr (Galileo). Die Punkte auf einem Strahl des Strahlengangs illustrieren, daß das Bild aufrecht bleibt.

## Die Kamera

Eine Kamera ist eine der häufigsten optischen Instrumente des täglichen Lebens. Das Objektiv einer Kamera ist in der Regel durch seine **Brennweite** und seine sogenannte **Lichtstärke** charakterisiert. Die Lichtstärke ist über den Raumwinkel definiert, den das Objektiv von den Strahlen abbildet, die vom Objekt ausgehen. Dazu betrachten wir per Definition die Oberfläche einer Kugel mit Radius Brennweite. Ein Objektiv mit einem Durchmesser  $D$  deckt davon nur einen Teil ab. D.h. der Raumwinkel, den das Objektiv erfasst ist:

$$\Omega = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{4\pi f^2} = \frac{1}{16} \left(\frac{D}{f}\right)^2 \quad (2.3.110)$$

Die Größe  $\frac{D}{f}$  bezeichnet man dann als **Lichtstärke** zum Beispiel 1:1.3. Je größer die Lichtstärke ist desto mehr Licht wird eingefangen und eine entsprechende Kamera kann auch bei schlechten Lichtverhältnissen eingesetzt werden.

Die Abbildung eines Objektes mit einer Kamera wird zudem noch durch die sog. **Schärfentiefe** charakterisiert, die sich durch eine Begrenzung des Strahlengangs mittels einer Blende beeinflussen läßt. Betrachten wir dazu Abb. 2.3.30: mit einer Linse (od. Objektiv) mit Durchmesser  $a$  wird zunächst genau *eine* Entfernung des Objektes zur Kamera scharf abgebildet. Punkte, die dahinter oder davor liegen werden auf Punkte vor bzw. hinter der Bildebene scharf gestellt. Die Beurteilung der Schärfe hängt allerdings von der maximal möglichen Auflösung des Films ab: Objekte können zwar formal unscharf sein, wenn diese Unschärfe jedoch nicht größer als die Korngröße in der Filmemulsion ist (oder die Rezeptorgröße im menschlichen Auge), wird das Bild nicht als unscharf *wahrgenommen*.

Wenn wir als Maß für die Schärfe einer Abbildung die maximale Ausdehnung in der Bildebene als  $\Delta z$  bezeichnen, so können wir gemäß Abb. 2.3.30 Strahlen konstruieren, die innerhalb von  $\Delta z$  die Bildebene treffen, aber aus einem *Entfernungsbereich*  $\Delta x$  vom Objekt stammen. Dieser Bereich  $\Delta x$  ist die **Schärfentiefe**. Der Bereich  $\Delta x$  wird kleiner mit größerer Ausdehnung  $a$  der Linse. Durch die Begrenzung des Strahlengangs durch eine Blende kann die Schärfentiefe der Abbildung erhöht werden. Diese Blenden (3.4, 8, 11, 16, 22 ...) werden immer analog zu der Lichtstärke angegeben:

$$\text{Blende} = \frac{f}{D} \quad (2.3.111)$$



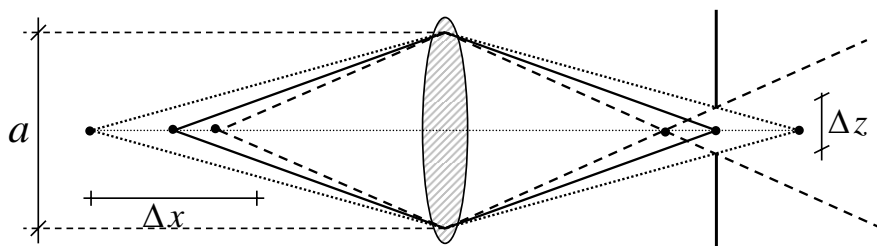


Abbildung 2.3.30: Die Schärfentiefe.

## 2.4 Wellenoptik

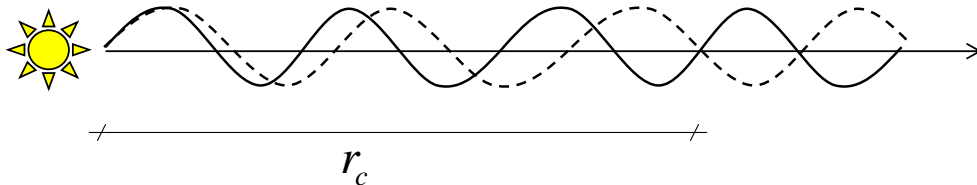
Die Wellenoptik beschreibt Phänomene, die von der geometrischen Optik auf Grund der geltenden Axiome explizit nicht berücksichtigt wurden. Dies sind **Interferenz** und **Beugung**, die sich durch die Überlagerung von Kugelwellen nach dem Huygens'schen Prinzip ableiten lassen.

### 2.4.1 Kohärenz

Interferenz kann nur auftreten, wenn elektromagnetische Wellen in Raum und Zeit eine *eindeutige* Phase zueinander besitzen. Betrachten wir dazu die Superposition von ebenen Wellen (Index  $m$ ), die durch ein Phase  $\varphi_m$  gegeneinander verschoben sind:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{A}_i(\vec{r}, t) e^{i\varphi_m} \quad (2.4.1)$$

Ein Beispiel sei die Linienstrahlung von Atomen. Diese erfolgt nicht bei einer beliebig scharfen Frequenz, sondern nur innerhalb einer bestimmten Frequenzbreite  $\Delta\omega$ . In einem einfachen Ansatz betrachten wir zwei Anteile dieser Emission bei  $\omega + \frac{\Delta\omega}{2}$  und  $\omega - \frac{\Delta\omega}{2}$ :



**Abbildung 2.4.1:** Eine Lichtquelle, die Licht unterschiedlicher Frequenz aussendet, erzeugt eine eindeutige Phasenbeziehung zwischen zwei Orten im Abstand von höchstens  $r_c$ , der Kohärenzlänge.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = Ae^{i(\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega)t} + Ae^{i(\omega - \frac{1}{2}\Delta\omega)t} \quad (2.4.2)$$

Wenn Licht zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleichzeitig emittiert wird, ändert sich die Phasenverschiebung zwischen beiden Wellen in einem Zeitraum  $t$  zu:

$$\Delta\varphi = \Delta\omega t \quad (2.4.3)$$

Falls sich die Phasen um  $2\pi$  verschoben haben, so läßt sich die ursprüngliche Phasenlage bei der Emission der einzelnen Wellen nicht mehr eindeutig bestimmen. Bei dieser Grenzbedingung ist:

$$\Delta\varphi = 2\pi = \Delta\omega t_c = 2\pi\Delta f t_c \quad (2.4.4)$$

Die Zeitspanne, in der die Phasen um  $2\pi$  auseinander laufen, bezeichnet man als **Kohärenzzeit**, die als

$$t_c = \frac{1}{\Delta f} \quad (2.4.5)$$

gegeben ist. Man spricht auch von **zeitlicher Kohärenz**.

Diese Zeitspanne läßt sich auch direkt aus der Atomphysik ableiten. Die Lebensdauer  $\Delta t$  eines angeregten Zustands eines Atoms ist nach der Heisenberg'schen Unschärferelation mit der Energieunschärfe  $\Delta E$  des angeregten Zustandes verknüpft:

$$\Delta E \Delta t \geq h \quad (2.4.6)$$

mit  $h$  dem **Planck'schen Wirkungsquantum**. Mit  $\Delta E = \hbar\Delta\omega$  folgt daraus wieder wegen  $\hbar = h/(2\pi)$ :

$$\Delta\omega \Delta t \geq 2\pi \quad (2.4.7)$$

Typische Lebensdauern  $\Delta t$  sind  $10^{-8}$  s.

Neben einem zeitlichen Auseinanderlaufen der Phase, können wir auch einen räumlichen Bezug herstellen. Die Phase zwischen zwei Orten  $r_1$  und  $r_2$  zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$  ist:

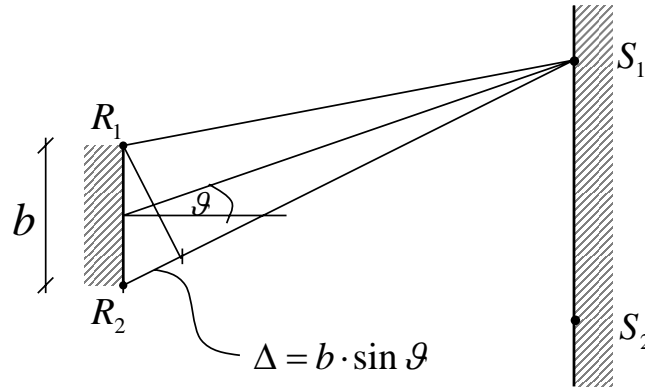
$$\Delta\varphi = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = 2\pi \quad (2.4.8)$$

Wenn dieser Phasenunterschied genau  $2\pi$  beträgt, so bezeichnet man  $r_2 - r_1$  als sog. **Kohärenzlänge**. Dies entspricht derjenigen Strecke, die das Licht in der Kohärenzzeit zurücklegt. Mit einer Kohärenzzeit von  $10^{-8}$  s und der Lichtgeschwindigkeit bekommt man zum Beispiel eine Kohärenzlänge im Bereich weniger Meter.

$$r_c = ct_c = c \frac{1}{\Delta f} \quad (2.4.9)$$

Interferenzeffekte werden erst dann sichtbar, wenn die Phase zwischen einzelnen Wellenzügen, die überlagert werden, eindeutig ist. Man bezeichnet das Licht dann als **kohärent**.

Wie läßt sich jetzt eine kohärente Lichtquelle realisieren? Hierzu gibt es zwei Ansätze:



**Abbildung 2.4.2:** Räumliche Kohärenz. Von einer Lichtquelle der Ausdehnung  $b$  gehen Lichtstrahlen aus und sollen auf einem Schirm an den Punkten  $S_1$  und  $S_2$  kohärent sein (Beispiel zwei Spalte). Dazu darf die räumliche Ausdehnung der Quelle nicht zu groß sein.

#### • Kohärentes weißes Licht

Für die Erzeugung von kohärentem Licht durch eine normale Lichtquelle bei der angeregte Atome via *spontaner Emission* Licht aussenden, spielt die räumliche Ausdehnung einer Quelle eine entscheidende Rolle. Betrachten wir dazu eine Quelle der Ausdehnung  $b$  von der Wellen ausgehen und die dann auf ein ausgedehntes Objekt treffen und dort interferieren (Beispiel Doppelspalt, siehe unten). Dies ist nur möglich, wenn die Kohärenz der Wellen nach der Emission in einem möglichst großen Raumbereich erhalten bleibt. Dazu fordern wir, daß der Wegunterschied zwischen zwei Wellen, die von unterschiedlichen Orten  $R_1$  und  $R_2$  auf der Quelle emittiert werden kleiner als  $\lambda/2$  ist (siehe Abb. 2.4.2). Diese Bedingung läßt sich auf einen Winkel  $\vartheta$  zur Normalen umrechnen für den gelten muß:

$$b \sin \vartheta \ll \frac{\lambda}{2} \quad (2.4.10)$$

D.h. damit der Winkel möglichst groß wird und damit ein *großer* Raumbereich mit kohärentem Licht erfüllt werden kann, muß die Ausdehnung  $b$  der Quelle sehr klein sein! Dies schränkt die Anwendbarkeit von herkömmlichen Lichtquellen zur Erzeugung von kohärentem Licht stark ein, da die räumliche Eingrenzung die Lichtintensität reduziert.

- **Kohärentes Laserlicht**

Heutzutage wird Licht großer Kohärenzlängen und -zeiten mit Hilfe von **Lasern** hergestellt. Hierbei wird die Lichtemission durch *stimulierte Emission* getragen, bei der ein angeregtes Atom durch die Wechselwirkung mit einem Lichtteilchen ein zweites Lichtteilchen erzeugt, das *dieselbe Richtung* aber auch *dieselbe Phase* wie das erste Lichtteilchen besitzt<sup>21</sup>. Durch die stimulierte Emission können Kohärenzlängen von Kilometern realisiert werden.

## 2.4.2 Interferenz

Im folgenden wollen wir Interferenz betrachten. Die Phasenlage von zwei Wellenzügen untereinander legt fest ob Wellen sich addieren oder gegenseitig auslöschen. Man spricht von **konstruktiver** bzw. **destruktiver Interferenz**.

### Interferenz am Doppelspalt

Interferenz läßt sich eindrucksvoll an dem **Doppelspaltversuch** verdeutlichen. Hierbei betrachten wir eine kohärente Lichtquelle von der Licht auf zwei Spalte  $S_1$  und  $S_2$  (im Abstand  $d$  zueinander) fällt (siehe Abb. 2.4.3). Dahinter befindet sich ein Schirm. Nachdem die Kohärenzlänge größer als der Aufbau ist, müssen wir das Bild auf dem Schirm durch die Überlagerung der Wellen erzeugen. Das von den Spalten ausgehende Licht legt einen Weg  $r_{S_1}$  und  $r_{S_2}$  zurück. Falls der Abstand des Doppelspaltes vom Schirm sehr viel größer als der Abstand der Spalte untereinander ist ( $d \ll l$ , siehe Abb. 2.4.3), können wir den Gangunterschied beider Lichtstrahlen einfach aus der Grafik ablesen. Wir bekommen immer konstruktive Interferenz wenn gilt:

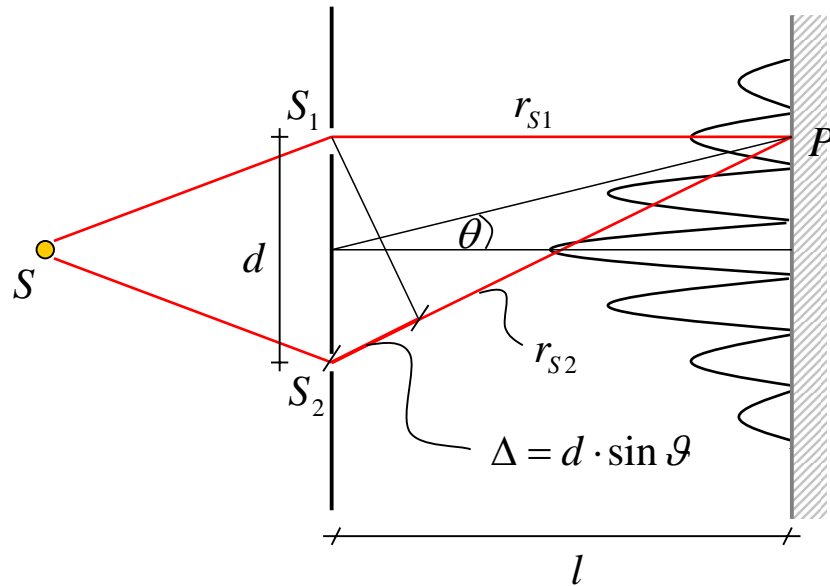
$$d \sin \Theta_m = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.11)$$

bzw. destruktive Interferenz, wenn gilt:

$$d \sin \Theta_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.12)$$

Wie ist die räumliche Verteilung der Intensität auf dem Schirm? Betrachten wir dazu die beiden Wege  $r_{S_1}$  und  $r_{S_2}$ . Die Wellen treffen zunächst von der Quelle ausgehend mit gleicher Phase auf beide Spalte. Von dort ausgehend, erreichen sie den Schirm an einem Punkt  $P$ , der unter einem Winkel

<sup>21</sup>Mehr zu diesem Thema im Skript "Physik III".



**Abbildung 2.4.3:** Interferenz zwischen zwei Strahlen im Doppelspaltversuch.

$\Theta$  zur Normalen orientiert sei. Die Feldstärken sind mit den entsprechenden Wegen gegeben als.

$$E_{S1} = A_0 \sin(kr_{S1} - \omega t) \quad (2.4.13)$$

$$E_{S2} = A_0 \sin(kr_{S2} - \omega t) \quad (2.4.14)$$

Der Unterschied der beiden Wege  $r_{S1}$  und  $r_{S2}$  erzeugt eine Phasenverschiebung zwischen beiden Wellen. Für den Fall  $l \gg d$  können wir diese Phasenverschiebung ausrechnen zu:

$$\varphi = k|r_{S1} - r_{S2}| \simeq \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \quad (2.4.15)$$

Damit bekommen wir mit  $r_{S1} = r$  die Addition der Amplituden:

$$E_P = E_{S1} + E_{S2} = A_0 \sin(kr - \omega t) + A_0 \sin(kr - \omega t + \varphi) \quad (2.4.16)$$

$$= 2A_0 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left( kr - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.4.17)$$

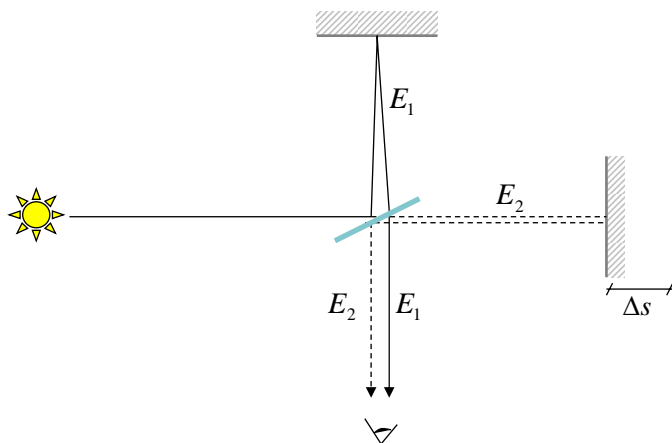
Wir berechnen die zeitlich gemittelte Intensität  $\bar{I}$  mit  $\langle \sin^2 t \rangle_t = \frac{1}{2}$  und  $I_0 = \frac{1}{2} A_0^2$ :

$$\bar{I} = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (2.4.18)$$

Setzt man für  $\varphi$  den Ausdruck 2.4.15 ein, so erkennt man ein Interferenzmuster auf dem Schirm mit einem Maximum für  $\Theta = 0$ , wie in Abb. 2.4.3 illustriert ist.

### Michelson-Interferometer

Eine prominente Anwendung der Interferenz ist das **Michelson-Interferometer**. Hierbei wird das Licht einer Quelle durch einen Strahlteiler auf zwei Wege  $E_1$  und  $E_2$  aufgespalten, an Spiegeln reflektiert und mit demselben Strahlteiler wieder zusammengeführt und auf einem Detektor abgebildet (siehe Abb. 2.4.4).



**Abbildung 2.4.4:** Michelson-Interferometer: über einen halbdurchlässigen Spiegel wird das Licht auf zwei Interferometerarme aufgeteilt, zurück geworfen und mit einem Detektor gemessen. Verschiebt man einen Spiegel um eine Strecke  $\Delta s$ , so beobachtet man Minima und Maxima auf einem Detektor.

Die Amplituden des einfallenden Lichtes  $E_e$  und der Anteile  $E_1$  und  $E_2$ , die die jeweiligen Strahlengänge durchlaufen (bei der jeder Strahl einmal von dem Strahlteiler reflektiert und einmal transmittiert wurde) ergeben:

$$E_e = A_e \cos(\omega t - kz) \quad (2.4.19)$$

$$E_1 = \sqrt{R}\sqrt{T}A_e \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (2.4.20)$$

$$E_2 = \sqrt{T}\sqrt{R}A_e \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2.4.21)$$

mit  $T$  und  $R$  der Transmission bzw. Reflexion des Strahlteilers.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind die jeweiligen Phasenlagen. Auf dem Detektor wird die Intensität gemessen als Quadrat der Summe der beiden Feldstärken und man bekommt:

$$I = \epsilon_0 c (E_1 + E_2)^2 = c \epsilon_0 R T A_e^2 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)]^2 \quad (2.4.22)$$

Im zeitlichen Mittel entsteht die Intensität der Form:

$$\bar{I} = I_0 R T [1 + \cos \Delta\varphi] \quad (2.4.23)$$

Man erkennt, daß diese Intensität von dem Unterschied der Phasen  $\Delta\varphi$  abhängt:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k\Delta s \quad (2.4.24)$$

Bringt man jetzt einen Gegenstand in einen der beiden Interferometerarme, so ändert sich die Phasenverschiebung und das Signal auf dem Detektor ändert sich.

Michelson-Interferometer finden heute eine große Anwendung als sog. **Fourier-Transformations-Spektrometer**. Dies soll zunächst an dem einfachen Fall diskutiert werden, bei dem die Quelle eine einzige Wellenlänge bzw. Frequenz  $\omega_0$  emittiert. In dem Michelson-Interferometer wird ein Spiegel mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so daß die Phase  $\Delta\varphi = k\Delta s = kvt$  zeitabhängig wird. Demzufolge beobachtet man eine zeitliche Änderung der Intensität auf dem Detektor:

$$\bar{I}(t) = I_0 R T [1 + \cos(kvt)] \quad (2.4.25)$$

Mit  $ck = \omega_0$  ergibt sich:

$$\bar{I}(t) = I_0 R T \left[ 1 + \cos\left(\omega_0 \frac{v}{c} t\right) \right] \quad (2.4.26)$$

Die Fourier-Transformation dieses Signals liefert jetzt die Frequenz des einfallenden Lichtes  $\omega_0$  sowie dessen Intensität zurück. Der Faktor  $v/c$  transformiert die hohe Frequenz  $\omega_0$  in eine niedrige herunter, die von herkömmlicher Messelektronik erfasst werden kann. Dieses Verfahren läßt sich auch auf eine Quelle anwenden, die viele Frequenzen gleichzeitig emittiert (weißes Licht). Die Fourier-Transformation des erhaltenen Interferogramms beinhaltet jetzt die Intensitäten bei allen Frequenzen. Bringt man eine Probe in den Strahlengang beobachtet man eine Dämpfung genau bei denjenigen Frequenzen, bei denen die Bestandteile der Probe (Schwingungsanregung von Molekülbindungen) die Strahlung der Quelle absorbieren.



### Mach-Zehnder Interferometer

In ähnlicher Weise wird eine Zweistrahlinterferenz beim **Mach-Zehnder-Interferometer** genutzt. Hierbei wird ein Strahl auf zwei Wege aufgespalten und wieder zusammengeführt. Auch hier wird in einem Strahlengang ein Objekt der Länge  $L$  eingefügt und verursacht eine entsprechende Phasenverschiebung.

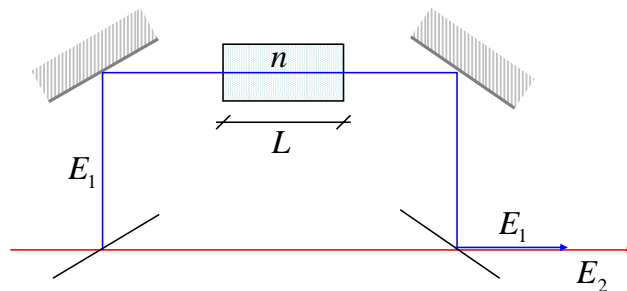


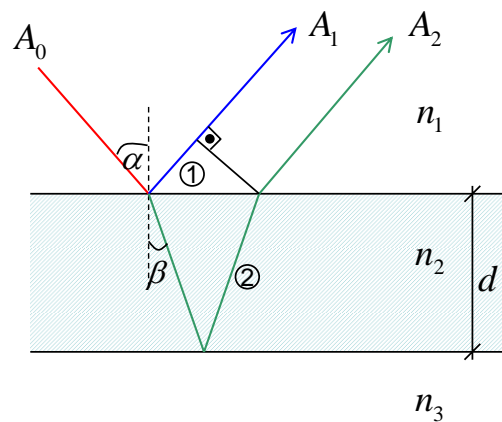
Abbildung 2.4.5: Mach-Zehnder-Interferometer.

$$\Delta\varphi = k\Delta nL \quad (2.4.27)$$

Damit eine Änderung der Intensität sichtbar wird, muß der Brechungsindex des Objektes sich kontinuierlich um einen Betrag  $\Delta n$  ändern. Ein Beispiel ist die Vermessung des Brechungsindex eines variablen Systems (Beispiel Plasma).

### Interferenz dünner Schichten

Bislang haben wir die Überlagerung von zwei einzelnen Lichtstrahlen betrachtet. Allerdings existieren zahlreiche Systeme bei denen die Überlagerung einer Vielzahl von Lichtstrahlen die beobachtbaren Effekte erklärt, die **Vielstrahlinterferenz**. Bekanntestes Beispiel ist die Interferenz dünner Schichten. Betrachten wir dazu eine dünne Schicht der Dicke  $d$ , die sehr viel dünner als die Kohärenzlänge sei. Diese Schicht besitze einen Brechungsindex  $n_2$  und ist auf der einen Seite durch ein Medium mit Brechungsindex  $n_1$  und auf der anderen Seite durch ein Medium mit Brechungsindex  $n_3$  begrenzt. Im folgenden wollen wir nur die Reflexion betrachten. Betrachten wir zunächst zwei Wellenzüge, die im reflektierten Licht die Amplitude  $A_1$  und  $A_2$  besitzen, wie in Abb. 2.4.6 angedeutet. Wie ist die Phasenverschiebung zwischen diesen beiden? Dazu betrachten wir die beiden optischen Wege:



**Abbildung 2.4.6:** Interferenz zwischen zwei Strahlen die einmal an der Oberseite der Schicht reflektiert werden ( $A_1$ ) und einmal an der Rückseite der Schicht reflektiert werden ( $A_2$ ).

- **Weg in der Schicht**

Der Weg durch die Schicht und zurück zur Oberseite läßt sich aus dem Winkel  $\beta$  und der Dicke  $d$  der Schicht berechnen zu:

$$\text{Weg}_2 = 2d \frac{1}{\cos \beta} \quad (2.4.28)$$

- **Weg des reflektierten Strahls**

Der Weg des an der Oberfläche reflektierten Strahls  $A_1$ , bis er auf gleicher Höhe wie Strahl  $A_2$  liegt ist:

$$\begin{aligned} \text{Weg}_1 &= \sin \beta \text{Weg}_2 \cos(90^\circ - \alpha) \\ &= \sin \beta \frac{2d}{\cos \beta} \sin \alpha \\ &= \sin \beta \frac{2d}{\cos \beta} \sin \beta \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Im letzten Schritt haben wir das Snellius'sche Brechungsgesetz ausgenutzt.

Der Unterschied der optischen Wege wird damit:

$$\begin{aligned}
 n_2 \text{Weg}_2 - n_1 \text{Weg}_1 &= \frac{2dn_2}{\cos \beta} - n_1 \sin \beta \frac{2d}{\cos \beta} \sin \beta \frac{n_2}{n_1} \\
 &= \frac{2dn_2}{\cos \beta} - 2n_2 d \sin^2 \beta \frac{1}{\cos \beta} \\
 &= 2n_2 d \cos \beta
 \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Die Phasenverschiebung beziffern wir als  $2\Delta$  und bekommen:

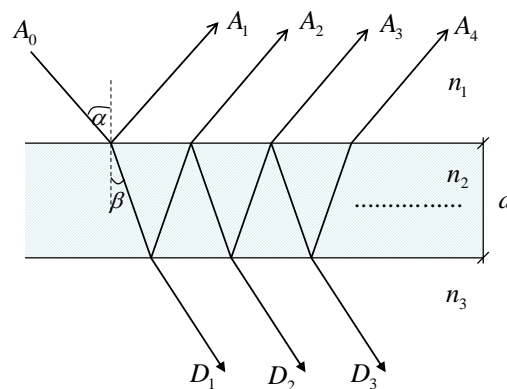
$$2\Delta = 2kn_2 d \cos \beta \tag{2.4.31}$$

Diese Phasenverschiebung kann noch modifiziert werden durch die Phasensprünge  $\phi$  bei der Reflexion an dem jeweiligen dichteren Medium. Dies hängt allerdings von der genauen Beschaffenheit der Brechungsindizes  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  ab:

$$2\Delta = 2kn_2 d \cos \beta + \phi \tag{2.4.32}$$

D.h. wir bekommen einen kompakten Ausdruck für die Phasenverschiebung, der *nur* von den Eigenschaften der Schicht 2 abhängt obwohl Weg 1 im Medium 1 läuft.

Für die korrekte Vielstrahlinterferenz müssen wir allerdings nicht nur zwei Strahlen überlagern, sondern im Prinzip unendlich viele (siehe Abb. 2.4.7). Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind die Fresnelkoeffizienten, wobei die Reihenfolge der Indizes angeben von welcher Seite das Licht auf die Grenzflächen trifft. Die Amplituden der einzelnen Anteile  $A_i$  sind wie folgt:



**Abbildung 2.4.7:** Interferenz eines dünnen Filmes der Dicke  $d$  und dem Brechungsindex  $n_2$ .

$$A_1 = r_{12}A_0 \quad (2.4.33)$$

$$A_2 = t_{12}r_{23}t_{21}A_0e^{-i2\Delta} \quad (2.4.34)$$

$$A_3 = t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}t_{21}A_0e^{-i4\Delta} \quad (2.4.35)$$

$$A_4 = t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{21}A_0e^{-i6\Delta} \quad (2.4.36)$$

$$\dots \quad (2.4.37)$$

Bei jedem weiteren Anteil  $i$  der Reflexion erhöht sich die Phase um  $2\Delta$ . Der integrale Reflexionskoeffizient  $r$  ist:

$$r = \frac{A}{A_0} = r_{12} + t_{12}t_{21}r_{23}e^{-i2\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \underbrace{r_{21}r_{23}e^{-i2\Delta}}_{=q} \right)^n \quad (2.4.38)$$

Man erkennt eine geometrische Reihe mit einem Grenzwert für  $q < 1$  und wir bekommen:

$$r = r_{12} + t_{12}t_{21}r_{23}e^{-i2\Delta} \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (2.4.39)$$

Mit Index  $n \rightarrow \infty$  bekommt man schließlich:

$$r = r_{12} + t_{12}t_{21}r_{23}e^{-i2\Delta} \frac{1}{1 - r_{21}r_{23}e^{-i2\Delta}} \quad (2.4.40)$$

Mit den Beziehungen zwischen den Fresnelkoeffizienten  $r_{12} = -r_{21}$ ,  $r_{12} + t_{12} = 1$  und  $t_{12} = -t_{21}$  vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$r = r_{12} + (1 - r_{12})(1 + r_{12})r_{23}e^{-i2\Delta} \frac{1}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\Delta}} \quad (2.4.41)$$

Damit erhalten wir für den Reflexionskoeffizienten  $r$  eines dünnen Filmes:

$$\boxed{r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-i2\Delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\Delta}}} \quad (2.4.42)$$

Einen analogen Ausdruck kann man für den Transmissionskoeffizienten ableiten zu:

$$\boxed{t = \frac{t_{12}t_{23}e^{-i\Delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\Delta}}} \quad (2.4.43)$$

Im folgenden wollen wir die reflektierte bzw. transmittierte Intensität bestimmen, dazu behandeln wir den vereinfachten Fall für  $n_1 = n_3$ . Damit gilt  $r_{12} = -r_{23} = r$  und der integrale Reflexionskoeffizient wird zu:

$$r_{ges} = \frac{r - r e^{-i2\Delta}}{1 - r^2 e^{-i2\Delta}} \quad (2.4.44)$$

Die Reflexion ist  $R_{ges} = r_{ges} r_{ges}^*$ :

$$\begin{aligned} R_{ges} &= \frac{r^2 (1 - e^{-i2\Delta}) (1 - e^{+i2\Delta})}{(1 - r^2 e^{-i2\Delta}) (1 - r^2 e^{+i2\Delta})} \\ &= R \frac{2 - 2 \cos 2\Delta}{(1 + R^2) - 2R \cos 2\Delta} \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

mit  $R = rr^*$ . Mit  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  ergibt sich:

$$R_{ges} = R \frac{4 \sin^2 \Delta}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \Delta} \quad (2.4.46)$$

Mit der Abkürzung  $F$  der Form:

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad (2.4.47)$$

erhalten wir schließlich die sog. **Airy-Funktionen** für die Reflexion:

$$\boxed{R_{ges} = \frac{F \sin^2 \Delta}{1 + F \sin^2 \Delta}} \quad (2.4.48)$$

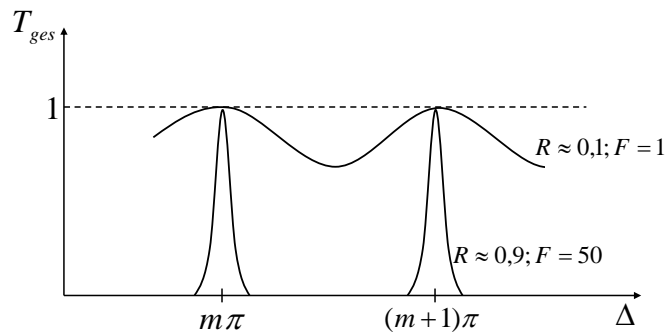
und die Transmission

$$\boxed{T_{ges} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \Delta}} \quad (2.4.49)$$

Man erkennt sofort, daß  $R+T = 1$  gilt. Der Verlauf der Airy-Funktion für Transmission ist in Abb. 2.4.8 gezeigt. Man erkennt, daß für bestimmte Phasen  $\Delta$  die Transmission Maxima besitzt, d.h. die einzelnen Amplituden  $A_n$  überlagern sich konstruktiv. Man erkennt zudem, daß man auf der Basis der Vielstrahlinterferenz einen dünnen Film konstruieren kann der Licht *perfekt* transmittiert, da für bestimmte Phasen  $T = 1$  und  $R = 0$  gilt<sup>22</sup>. Die Maxima der Transmission werden prägnanter, wenn die Reflexion der einzelnen Flächen  $R$  größer wird, was gleichbedeutend mit einem großen Wert für  $F$  ist. Dies läßt sich anschaulich verstehen: je besser die Flächen reflektieren, desto *mehr* Vielfachreflexionen tragen zur Summe bei und die Unterscheidung

<sup>22</sup>Bei einer einfachen Grenzfläche bekommt man immer eine endliche Reflexion und Transmission, da der Unterschied im Brechungsindex an der Grenzfläche immer einen Fresnel-Koeffizienten ungleich Null bedingt!

zwischen konstruktiver und destruktiver Interferenz werden immer schärfer. Wird zum Beispiel bei einer hohen Reflexion  $R$ , die Phase nicht exakt getroffen, so ist die Phasenverschiebung der ersten beiden Strahlen zwar noch klein und es tritt nur schwache destruktive Interferenz auf. Wenn man allerdings zu einer Komponente mit großem  $n$  geht, summieren sich die kleinen Phasenverschiebungen auf (jeweils ein Faktor  $2\Delta$  dazu) und der destruktive Anteil gewinnt.



**Abbildung 2.4.8:** Airy-Funktion beschreibt die Transmission als Funktion der Phasenverschiebung  $\Delta$ .  $R$  gibt die Reflexion der einzelnen Grenzflächen an.

Diesen Zusammenhang wollen wir etwas quantitativer erfassen und bestimmen die Breite des einzelnen Transmissionspeaks als Funktion der Frequenz des Lichtes. Dazu müssen wir die Phase in Frequenzen umrechnen. Die Phasenverschiebung hängt von dem Einfallswinkel und der Wellenlänge bzw. Frequenz des Lichtes ab, gemäß:

$$\Delta = nd \cos \beta k = nd \cos \beta \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4.50)$$

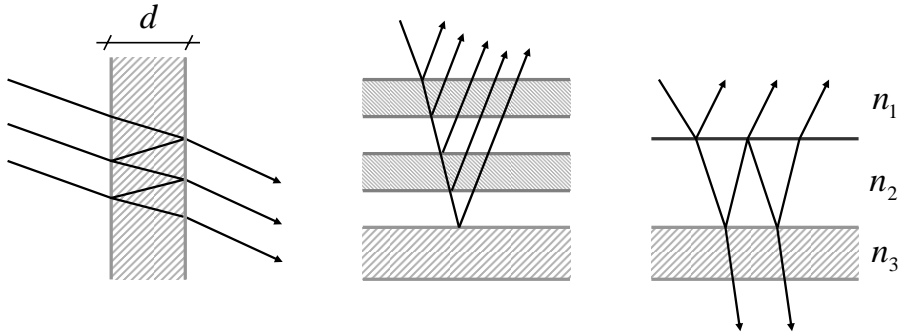
Mit  $ck = \omega$  und senkrechtem Einfall  $\beta = 0^\circ$  ergibt sich:

$$\Delta = nd \frac{\omega}{c} \quad (2.4.51)$$

Die Halbwertsbreite für die Transmission  $T(\omega_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega) = \frac{1}{2}$ , umgerechnet in Frequenzen, läßt sich aus einer Analyse der Airy-Funktionen ableiten und man bekommt:

$$\Delta\omega = \frac{c}{nd} \frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{c}{nd} 2 \frac{1}{\sqrt{F}} \quad (2.4.52)$$

D.h., wenn die Reflexion  $R$  bzw.  $F$  groß wird, wird  $\Delta\omega$  sehr klein. Diese Eigenschaft der Vielstrahlinterferenz wird in zahlreichen Anwendungen ausgenutzt, wie in Abb. 2.4.9 illustriert ist.



**Abbildung 2.4.9:** Fabry-Perot-Interferometer, dielektrischer Spiegel, Antireflexbeschichtung.

- **Fabry-Perot-Interferometer**

Bei einem **Fabry-Perot-Interferometer** (Abb.2.4.9) nutzt man die Trennschärfe  $\Delta\omega$  einer dünnen transparenten Platte der Dicke  $d$  um Wellenlängen zu selektieren. Die Phasenverschiebung ist bei senkrechtem Einfall ( $\cos\beta = 1$ )<sup>23</sup>:

$$2\Delta = k\Delta s = k2nd = \frac{4\pi}{\lambda}nd \quad (2.4.53)$$

Damit bekommen wir die Maxima für  $\Delta s = m\lambda$  mit  $m = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\lambda_{Maxima,m} = \frac{1}{m}2nd \quad (2.4.54)$$

Damit wird  $\Delta = m\pi$ , die Airy-Funktion für die Transmission wird bei  $\lambda_{Maxima,m}$  gleich 1. Über eine Verkippung dieses Filter ändert sich die Länge des optischen Weges und damit die Wellenlänge des transmittierten Lichtes.

- **Antireflexschicht**

Bei einem Fabry-Perot-Filter sollte die Transmission maximiert werden. Etwas ähnliches möchte man auch bei einer **Antireflexschicht**

<sup>23</sup>Bei der Transmission erfolgen alle Reflexionen an optisch dünneren Medien so daß keine Phasensprünge auftreten.

(Abb.2.4.9) erzielen, die die Lichteinkopplung in ein Medium erleichtern soll. Dazu betrachten wir eine Schicht mit einem Brechungsindex  $n_2$  auf einem halbunendlichen Substrat mit Brechungsindex  $n_3$ . Die Umgebung habe Brechungsindex  $n_1$ . Für den Reflexionskoeffizienten eines dünnen Filmes auf einem Substrat hatten wir abgeleitet:

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{-i2\Delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{-i2\Delta}} \quad (2.4.55)$$

Mit  $n_2d = \frac{\lambda}{4}$  wird  $\Delta = \frac{\pi}{2}$  bzw.  $e^{-i2\Delta} = -1$ <sup>24</sup>. Für senkrechten Einfall gilt:

$$r_{12} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad r_{23} = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \quad (2.4.56)$$

mit  $R = rr^*$  ergibt sich für die Reflexion:

$$R = \left( \frac{n_1n_3 - n_2^2}{n_1n_3 + n_2^2} \right)^2 \quad (2.4.57)$$

Die Reflexion wird gleich Null für  $n_1n_3 = n_2^2$ . Falls wir für die Umgebung Luft annehmen ( $n_1 = 1$ ) bekommen wir als Brechungsindex für eine optimale Antireflexschicht:

$$n_2 = \sqrt{n_3} \quad (2.4.58)$$

D.h. der Brechungsindex einer Antireflexschicht muß der Quadratwurzel des Brechungsindex der Unterlage entsprechen. Dann wird das Reflexionsvermögen Null und die Transmission gleich eins.

### • Dielektrische Spiegel

Neben der Transmission lassen sich allerdings bei entsprechender Wahl der Phasenverschiebung auch die Reflexionseigenschaften maximieren. Im Unterschied zur Airy-Funktion für die Transmission gelingt es allerdings nicht das Reflexionsvermögen einer einzelnen Schicht genau 1 werden zu lassen. Aus diesem Grund kombiniert man ganze Schichtstapel, um das Reflexionsvermögen im Limes 1 werden zu lassen, die sog. **dielektrischen Spiegel**.

<sup>24</sup>Bei der Reflexion erfolgt die Reflexion an der oberen wie an der unteren Grenzfläche an einem Medium größerer Dichte was jeweils zu einem Phasensprung von  $\pi$  führt. Beim Vergleich der beiden Strahlen hebt sich dieser Unterschied allerdings wieder auf.



Eine Anwendung dieser dielektrischen Spiegel sind zum Beispiel die Spiegel für die XUV Lithographie in der Halbleitertechnologie. Hierbei wird Licht der Wellenlänge von 13.5 nm durch entsprechende Masken abgebildet. Nachdem für diese Wellenlänge keine transparente Materialien mehr existieren muß man auf Spiegeloptiken zurückgreifen. Diese dielektrischen Spiegel bestehen aus mehreren Doppelschichten und erreichen immerhin eine Reflexion von ca. 70%.

- **Newton'sche Ringe**

Legt man eine gekrümmte Scheibe auf eine spiegelnde Unterlage beobachtet man Interferenzringe (Beispiel Dia zwischen Glasscheiben). Diese Ringe entstehen durch die Interferenz bei der Reflexion an den unterschiedlichen Grenzflächen. Die Phasenverschiebung  $\Delta$  setzt sich aus dem optischen Weg  $2s$  und dem Phasensprung  $\pi$  bei der Reflexion an der unteren Grenzfläche zusammen (siehe Abb. 2.4.10):

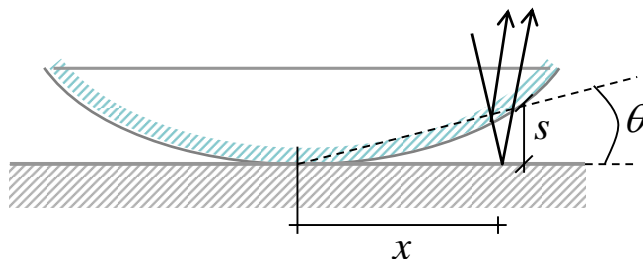
$$\Delta = k2s + \pi \quad (2.4.59)$$

Für das Auftreten von konstruktiver Interferenz muß der Phasenunterschied ein Vielfaches von  $2\pi$  sein:

$$k2s + \pi = m2\pi \quad (2.4.60)$$

Der Winkel zwischen gekrümmter Scheibe und Unterlage sei  $\Theta$  und man bekommt gemäß Abb. 2.4.10:

$$\Theta = \frac{s}{x} \quad (2.4.61)$$



**Abbildung 2.4.10:** Newton'sche Ringe.

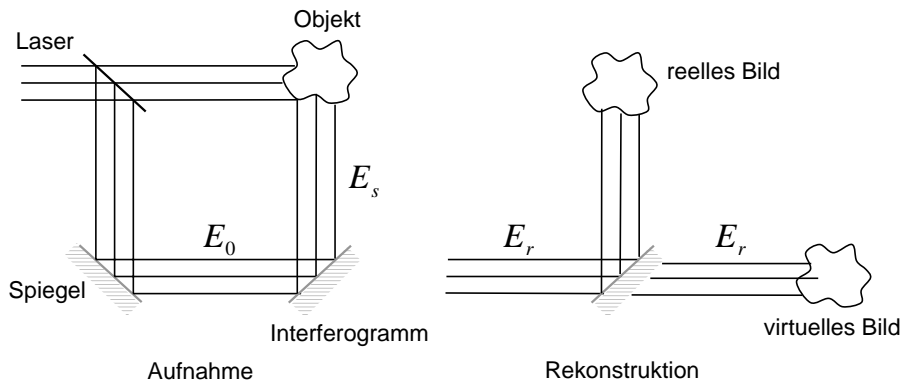
Verknüpft man diese Gleichungen so erkennt man, daß Ringe konstruktiver Interferenz mit Radius  $x$  entstehen, wenn für  $x_m$  gilt:

$$x_m = \frac{1}{2\Theta} \left( m - \frac{1}{2} \right) \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.62)$$

Nachdem der Winkel  $\Theta$  in der Mitte der gekrümmten Fläche kleiner wird, werden auch die Ringe breiter.

### Holografie

Interferenz läßt sich nutzen das räumliche Abbild eines Objektes zu speichern, die **Holografie**. Dabei wird zunächst ein monochromatischer Lichtstrahl (z.B. eines Lasers) auf zwei Strahlen aufgeteilt (siehe Abb. 2.4.11). Ein Strahl wird an einem Objekt gestreut und zu einem Film gesandt, während der andere Strahl direkt diesen Film erreicht. Je nach Phasenunterschied interferieren beide Strahlen und schwärzen diesen Film an der Stelle an denen konstruktive Interferenz auftritt.



**Abbildung 2.4.11:** Aufnahme und Rekonstruktion bei der Holografie.

Beleuchtet man den entwickelten Film (**Hologramm**) anschließend mit Licht derselben Wellenlänge, so findet an den geschwärzten Bereichen Streuung statt und die ausgehenden Kugelwellen interferieren in einer Weise, so daß das räumliche Abbild des Objektes wieder entsteht. Betrachtet man das Hologramm aus der Richtung der Beleuchtung nimmt man das virtuelle Bild wahr. Hält man einen Schirm an den Ort des reellen Bildes, so beobachtet man dort nur den Umriss des Objektes.

In einem Hologramm ist im Prinzip in jedem Teil des Filmes die vollständig räumliche Information des Objektes gespeichert, da die Licht-

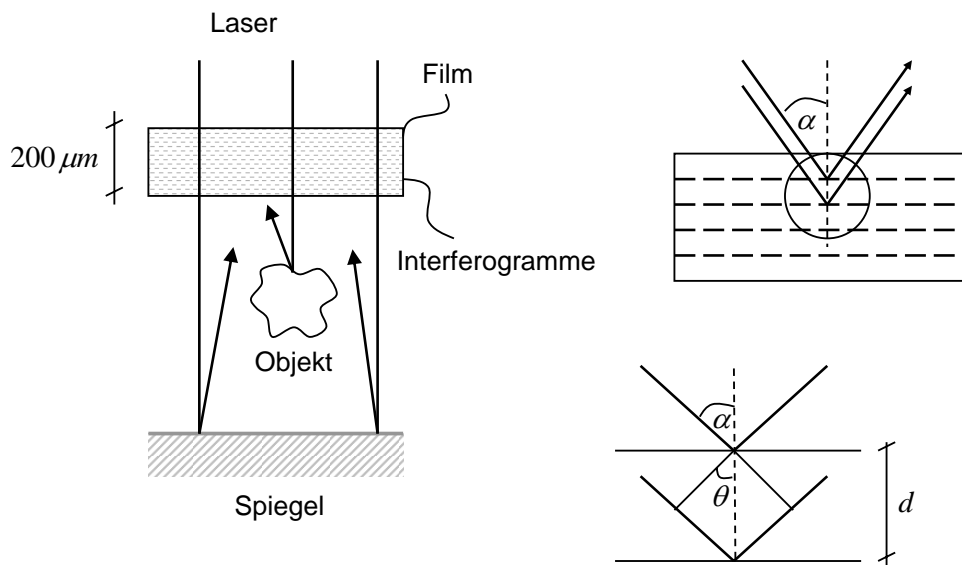
strahlen bei der Aufnahme, die an einer Stelle des Filmes interferieren, von allen Orten des Objektes ausgehen können.

Wie läßt sich jetzt ein Hologramm bei weißem Licht erzeugen? Hierzu durchstrahlt man einen empfindlichen Film mit monochromatischem Licht und überlagert dies mit den Strahlen von dem Objekt. Dieser Film ist allerdings sehr dick, so daß durch die Vielfachinterferenzen in der Schicht die Schwärzung des Filmes nicht nur in einer Ebene sondern in vielen auftritt. D.h wir bekommen nicht nur *ein* Interferogramm sondern einen ganzen *Stapel identischer* Interferogramme.

Bei der Betrachtung eines solchen Weißlichtinterferogramms wird diejenige Wellenlänge selektiert, die durch die sog. **Braggbedingung** (siehe Abb. 2.4.12) definiert wird:

$$2d \sin \Theta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.63)$$

Diese so ausgewählte Wellenlänge wird nun kohärent an den einzelnen Lagen des Interferogramms gestreut und erzeugt so das virtuelle Bild. Das bedeutet aber auch, daß ein Weißlichtinterferogramm unter verschiedenen Winkeln auch in verschiedenen Farben erscheint.



**Abbildung 2.4.12:** Bei der Weißlichtholografie wird das Hologramm mit einem Laser erzeugt und dabei ein Stapel Interferogramme in einem dicken Film erzeugt. Bei der Betrachtung des Hologramms in weißem Licht bewirkt die Bragg-Bedingung, daß nur eine Wellenlänge in Reflexion selektiert wird.

### 2.4.3 Beugung

Bislang haben wir bei der Interferenz zwei oder mehrere diskrete Lichtstrahlen überlagert und die Auslöschung bzw. Addition der Feldstärken betrachtet. Das zugrunde liegende Superpositionsprinzip und das Huygens'sche Prinzip läßt sich jedoch auch auf Objekte endlicher Ausdehnung wie Spalte und Blenden anwenden bei denen das Interferenzprinzip auf unendliche viele Huygens'sche Kugelwellen anzuwenden ist. Dies bezeichnet man als **Beugung**. Betrachten wir dazu einen einzelnen Spalt oder Blende auf die eine ebene Lichtwelle einfällt. Diese ebene Welle läßt sich als Überlagerung von Kugelwellen eindeutig darstellen. Wenn diese Welle eine Blende durchtritt, müssen wir auch hinter dieser Blende wieder die ausgehenden Kugelwellen überlagern. Man erkennt allerdings, daß gerade am Rand dieser Blende auch Wellen entstehen, die sich nicht mehr in Richtung der ursprünglichen Richtung der ebenen Welle ausbreiten, sondern die Blende unter einem bestimmten Winkel wieder verlassen. Sie werden *gebeugt*! Für diese Beugung existieren zwei Grenzfälle, wie in Abb. 2.4.13 illustriert ist:

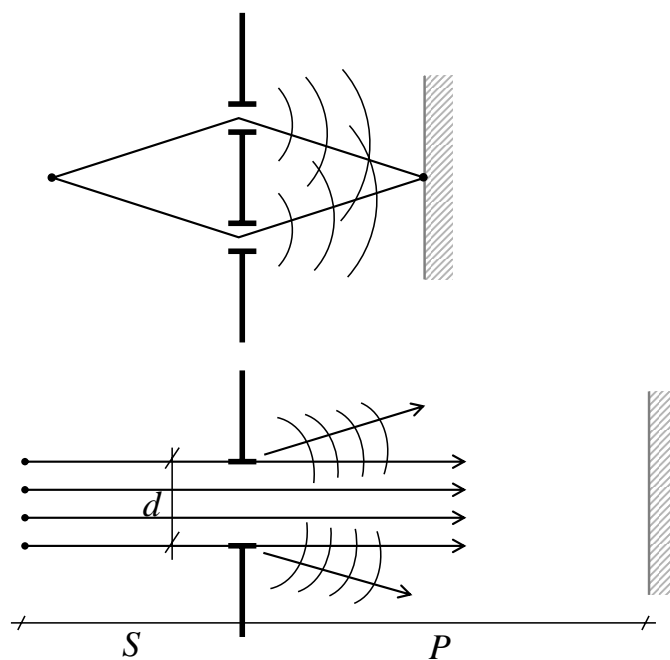


Abbildung 2.4.13: Fresnel- und Fraunhoferbeugung.

- Fresnel-Beugung

Bei der **Fresnelbeugung** überlagert man die einzelnen Huygens'schen Kugelwellen exakt und erhält so ein Beugungsbild. Die Fresnelbeugung betrachtet somit ganz allgemein die Lichtausbreitung sei es als *parallele* Lichtstrahlen (ebene Wellen) aber auch als *divergente* Lichtstrahlen. Dies ist wichtig für das Beugungsbild im Nahbereich einer Struktur.

- **Fraunhofer-Beugung**

Bei der Fraunhoferbeugung betrachten wir das Beugungsbild in *großer Entfernung* von der Blende. Hierbei betrachten wir ebene Wellen, die auf eine Blende einfallen und diese im wesentlichen auch wieder als ebene Wellen verlassen. D.h. sowohl für den Abstand der Quelle von der Blende  $S$  als auch des Schirmes  $P$  kann man als Faustformel benutzen:

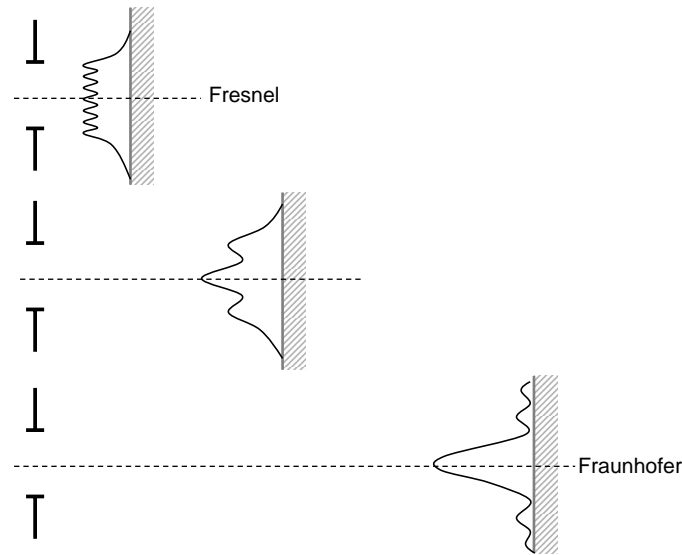
$$S, P \geq \frac{d^2}{\lambda} \quad (2.4.64)$$

mit  $d$  der Ausdehnung der Blende und  $\lambda$  der Wellenlänge des betrachteten Lichtes.

Das Beugungsbild beim Übergang von Fresnel- zu Fraunhoferbeugung bei der Abbildung einer Blende ist in Abb. 2.4.14 gezeigt. Man erkennt, daß bei kleinem Abstand ein direktes Abbild der Öffnung sichtbar wird und nur in den Randbereichen Maxima und Minima erkennbar werden. Erst bei großem Abstand beobachtet man ein Beugungsbild. Die exakte Form der Öffnung läßt sich daraus nicht mehr ableiten.

### Beugung am Spalt

Betrachten wir noch einmal eine Welle, die allerdings aus einem räumlich begrenzten Bereich emittiert wird. Dies kann zum Beispiel der Durchgang einer ebenen Welle durch einen Spalt der Breite  $d$  sein. Dazu verteilen wir zunächst  $N$  Punktquellen auf einer Strecke der Länge  $d$ , die bei gleicher Frequenz und Phase Kugelwellen aussenden. Wir suchen die Amplitude  $x(\alpha)$  der Welle an einem Ort P, der gemäß Abb. 2.4.15 im Abstand  $r$  unter einem Winkel  $\alpha$  zur Normalen der Ebene des Spaltes liegt. Bei der Superposition der  $N$  Punktquellen (Index  $n = 1..N$ ) ist insbesondere die Phase  $\Delta\varphi$  der Punktquellen untereinander wichtig. Nachdem  $d \ll r$  gelten soll, ist der Unterschied in den Entfernungen  $r_1$  bis  $r_N$  (siehe Abb. 2.4.15) der einzelnen Punktquellen sehr klein, so daß die Abhängigkeit der Kugelwellen gemäß  $1/r$  durch eine einzige Amplitude  $a$  ( $a = f(r)$ ) gut genähert ist. Was allerdings nicht vernachlässigt



**Abbildung 2.4.14:** Je nach Abstand geht die Fresnelbeugung in die Fraunhoferbeugung über.

werden darf, ist die *Phasenverschiebung*  $\Delta\varphi_n$  der einzelnen Punktquellen untereinander. Wir bekommen somit für die Amplitude  $x(\alpha)$  einen allgemeinen Ansatz von:

$$x(\alpha) = \sum_{n=1}^N a e^{i(\omega t - kr - \Delta\varphi_n)} \quad (2.4.65)$$

Wenn wir zwei *benachbarte* Punktquellen im Abstand  $\delta$  betrachten, bekommen wir einen Phasenunterschied gemäß Abb. 2.4.15 von:

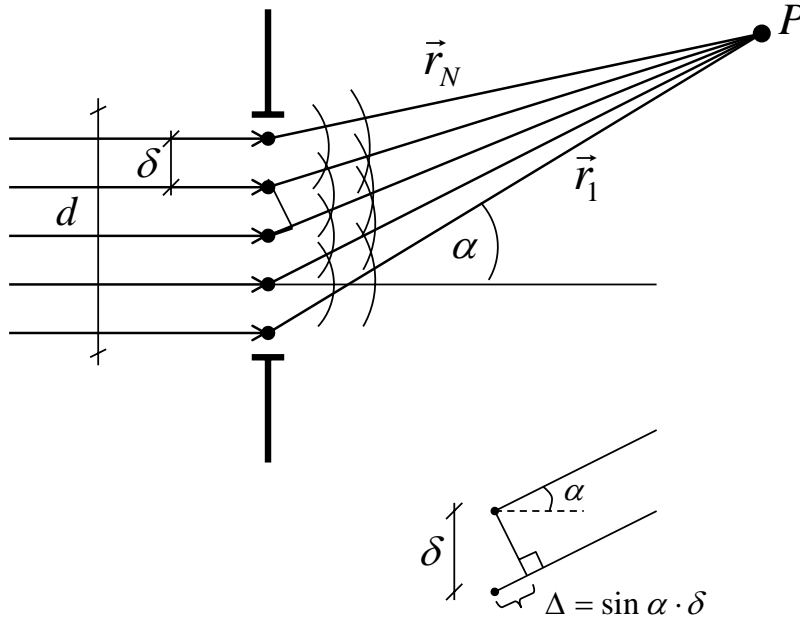
$$\Delta\varphi_1 = k \sin \alpha \delta \quad (2.4.66)$$

Der Phasenunterschied zwischen  $n$  Punktquellen im Abstand  $n\delta$  ist demnach:

$$\Delta\varphi_n = nk \sin \alpha \delta \quad (2.4.67)$$

D.h. wir können die Amplitude am Ort  $P$  schreiben als:

$$x(\alpha) = \underbrace{\sum_{n=1}^N a e^{-nk \sin \alpha \delta}}_{=A} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.4.68)$$



**Abbildung 2.4.15:** Räumliche Überlagerung der Wellen von  $N$  Punktquellen mit einem Abstand  $\delta$  zueinander an einem Ort  $P$  unter einem Winkel  $\alpha$ .

Der Faktor  $A$  beschreibt eine Summe von  $n = 1..N$ . Dies ist eine geometrische Reihe mit dem Grenzwert:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N e^{-in\Delta\varphi} &= \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \\
 &= \frac{e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi} \left( e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} \right)}{e^{-i\frac{1}{2}\Delta\varphi} \left( e^{-i\frac{1}{2}\Delta\varphi} - e^{i\frac{1}{2}\Delta\varphi} \right)} \\
 &= e^{-i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \frac{\sin \frac{N}{2}\Delta\varphi}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (2.4.69)
 \end{aligned}$$

Die Intensität am Ort  $P$  ist proportional zum Betragsquadrat der Amplitude  $x$ . D.h. wir bilden  $x \cdot x^*$  und es ergibt sich schließlich:

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2 \left( \frac{1}{2} N \delta k \sin \alpha \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} \delta k \sin \alpha \right)} \quad (2.4.70)$$

Für einen Spalt der Ausdehnung  $d$  können wir die Phase  $\Delta\phi$  zwischen den Wegen  $r_1$  und  $r_N$  definieren zu:

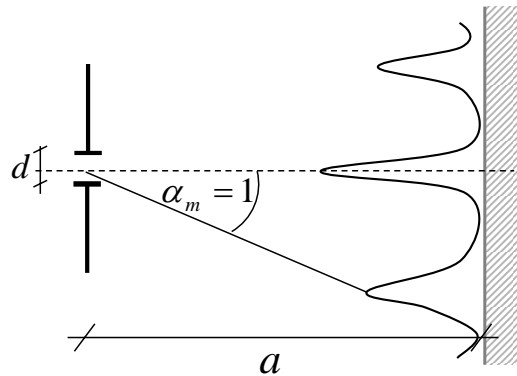
$$\Delta\phi = N\delta k \sin \alpha = dk \sin \alpha \quad (2.4.71)$$

Damit bekommen wir schließlich wegen  $d = N\delta$ :

$$I(\alpha) \propto a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{N}\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (2.4.72)$$

Nachdem  $N$  eine große Zahl ist, kann der Sinus im Nenner durch sein Argument angenähert werden. Es ergibt sich dann ein Ausdruck gemäß:

$$I(\alpha) \propto a^2 N^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)^2} \propto \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (2.4.73)$$



**Abbildung 2.4.16:** Die Beugung einer Welle an einem Spalt ergibt eine Intensität proportional zu  $\frac{\sin^2 x}{x^2}$  auf einem Schirm.

mit

$$x = \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{1}{2} dk \sin \alpha = \frac{1}{2} d \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha \quad (2.4.74)$$

bzw.

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \left[ N\pi \sin \alpha \frac{\delta d}{\lambda} \right]}{\sin^2 \left[ \pi \frac{\delta d}{\lambda} \sin \alpha \right]} \quad (2.4.75)$$

Die Verlauf des Beugungsbildes in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$  ist in Abb. 2.4.16 illustriert.



### Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Das Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes ist durch die Beugung begrenzt. Diese kann nicht unterschritten werden (bis auf Spezialfälle, siehe unten). Betrachten wir dazu die Abbildung von zwei Punkten im Abstand  $\Delta x$  durch eine Linse (siehe Abb. 2.4.17). Jeder einzelne Punkt erzeugt als Abbild nicht exakt einen Punkt, sondern ein charakteristisches Beugungsbild. Beide Beugungsbilder werden nur dann getrennt, wenn das Maximum der Beugung des einen Punktes in das erste Minimum der Beugungsbildes des zweiten Punktes fällt. Aus Gl. 2.4.75 läßt sich damit der minimale Abstand (Abstand Maximum zum ersten Minimum) von:

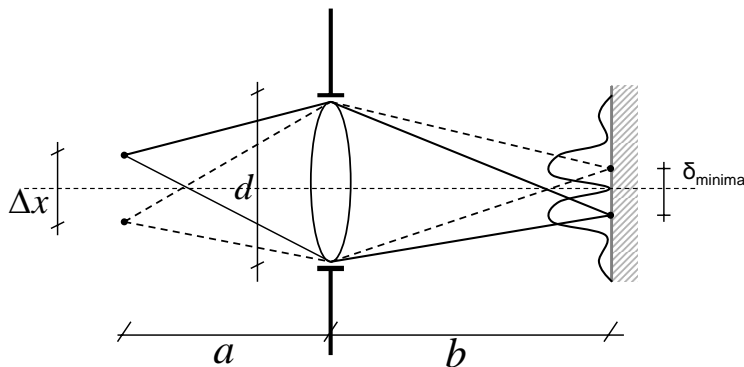
$$\delta_{\text{minimal}} = 1.22 \frac{\lambda}{d} b \quad (2.4.76)$$

ableiten mit  $d$  der Ausdehnung der Linse und  $b$  dem Abstand der Linse von dem Schirm (siehe Abb. 2.4.15).

Mit dem Abbildungsgesetz  $y'/y = -b/a$  ergibt sich wegen  $y = \Delta x$  und  $y' = \delta_{\text{minimal}}$ :

$$\frac{\delta_{\text{minimal}}}{\Delta x} = -\frac{b}{a} \quad (2.4.77)$$

Bei der Vergrößerung durch eine Linse (wie bei einer Lupe oder einem Mikroskop) wird das Objekt oftmals in dem Brennpunkt platziert, d.h. die Objektweite  $a = f$ . Damit bekommen wir für die Auflösung  $\Delta x$ :



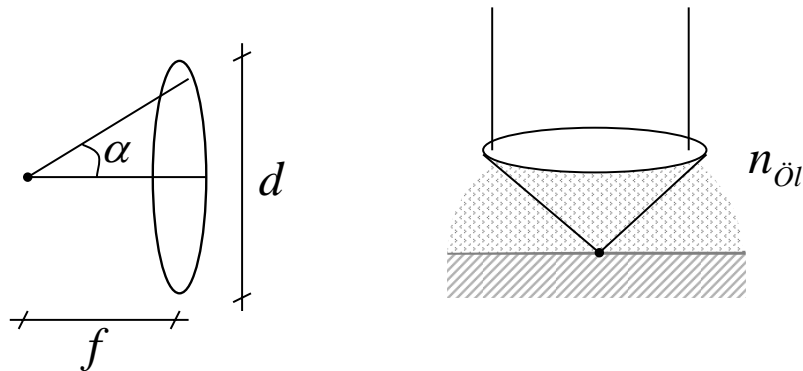
**Abbildung 2.4.17:** Durch die Beugungsbegrenzung läßt sich höchstens ein Objekt der Ausdehnung  $\Delta x$  auf dem Schirm trennen.

$$\Delta x = f 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (2.4.78)$$

Die Beugungsbegrenzung lässt sich auch als Winkel ausdrücken unter dem ein Objekt unter einem Mikroskop aufgenommen wird. Mit  $2 \sin \alpha = d/f$  ergibt sich (Abb. 2.4.18):

$$\Delta x = 1.22 \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad (2.4.79)$$

Dieses **Auflösungsvermögen** lässt sich erhöhen, wenn man zwischen Linse und Objekt eine Flüssigkeit mit Brechungsindex  $n$  einfügt (Immersionmikroskopie). Dabei verkürzt sich die Wellenlänge um den Faktor  $n$  und man bekommt für das Auflösungsvermögen eines Mikroskops:



**Abbildung 2.4.18:** Beugungsbegrenzung eines Mikroskops bei dem sich zwischen Objektiv und Objekt ein Immersionsöl befindet.

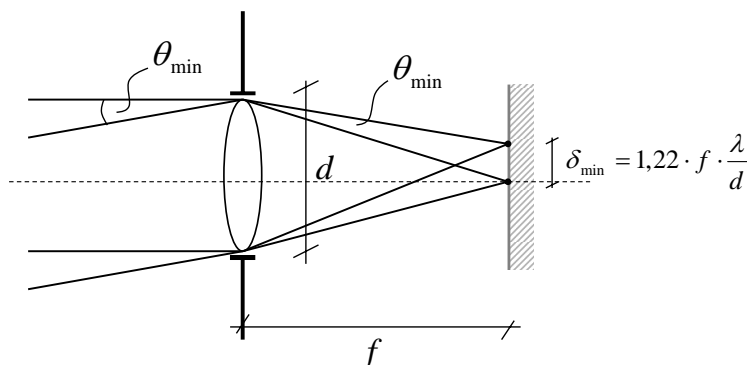
$$\Delta x_{\text{Mikroskop}} = 1.22 \frac{\lambda}{2n \sin \alpha} \quad (2.4.80)$$

Der Ausdruck  $n \sin \alpha$  wird auch als **numerische Apertur** (N.A.) bezeichnet. Damit wird

$$\Delta x = 0.61 \frac{\lambda}{N.A.} \quad (2.4.81)$$

Bei einer Abbildung von Objekten im Unendlichen ist die Definition der Auflösung als Strecke  $\Delta x$  nicht sinnvoll. Deshalb definiert man hier einen minimalen Winkel  $\Theta_{\text{minimal}} = \frac{\delta_{\text{min}}}{f}$ , der mit  $b = f$  aufgelöst werden kann. Setzt man dies in Gl. 2.4.76 ein, so erhält man das **Raleigh-Kriterium** (siehe Abb. 2.4.19):

$$\Theta_{\text{minimal, Fernrohr}} = 1,22 \frac{\lambda}{d} \quad (2.4.82)$$



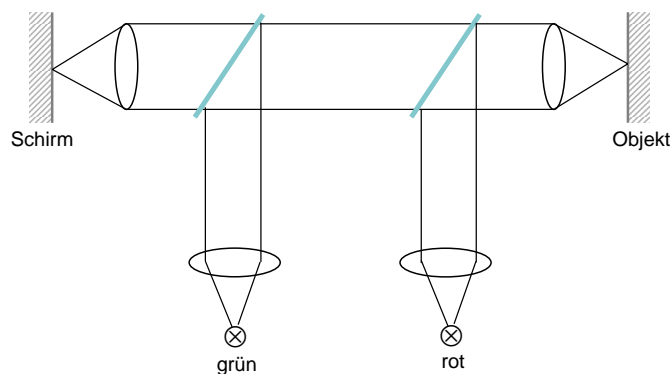
**Abbildung 2.4.19:** Minimaler Öffnungswinkel, der in einem Fernrohr noch getrennt werden kann, das Raleigh-Kriterium.

Man erkennt, daß der minimale Winkel, der aufgelöst werden kann, mit der Größe des Objektivs  $d$  immer kleiner wird. D.h. die Auflösung steigt. Dies wird in der sogenannten **Very Long Baseline Interferometry** ausgenutzt. Hier wird das Signal von einem Array weit entfernter Teleskope aufgenommen. Korreliert man Signale die zu gleichen Zeiten ankommen (konstruktive Interferenz), bekommt man eine Auflösung mit einem  $d$  das dem maximalen *Abstand* der einzelnen Teleskope untereinander entspricht. In allen Fällen steigt zwar die Auflösung, die Signalstärke bleibt jedoch gering, da die Aus sammelfläche durch die begrenzte Fläche der einzelnen gekoppelten Teleskope klein bleibt.

Die Beugungsbedingung legt das maximal mögliche Auflösungsvermögen aller vergrößernden Instrumente fest. In speziellen Fällen ist es allerdings gelungen, diese Beugungsbegrenzung zu *unterschreiten*. Ein Beispiel ist die **Fluoreszenz-Mikroskopie**, in der ein Farbstoff in einem Objekt angeregt wird und man das Fluoreszieren dieses Farbstoffes beobachtet (z.B. markierte Zellen in der Biologie).

Durch eine besondere Form der Anregung bzw. Abregung der Fluoreszenz mit Licht unterschiedlicher Frequenz läßt sich jetzt die Beugungsbegrenzung umgehen. Betrachten wir dazu ein Beispiel bei der die Fluoreszenz durch grünes Licht angeregt und durch rotes Licht wieder abgeregt wird. Das Objekt wird mit beiden Lichtquellen gleichzeitig beleuchtet (siehe Abb. 2.4.20): (i) falls nur die grüne Lichtquelle leuchtet beobachtet man im Mikroskop Fluoreszenz. Die Auflösung der Bilder ist durch die Beugungsbegrenzung bei

$\lambda_{gruen}$  begrenzt; (ii) falls beide Lichtquellen gleiche Intensität haben, so tritt keine Fluoreszenz auf, da die Anregung durch das grüne Licht durch das rote Licht wieder vernichtet wird.



**Abbildung 2.4.20:** Fluoreszenz-Mikroskop.

Allerdings ist die letzte Aussage nicht ganz richtig, da die Beugungseigenschaften von grünem und rotem Licht *unterschiedlich* sind: grünes Licht hat eine schmäleres Beugungsmaximum als das rote (wg.  $\lambda_{grün} > \lambda_{rot}$ ). Betrachtet man zum Beispiel die Abbildung eines Punktes in grünem und rotem Licht, so überwiegt im Zentrum die Intensität des grünen und die Fluoreszenz wird nicht vollständig unterdrückt, während in den Flanken die Intensität des roten überwiegt und die Fluoreszenz effizient abgeregt wird (siehe Abb. 2.4.21). Hier liegt der Trick bei der STED-Mikroskopie (STED...Stimulated Emission Depletion). Man justiert die Intensität der Lichtquellen derart, daß *nur* im zentralen Bereich, die grüne Intensität wirklich größer als die rote wird, damit läßt sich der Bereich, der fluoresziert, bis auf wenige Å eingrenzen und man bekommt Bilder mit einer Auflösung, die weit unter der normalen Beugungsgrenze liegen.

### Beugung am Gitter

Bei der Reflexion einer ebenen Welle an einem Gitter entsteht eine Überlagerung von Interferenz und Beugung. Ein Gitter besteht aus regelmäßigen, reflektierenden Flächen mit einem Abstand  $d$  zueinander (siehe Abb. 2.4.22). Jede reflektierende Fläche erzeugt eine Winkelverteilung entsprechend einem *Beugungsbild*. Die Reflexionen der einzelnen Flächen zueinander erzeugen ein *Interferenzbild*. Damit besteht das Beugungsbild eines Gitters aus zwei Beiträgen:

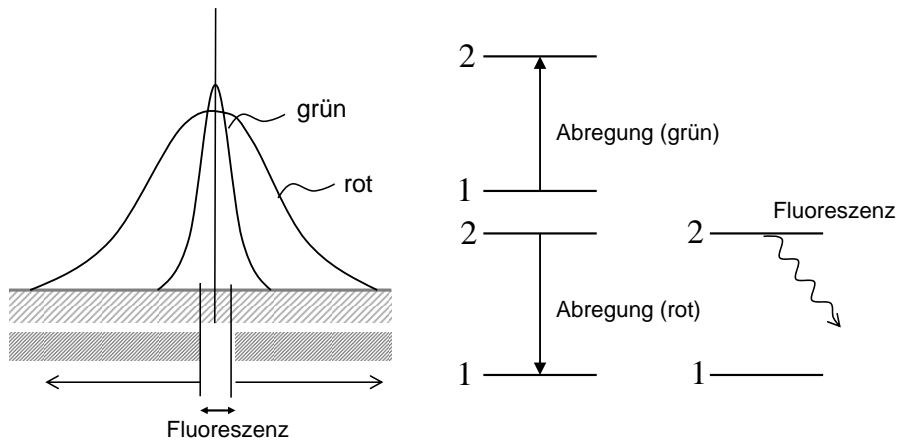


Abbildung 2.4.21: STED Stimulated Depletion Microscopy.

$$I(\Theta) = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\text{Beugung}} \underbrace{\frac{\sin^2 [N\pi \sin \Theta \frac{\delta d}{\lambda}]}{\sin^2 [\pi \frac{\delta d}{\lambda} \sin \Theta]}}_{\text{Interferenz}} \quad (2.4.83)$$

mit

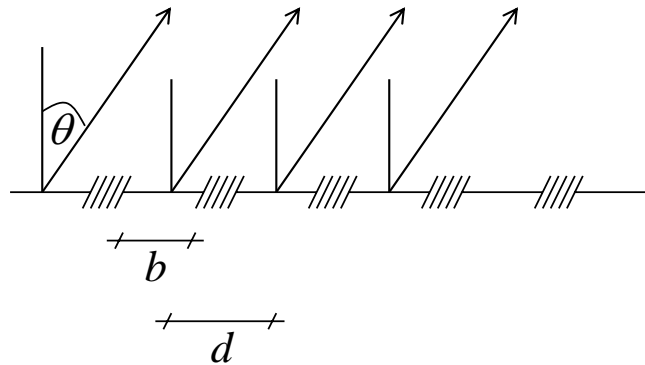
$$x = \pi \frac{b}{\lambda} \sin \Theta \quad (2.4.84)$$

Das Beugungsbild ist in Abb. 2.4.23 gezeigt. Man erkennt in engem Abstand die jeweiligen Interferenzmaxima. Die Einhüllende der Intensitäten ist die Verteilung entsprechend der Beugung.

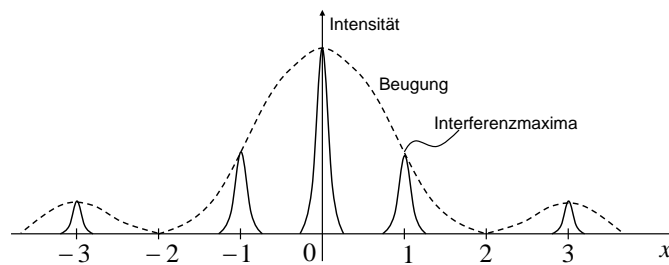
Die Abbildungseigenschaften eines Gitters werden bislang nach dem Huygenschen Prinzip abgeleitet. Allerdings kann die Intensität des gestreuten Lichtes erhöht werden, wenn man die reflektierenden Flächen so anordnet daß (i) konstruktive Interferenz auftritt und (ii) das Reflexionsgesetz erfüllt ist. Gemäß Abb. 2.4.24 ist dies für einen bestimmten Winkel  $\Theta$  zwischen Normalen des ganzen Gitters und der Normalen der einzelnen reflektierenden Fläche, gewährleistet. Falls der einfallende Lichtstrahl um  $\alpha$  und der Ausfallende um  $\beta$  gegen die Gitternormale geneigt ist, bekommt man einen Phasenunterschied zwischen den benachbarten Gitterlinien von:

$$\Delta = d \sin \alpha + d \sin \beta \quad (2.4.85)$$

Man bekommt konstruktive Interferenz falls der Phasenunterschied ein Vielfaches von  $\lambda$  wird. D.h. man bekommt die sogenannte **Gittergleichung**



**Abbildung 2.4.22:** Beugung an einem Gitter: jede einzelne reflektierende Fläche habe eine Breite  $b$ ; der Abstand der Gitterlinien sei  $d$ .



**Abbildung 2.4.23:** Die Beugung am Gitter ist eine Überlagerung der Interferenz zwischen den Gitterlinien und der Beugung an jeder einzelnen Gitterlinie.

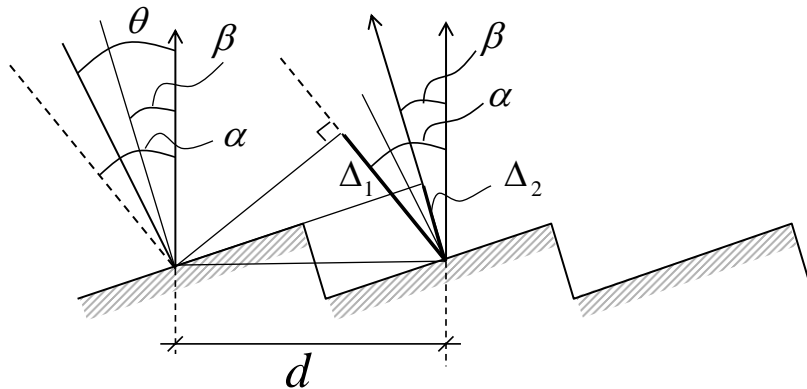
von:

$$\boxed{d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda} \quad (2.4.86)$$

Die reflektierte Intensität wird maximal, wenn gleichzeitig für jede einzelne Reflexion das Reflexionsgesetz erfüllt ist. D.h. die Flächen müssen um:

$$\Theta = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (2.4.87)$$

geneigt sein, dem sog. **Blazewinkel**. Es ist sofort einsichtig, daß die Bedingung 2.4.86 und die Gl. 2.4.87 nur für genau eine Wellenlänge erfüllt werden kann. Aus diesem Grund werden Gitter für einen bestimmten Spektralbereich optimiert.



**Abbildung 2.4.24:** Bei einem Gitters sind die reflektierenden Flächen unter einem Winkel  $\theta$  gegen die Gitternormale geneigt.

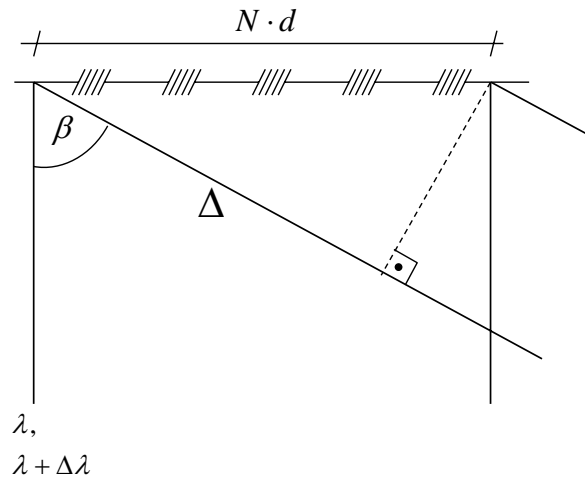
Wie ist das Auflösungsvermögen eines Gitterspektrographen? Betrachten wir dazu die mögliche Trennung von zwei Linien die einen Abstand  $\Delta\lambda$  voneinander entfernt sind. Eine solche Trennung ist möglich, falls beim Vergleich von zwei Linien mit  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  nur *eine von beiden* konstruktiv interferiert: das Gitter habe eine Ausdehnung von  $Nd$ , wenn  $N$  die Zahl der Gitterlinien und  $d$  der Abstand der einzelnen Linien voneinander sind (siehe Abb. 2.4.25). Die größtmögliche Auflösung bekommen wir, wenn wir den Phasenunterschied von zwei Gitterlinien vergleichen, die am weitesten voneinander entfernt sind. Dann kann auch eine kleine Differenz  $\Delta\lambda$  zu einem Phasenunterschied von  $2\pi$  führen und nur *eine der beiden Linien* zeigt konstruktive Interferenz. Wenn wir den Winkel  $\beta$  festlegen, bekommen wir einen Phasenunterschied von:

$$\varphi = k\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda}Nd \sin \beta \quad (2.4.88)$$

Wenn wir jetzt die Richtung  $\beta$  ändern, ändern wir auch den Phasenunterschied und damit die Wellenlänge, die selektiert wird. Eine Änderung in der Phase dieser Strahlen entspricht einer Änderung in der Richtung der Emission von:

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{2\pi}{\lambda}Nd \cos \beta \quad (2.4.89)$$

Wir bekommen ein neues Maximum wenn wir von der Linie  $\lambda$  zur Linie  $\lambda + \Delta\lambda$  gehen, falls der Phasenunterschied genau  $d\varphi \rightarrow \Delta\varphi = 2\pi$  ist:



**Abbildung 2.4.25:** Das Auflösungsvermögen eines Gitters (Trennung von  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$ ) lässt sich aus dem Vergleich der Reflexionen der am weitesten entfernten Gitterlinien ableiten.

$$\frac{d\varphi}{d\beta} \rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta\beta} = \frac{2\pi}{\Delta\beta} \quad (2.4.90)$$

D.h. damit erzeugen die beiden Linien bei  $\lambda$  und  $\lambda + \Delta\lambda$  Maxima mit einem minimalen Winkelabstand von:

$$\Delta\beta = \frac{\lambda}{Nd \cos \beta} \quad (2.4.91)$$

Mit der Gittergleichung  $d(\sin \alpha + \sin \beta) = m\lambda$  lässt sich jetzt der erreichbare Unterschied  $\Delta\lambda$  in Abhängigkeit von den Eigenschaften des Gitters ausrechnen. Aus der Gittergleichung bekommen wir einen Zusammenhang zwischen Winkel  $\beta$  und Wellenlänge  $\lambda$  von:

$$\frac{d\lambda}{d\beta} = \frac{d}{m} \cos \beta \quad (2.4.92)$$

Eine Änderung in  $\lambda$  ist mit der Änderung im Austrittswinkel  $\beta$  verknüpft wie:

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\beta} \Delta\beta \quad (2.4.93)$$

Wenn wir Gl. 2.4.91, 2.4.91 und 2.4.91 kombinieren, bekommen wir schließlich das Auflösungsvermögen eines Gitters von:



$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN}} \quad (2.4.94)$$

D.h. je größer die Anzahl der Linien ist, die zur Beugung beitragen, desto größer ist das Auflösungsvermögen eines Gitters. Dasselbe gilt für die Ordnung des Beugungsreflexes. Je größer die Ordnung ist desto größer wird das Auflösungsvermögen.

### Fresnel-Beugung

Bei der Fresnelbeugung bestimmt die exakte Überlagerung der einzelnen Kugelwellen das resultierende Beugungsbild. Näherungen wie ebene Wellen oder große Abstände des Schirms/Quelle vom Spalt werden nicht mehr gemacht. In der Regel verlangt die Ableitung des Beugungsbild für den allgemeinen Fall die konsistente Überlagerung aller Huygens'schen Wellen. An dieser Stelle soll jedoch nur ein einfacher Fall diskutiert werden, die **Fresnel-Linse** oder **Fresnel'sche Zonenplatte**.

Ein Fresnellinse ist ein optisches Instrument zur Abbildung eines Objektes auf ein Bild, bei der die ausgehenden Strahlen am Ort des Bildes konstruktiv interferieren und die Strahlen, die destruktiv interferieren von der Fresnellinse *ausgeblendet* werde. Ein solche Linse besteht aus einer Abfolge von konzentrischen Ringen, die durch eine Breite und einen Radius  $R_m$  gekennzeichnet sind. Diese Ringe müssen so angeordnet werden, daß sie diejenigen Strahlengänge ausblenden, die zu destruktiver Interferenz führen. Betrachten wir dazu die optischen Wege von Objekt zu Bild einmal in gerader Richtung und einmal durch Beugung an einem ringförmigen Spalt mit Radius  $R_m$ . Damit dieser Ring die destruktive Interferenz unterdrückt, muß der Phasenunterschied gleich einem ungeraden Vielfachen von  $\lambda/2$  sein:

$$(\rho_m + r_m) - (r_0 + \rho_0) = m\frac{\lambda}{2} \quad m = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (2.4.95)$$

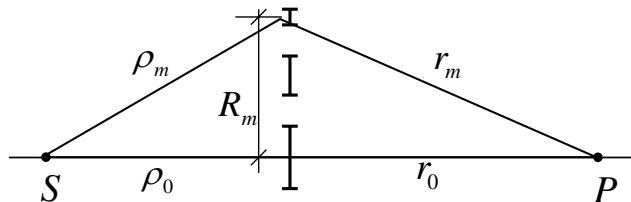


Abbildung 2.4.26: Abbildung durch eine Fresnel-Linse.

Die Wege  $\rho_m$  und  $r_m$  lassen sich durch den Radius  $R_m$  ausdrücken wobei wir jeweils die Näherung  $R_m \ll \rho_m, r_m$  benutzen:

$$\rho_m = \sqrt{R_m^2 + \rho_0^2} \simeq \rho_0 + \frac{1}{2} \frac{R_m^2}{\rho_0} \quad (2.4.96)$$

$$r_m = \sqrt{R_m^2 + r_0^2} \simeq r_0 + \frac{1}{2} \frac{R_m^2}{r_0} \quad (2.4.97)$$

Damit wird die Beziehung zwischen der Objektweite  $\rho_0$  und der Bildweite  $r_0$  zu:

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} = m \frac{\lambda}{R_m^2} \quad (2.4.98)$$

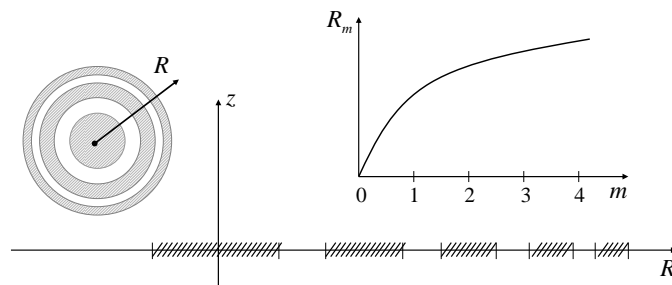
Man erkennt wieder eine Abbildungsgleichung mit einer Brennweite von:

$$\frac{1}{f_{\text{Fresnel}}} = m \frac{\lambda}{R_m^2} \quad (2.4.99)$$

Damit diese Brennweite *unabhängig* von der Lage des spaltförmigen Ringes ist muß für  $R_m$  gelten:

$$R_m = \text{const.} \cdot \sqrt{m\lambda} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (2.4.100)$$

D.h. der Radius der Ringe steigt mit der Wurzel der Ordnung  $m$  und der Wellenlänge der Interferenz an. Diese Bedingung läßt sich leicht für eine Wellenlänge erfüllen, und es läßt sich somit eine Abbildung erzeugen. Dies ist in Abb. 2.4.27 dargestellt.



**Abbildung 2.4.27:** Abfolge der Ringe einer Fresnel Linse.

# Anhang A

## Fragenkatalog

### A.1 Kapitel 1.1: Elektrostatik

- Beschreiben sie das Coloumb-Gesetz ?
- Wie konstruiere ich elektrische Feldlinien ?
- Wie skaliert das elektrische Feld eines Punktes, einer Linie, einer Fläche ?
- Was beschreibt der Gauß'sche Satz ?
- Definieren sie elektrisches Potential und Spannung ?
- Was ist die Kapazität ?
- Was ist Influenz ?
- Erklären sie das Prinzip des Farady'schen Käfigs ?
- Definieren sie Polarisierung, Polarisierbarkeit, Suszeptibilität, Dielektrizitätskonstante ?
- Wie sind Polarisierbarkeit und Suszeptibilität verknüpft ?
- Was gelten für Grenzbedingungen für elektrische Felder an Metalloberflächen und an Isolatoroberflächen ?

## A.2 Kapitel 1.2: Strom

- Wie sind Strom und Stromdichte definiert ?
- Was ist die Leitfähigkeit und der spezifische Widerstand ?
- Beschreiben Sie das Ohm'sche Gesetz ?
- Wie ändert sich der Widerstand mit der Temperatur bei Metallen, Isolatoren, Halbleitern, Supraleitern ?
- Definieren sie die Leistung ?
- Was ist eine RC-Zeitkonstante ?
- Was sind die Kirchhoffschen Regeln ?
- Beschreiben sie das Konzept einer Brückenschaltung.

## A.3 Kapitel 1.3: Magnetfelder

- Wie werden Magnetfeldlinien konstruiert ?
- Was ist das Gesetz von Biot-Savart und von Ampere ?
- Was ist das Magnetfeld einer Spule und eines geraden Leiters ?
- Definieren sie das magnetische Moment. welche Kräfte wirken auf ein magnetisches Moment in einem Magnetfeld ?
- Wie sind  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  verknüpft und warum ?
- Unterscheiden Sie Dia-, Para- und Ferromagnetismus.
- Was ist die Hysterese bei einem Ferromagneten?
- Beschreiben sie die Maxwellgleichungen der Elektro- und Magnetostatik.
- Definieren sie Suszeptibilität und Permeabilität
- Definieren sie B-Feld und H-Feld. Wie läßt sich daraus ein Brechungsgesetz für Feldlinien ableiten?

## A.4 Kapitel 1.4: Zeitabhängige Felder

- Was ist die Induktion ?
- Beschreiben sie das Faraday'sche Gesetz und die Lenz'sche Regel ?
- Wie funktioniert eine Wirbelstrombremse ?
- Definieren sie den magnetischen Fluß.
- Was ist Selbstinduktion und Gegeninduktion ?
- Was ist der Verschiebungsstrom ?
- Wie lauten die Maxwellgleichungen ?
- Beschreiben sie den Ein- und Ausschaltvorgang einer Spule.
- Wie ist die Energiedichte elektromagnetischer Felder?
- Wie variieren Strom und Spannung in einem elektrischen Schwingkreis?
- Was ist der Unterschied zwischen einem Serien- und einem Parallelschwingkreis?

## A.5 Kapitel 1.5: Wechselstrom

- Wie wird Wechselstrom erzeugt ?
- Beschreiben sie Generatoren und Elektromotoren
- Was ist Drehstrom ?
- Unterscheiden sie die Stern- und die Dreiecksschaltung.
- Wie sind die Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung bei Kondensatoren, Induktivitäten und Widerständen?
- Was ist ein Zeigerdiagramm ?
- Beschreiben sie einen Serienschwingkreis in einem Zeigerdiagramm.
- Was ist ein Transformator ? Wie ist das Funktionsprinzip ?

## A.6 Kapitel 2.1: Elektromagnetische Wellen

- Leiten Sie die Wellengleichung ab.
- Wie sind elektrisches und magnetisches Feld verknüpft?
- Wie breiten sich Wellen im Vakuum aus?
- Was sind Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit und Signalgeschwindigkeit?
- Wie ist die Polarisierung einer Welle definiert?
- Wie transportiert eine Welle Energie und Impuls? Nennen sie Beispiele.
- Wie werden elektromagnetische Wellen erzeugt?
- Skizzieren sie die Emission eines Hertz'schen Dipols.
- Wie unterscheiden sich Nahfeld und Fernfeld eines Hertz'schen Dipols?
- Motivieren sie warum beschleunigte Ladungen Wellen abstrahlen.
- Wie sind die Randbedingungen für stehende Wellen?
- Was ist ein Wellenleiter?

## A.7 Kapitel 2.2: Elektromagnetische Wellen in Materie

- Definieren sie den Brechungsindex.
- Wie sind Frequenz, Wellenvektor und Brechungsindex verknüpft?
- Beschreiben sie die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Frequenz des Lichtes.
- Was ist die Oszillatorstärke?
- Was ist die Plasmafrequenz, wie entstehen die Farben der Metalle?
- Was ist der Skineffekt?
- Wie verhalten sich Reflexion parallel und senkrecht zur Einfallsebene? Was ist der Brewsterwinkel?

- Wie entsteht Totalreflexion?
- Leiten sie das Snellius'sche Brechungsgesetz ab, welche Arten der Herleitung gibt es?
- Was ist ein Polarisator? Welche Konzepte zur Erzeugung von Polarisation kennen sie?
- Was ist Doppelbrechung, wie funktioniert ein  $\lambda/2$  und ein  $\lambda/4$ -Plättchen?
- Welche Klassen von Lichtstreuung gibt es?
- Erklären sie den die Farben des Himmels und des Sonnenuntergangs?
- Wie entsteht ein Regenbogen?

## A.8 Kapitel 2.3: Geometrische Optik

- Was sind die Axiome der geometrischen Optik?
- Charakterisieren sie eine Abbildung mit Objektweite, Bildweite und Brennweite?
- Wie sind die Abbildungsgesetze?
- Wie berechnet sich der Brennpunkt?
- Konstruieren sie eine Abbildung für eine Sammellinse und eine Zerstreuungslinse.
- Warum verwendet man bei großen optischen Instrumenten Parabolspiegel?
- Was ist die Brennweite eines Hohlspiegels?
- Welche Aberrationen kennen sie?
- Beschreiben sie die Funktionsweisen von Lupe, Mikroskop und Fernrohr.
- Wie ist der Vergrößerungsfaktor bei optischen Instrumenten definiert?

## A.9 Kapitel 2.4: Wellenoptik

- Was ist die Kohärenz?
- Wie funktioniert ein Michelson-Interferometer?
- Wie entstehen die Interferenzfarben bei dünnen Filmen?
- Was sind die Airy-Funktionen?
- Wie funktioniert die Holografie?
- Welche Bedingungen müssen für Beugung und Interferenz gelten?
- Wie ist das Auflösungsvermögen eines Mikroskops?
- Unterscheiden sie Fresnel- und Fraunhoferbeugung.
- Wie funktioniert eine Fresnellinse?



# Index

- $\lambda/2$ -Plättchen, 230
- Äquipotentialflächen, 27
- Abbildung, 237
- Abbildungsgleichung, 245
- Aberration, 259
- Absorption, 199
- Absorptionskoeffizient, 199
- Achromat, 260
- achsen-paralleler Strahl, 247
- Airy-Funktionen, 285
- Ampere, 52
- Ampere'sches Gesetz, 88
- Antireflexschicht, 287
- Asynchronmotor, 153
- Auge, 264
- Bandlücke, 63
- Batterie, 58
- Bestrahlungsstärke, 177
- Beugung
  - Fraunhofer, 293
  - Fresnel, 292
- Beweglichkeit, 60
- Bild, 237
- Blazewinkel, 302
- Blindleistung, 162
- Brückenschaltung, 66
- Brechung, 216
- Brechungsgesetz
  - magnetisches Feld, 112
  - elektrisches Feld, 50
- Brechungsgesetz von Snell, 218
- Brechungsindex, 197
- Bremsstrahlung, 187
- Brennpunkt, 238
- Brennpunktstrahl, 247
- Brennstoffzelle, 53
- Brennweite, 238
- Brewsterwinkel, 223
- Brille, 265
- Clausius-Mosotti-Gleichung, 47
- Coloumb, 6
- Coloumbkraft, 9
- Curie-Temperatur, 107
- Diamagnetismus, 102
- dichroitisch, 226
- Dielektrika, 40
- Dielektrische Spiegel, 288
- Dielektrizitätskonstante
  - relativ, 43
- Dioptrien, 266
- Dipol
  - elektrisch, 12
- Dipolmoment, 12
- Dipolstrahlung
  - Fernfeld, 184
  - Nahfeld, 184
- Dispersion, 199
- Dispersion, normal/anormal, 206
- Divergenz, 17
- Domänen, 105
- Doppelbrechung, 228
- Doppelspaltversuch, 277
- Dotierung, 63
- Drehstrom, 152

- Dreiecksschaltung, 156  
 Drift, 59  
 Dynamo-Prinzip, 151  
 effektive Spannung, 151  
 Ein- und Ausschalten RL, 127  
 Einfallsebene, 216  
 eingefrorener magnetischer Fluß, 119  
 elektrischer Fluß, 18  
 elektrisches Feld, 11  
 elektrisches Potential, 25  
 Elektromagnetische Wechselwirkung,  
     99  
 Elektrometer, 7  
 Elektronenvolt, 26  
 Elementarladung, 6  
 Fabry-Perot-Interferometer, 287  
 Farad, 34  
 Faraday'scher Käfig, 30  
 Faraday'sches Gesetz, 115  
 Feldemission, 23  
 Feldlinien, 11  
 Fermat'sches Prinzip, 218, 241  
 Fermigeschwindigkeit, 62  
 Fernrohr  
     Galileo, 271  
     Kepler, 270  
 Ferromagnetismus, 105  
 Fluoreszenz-Mikroskopie, 299  
 Fourier-Transformations-  
     Spektrometer, 280  
 Fremderregung, 150  
 Fresnel-Gleichungen, 222  
 Fresnel-Linse, 305  
 Galvanisches Element, 55  
 Gauß'scher Satz, 17  
 Gegeninduktion, 126  
 Gittergleichung, 301  
 Glorie, 233  
 Gradient, 18  
 Gruppengeschwindigkeit, 204  
 Gyration, 75  
 H-Feld, 110  
 Halleffekt  
     Quanten, 82  
     Sonde, 82  
     Spannung, 81  
     Widerstand, 82  
 Halo, 233  
 Hauptebene, 252  
 Hauptschlußmaschine, 149  
 Henry, 123  
 Hochpaß, 162  
 Hohlleiter, 191  
 Hohlspiegel, 254  
 Holografie, 290  
 Hologramm, 290  
 Hysterese, 107  
 Impedanz, 159  
 Induktivität, 123  
 induzierte Spannung, 115  
 Influenzladungen, 29  
 Intensität, 177, 199  
 Interferenz, 277  
 Jones-Vektor, 176  
 Kapazität, 33  
 Kirchhoffsche Regeln, 68  
 Kohärenz, 275  
 Kommutator, 149  
 Kondensator, 33  
     Parallelschaltung, 37  
     Serienschaltung, 37  
 konkav, 238  
 Kontinuitätsgleichung, 136  
 konvex, 238  
 Kramers-Kronig-Beziehungen, 203  
 Kugelschalentheorem, 20  
 Kurzsichtigkeit, 264

- Ladungserhaltung, 5  
 Lambert-Beer'sche Gesetz, 199  
 Laplace-Operator, 173  
 Larmorradius, 75  
 Laser, 277  
 Leitfähigkeit, 61  
 Lenz'sche Regel, 102, 116  
 Lichtmühle, 179  
 Lichtstärke, 272  
 Lorentz-Kraft, 73  
  
 Mach-Zehnder-Interferometer, 281  
 Magnete, 72  
 magnetische Flasche, 76  
 Magnetische Levitation, 123  
 magnetischer Fluß, 91, 115  
 Magnetisierung, 101  
 Maxwellgleichungen, 19, 93, 136  
 Metamaterialien, 204  
 Michelson-Interferometer, 279  
 Mikroskop, 268  
 Millikan-Versuch, 6  
 Mittelebene, 246  
 Mittelpunktstrahl, 246  
  
 Nebenschlußmaschine, 150  
 Netzwerk, 68  
 Newton'sche Ringe, 289  
 Nulleiter, 155  
 numerische Apertur, 298  
  
 Objekt, 237  
 Objektiv, 268  
 Ohm'sches Gesetz, 61  
 Okular, 268  
 optische Achse, 227, 238  
 optische Pinzette, 180  
 optisches System, 237  
 Orientierungspolarisation, 40  
 Oszillatorstärke, 202  
  
 Parabol-Spiegel, 258  
  
 Parallelschwingkreis, 146  
 Paramagnetismus, 104  
 Permeabilität, 102  
 Phasengeschwindigkeit, 204  
 Phasensprung, 222  
 Piezoelektrizität, 51  
 Plasmafrequenz, 201  
 Plattenkondensator, 16  
 Poisson-Gleichung, 27  
 Polarisierung, 40, 176  
     elliptisch, 176  
     linear, 176  
     zirkular, 176  
 Polarisierbarkeit, 40  
 Pole, 72  
 Poynting-Vektor, 178  
 Primärspule, 167  
  
 Raleigh-Kriterium, 298  
 Rechte-Hand-Regel, 85  
 Reflexion, 216, 223  
 Reflexionskoeffizient, 221  
 Reibungselektrizität, 7  
  
 Sammellinse, 243  
 Satz von Stokes, 91  
 Schärfentiefe, 272  
 Sehweite, 266  
 Sekundärspule, 167  
 Selbsterregung, 150  
 Serienschwingkreis, 141  
 Skintiefe, 210  
 Spannung, 25  
 Spannungsteiler, 66  
 Spiegelladung, 33  
 Sprungtemperatur, 63  
 stehende Wellen, 188  
 Sternschaltung, 155  
 Strahl, auperordentlich/ordentlich,  
     228  
 Streuung, 197

- Strom, 52  
Stromdichte, 52  
Supraleiter, 63  
Suszeptibilität  
    dielektrisch, 43  
    magnetisch, 101  
Synchronmotor, 153  
Synchrotronstrahlung, 187  
  
technische Stromrichtung, 53  
Telegrafengleichung, 192  
Tesla, 72  
Teslatransformator, 170  
Tiefpaß, 163  
Totalreflexion, 225  
Transformator, 167  
Transmission, 223  
Transmissionskoeffizient, 221  
Transversalwellen, 175  
  
unpolar, 40  
  
van-de-Graaff-Generator, 31  
Vektorpotential, 182  
Vergrößerung, 249  
Vergrößerungsfaktor, 266  
Verschiebungspolarisation, 40  
Verschiebungsstrom, 134  
Very Long Baseline Interferometry,  
    299  
Vielstrahlinterferenz, 281  
Vierpol, 162  
virtuelles Bild, 243  
  
Weitsichtigkeit, 264  
Wellengleichung, 173  
Wellenwiderstand, 193  
Wellenzahl, 174  
Widerstand, 62  
    Parallelschaltung, 70  
    Serienschaltung, 69  
    spezifisch, 61  
  
Wienfilter, 77  
Wirbel, 91  
Wirbelströme, 121  
Wirbelstrombremse, 120  
Wirkleistung, 162  
  
Zeigerdiagramm, 162  
Zerstreuungslinse, 243  
Zonenplatte, 305  
Zwischenbild, 251  
Zyklotron, 80  
Zyklotronfrequenz, 75